Übungen zu Atom- und Quantenphysik/Physik IV, SoSe 2010

Prof. Dr. R. Friedrich, Prof. Dr. G. F. Hanne

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Testklausur

Aufgabe 1:

Betrachten Sie die eindimensionale Bewegung eines Teilchens der Masse m in einem Doppel-δ-Potential:

$$V(q) = -V_0\delta(q+q_0) - V_0\delta(q-q_0); \qquad V_0 > 0.$$

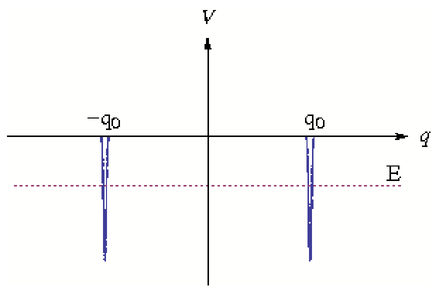

Abbildung 1:

a) Integrieren Sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung über ein Intervall $\mp q_0 - \varepsilon < q < \mp q_0 + \varepsilon$ und zeigen Sie, dass die erste Ableitung der Energieeigenfunktion $\psi(q)$ an der Stelle $q = \mp q_0$ einen endlichen Sprung besitzt.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Wellenfunktion in der Umgebung von $q = \mp q_0$ stetig ist. Benutzen Sie auch die Eigenschaft

$$\int_a^b f(q)\delta(q-q_0)dq = f(q_0), \quad \text{falls} \quad q_0 \in (a,b).$$

b) Lösen sie die zeitunabhängige Schrödingergleichung für die gesamte q-Achse.
Hinweis: Formulieren Sie zunächst passende Lösungsansätze der Wellenfunktion $\psi(q)$ für die Bereiche $-\infty < q < -q_0$, $-q_0 < q < q_0$ sowie $q_0 < q < +\infty$. Betrachten Sie unbedingt den Fall von geraden und ungeraden Funktionen $\psi(q)$. Nutzen Sie auch die Normierungsbedingung aus.

c) Berechnen Sie die Eigenenergien der gebundenen Zustände ($E < 0$).
Hinweis: Nutzen Sie die Unstettigkeitssprünge der ersten Ableitung bei $q = \mp q_0$ aus.

Aufgabe 2:

a) Wie lautet die Hamiltonfunktion $H(p, q)$ des harmonischen Oszillators? Wie lautet der Energiesatz? Welche Bahnkurven gibt es im Phasenraum?

b) Wie lautet der Hamiltonoperator des eindimensionalen harmonischen Oszillators? Führen Sie die neue Variable ξ so ein, dass der Hamiltonoperator die Form

$$H = \frac{\hbar\omega}{2}\big(-\frac{d^2}{d\,\xi^2} + \xi^2\big)$$

einnimmt.

c) Zeigen Sie, dass der Energieerwartungswert

$$E = \langle\psi(\xi)|H|\psi(\xi)\rangle \geq 0$$

ist.

d) Der Vernichtungsoperator ist durch

$$b = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\frac{\partial}{\partial\xi} + \xi\big)$$

definiert. Wie lautet der dazu gehörige adjugierte Operator $b^\dagger$? Berechnen Sie explizit den Kommutator

$$[b,\, b^\dagger] = bb^\dagger - b^\dagger b.$$

e) Zeigen Sie, dass der Hamiltonoperator H die Form

$$H = \hbar\omega\,\big(b^\dagger b + \frac{1}{2}\big)$$

besitzt.

f) Beweisen Sie, dass der Operator $b^\dagger b$ selbstadjugiert ist.

g) Wie können Sie die Grundzustandswellenfunktion $|\,0\,\rangle$ explizit berechnen? Normieren Sie diese Funktion:

$$\langle 0|0\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi\,|\varphi_0|^2 = 1.$$

Hinweis:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\xi e^{-\xi^2} = \sqrt{\pi}.$$

Aufgabe 3:

Betrachten Sie zwei hermitesche Operatoren A und B.

a) Unter welcher Voraussetzung ist das Produkt zweier hermitischer Opeartoren A und B wieder ein hermitescher Operator?

b) Wie lautet der zum Kommutator $[A, B]$ adjugierte Operator?

c) Suchen Sie einen geeigneten Zahlenfaktor, durch den aus $[A, B]$ ein hermitescher Operator wird.

d) $|\,\alpha\rangle$ ist ein Eigenzustand des linearen hermiteschen Operators A. Berechnen Sie den Erwartungswert des Kommutators von A mit einem beliebigen Operator C im Zustand $|\,\alpha\rangle$:

$$\langle\alpha|\,[A, C]\,|\alpha\rangle.$$

Aufgabe 4:

a) Bleiatome mit der Elektronenkonfiguration $\ldots 6p^{2\,3}P_0$ (Spin-Triplett $S = 1$) werden durch einen Stern-Gerlach-Magneten geschickt. Ist eine Aufspaltung des Atomstrahls zu erwarten? Wenn ja in wie viel Teilstrahlen? Ignorieren Sie den Kernspin (die meisten Pb-Isotope haben Kernspin 0).

b) Welche mittlere Wellenlänge hat die Lyman-β-Linie ($n = 3 \to n = 1$) im Wasserstoffatom? Welche Dipolauswahlregeln für atomare Übergänge kennen Sie?

c) Welche Frequenz ist nötig, um in einem Magnetfeld von $B = 1,4$ T Protonenspin-Übergänge zwischen der parallelen und der antiparallelen Ausrichtung zu induzieren? Ignorieren Sie Kopplungen des Protonenspins an andere Drehimpulse.

Zahlenwerte und Begriffe, die Sie nicht unbedingt parat haben:

Wellenzahl: ν/c = Frequenz/Vakuumlichtgeschwindigkeit;
Planck'sches Wirkungsquantum: etwa $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Js;
Bindungsenergie des 1s-Elektrons im H-Atom: etwa 13,6 eV;
1 eV entspricht einer Strahlungsfrequenz von etwa $\nu = 2,4 \cdot 10^{14}$ /s;
g-Faktor des Protons: etwa $g_P = 5,59$;
Bohr'sches Magneton: etwa $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24}$ J/T $= 5,79 \cdot 10^{-5}$ eV/T;
Kernmagneton: etwa $\mu_K = 5,05 \cdot 10^{-27}$ J/T $= 3,15 \cdot 10^{-8}$ eV/T;
atomare Masseneinheit: amu etwa $1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.