Übungen zu Quantentheorie, WS 2010/2011

Prof. Dr. R. Friedrich

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 1: (24 P.) **Abgabe: _**

Aufgabe 1: (mündlich)

Betrachten Sie die Bewegung eines Teilchens im konstanten Magnetfeld

$$\mathbf{B} = [0, 0, b]\,.$$

a) **[1 P.]** Zeigen Sie, dass ein zugehöriges Vektorpotential die Form

$$\mathbf{A} = [0, bx, 0]$$

besitzt. Verifizieren Sie, dass das Vektorpotential der Coulomb-Eichung genügt.

b) **[3P.]** Wie lautet die Hamiltonfunktion eines Teilchens der Ladung q, das sich in diesem Potential bewegt. Formulieren Sie die Hamilton'schen Bewegungsgleichungen und geben Sie die allgemeine Lösung an.

c) **[2P.]** Bestimmen Sie den Hamiltonoperator durch Anwendung der Jordan'schen Regel.

d) **[2P.]** Zur Lösung der zeitunabhängigen Schrödingergleichung kann ein Separationsansatz verwendet werden:

$$\Psi(x, y, z) = \varphi_{\|}(z)\varphi_{\perp}(x, y),$$

wobei für die Funktion $\varphi_{\perp}(x, y)$ gilt:

$$\varphi_{\perp}(x, y) = e^{ik_y y}\varphi_x(x), \qquad p_y = \hbar k_y.$$

Zeigen Sie: Für die Funktion $\varphi_x(x)$ lautet die Bestimmungsgleichung

$$\left[\frac{\hbar^2 k_y^2}{2m} - \frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\hbar k_y q b}{m}x + \frac{b^2 q^2}{2m}x^2\right]\varphi_x(x) = E_{\perp}\varphi_x(x) \tag{1}$$

Warum gelingt dieser Separationsansatz?

e) **[3P.]** Lösen Sie die Eigenwertgleichung (1).

Hinweis: Verwenden Sie die Analogie der Eigenwertgleichung zum harmonischen Oszillator. Bestimmen Sie die Energieeigenwerte.

f) **[1P.]** Formulieren Sie die vollständige Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung.

Aufgabe 2: (mündlich)

Betrachten Sie die Schrödingergleichung eines freien Teilchens. Zeigen Sie, dass der Ansatz

$$\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}E\,t}\,u(x, y, z)$$

auf die Helmholtz-Gleichung

$$\left(\nabla^2 + k^2\right)u = 0, \qquad u = u(x, y, z). \tag{2}$$

führt.

a) **[1 P.]** Zeigen Sie, dass sich die Gleichung (2) in Zylinderkoordinaten (ρ, φ, z) in der folgenden Form

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \rho\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 \rho u = 0 \tag{3}$$

schreiben lässt.

b) **[2 P.]** Die Gleichung (3) kann mit einem Separationsansatz

$$u(\rho, \varphi, z) = Z(z)\Phi(\varphi)P(\rho)$$

mit Separationskonstanten $-\lambda^2$ und $-n^2$ gelöst werden. Schreiben Sie die resultierunden Gleichungen für die Funktionen $Z(z)$, $\Phi(\varphi)$ und $P(\rho)$ auf.

c) **[2 P.]** Verifizieren Sie, dass die Gleichung für $P(\rho)$ mit Hilfe des Ansatzes $\xi = \alpha\rho$, $\alpha^2 = k^2 - \lambda^2$ die Form einer besselschen Differentialgleichung

$$\xi^2\frac{d^2 P}{d\xi^2} + \xi\frac{dP}{d\xi} + (\xi^2 - n^2)P = 0 \tag{4}$$

besitzt.

Benutzen Sie nun den Ansatz

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \xi^{k+j}, \qquad a_0 \neq 0\,.$$

d) **[3 P.]** Zeigen Sie, dass die folgenden Relationen gelten:

$$\begin{aligned} (k^2 - n^2)a_0 &= 0 \\ \big((k+1)^2 - n^2\big)a_1 &= 0 \qquad \text{und} \\ a_j &= -\frac{a_{j-2}}{(k+j)^2 - n^2}, \qquad j \geq 2. \end{aligned}$$

e) **[2 P.]** Betrachten Sie nun den Fall $k = n$, $a_0 \neq 0$ und $a_1 = 0$. Beweisen Sie, dass der Hauptterm die folgende Form annimmt:

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j a_0 \Gamma(n+1)}{2^{2j} j! \Gamma(n+j+1)},$$

wobei Γ die Gammafunktion ist,

$$\begin{aligned} \Gamma(x) &= \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0, \\ \Gamma(x+1) &= x\Gamma(x), \\ \Gamma(x) &= (x-1)! \qquad \text{für} \quad x \in Z_+. \end{aligned}$$

<u>Hinweis:</u> Benützen Sie die Eigenschaft

$$(n+1)(n+2)\cdots(n+j) = \frac{\Gamma(n+j+1)}{\Gamma(n+1)}.$$

f) **[1 P.]** Schreiben Sie die Lösung der besselschen Differtialgleichung in Form der Bessel-Funktionen $J_n(\xi) := P(\xi)$ unter Benutzung der Normierung

$$a_0 = \frac{1}{2^n \Gamma(n+1)}.$$