Übungen zu Atom- und Quantenphysik/Physik IV, SoSe 2010

Prof. Dr. R. Friedrich, Prof. Dr. G. F. Hanne

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 8: (14 P.) **Abgabe: 14.06.10**

Aufgabe 1: (schriftlich) [3 P.]

Ein Teilchen der Masse m bewegt sich in dem Potential:

$$V(q) = \begin{cases} \infty, & \text{für} \quad q < 0, \\ \frac{1}{2} m\omega^2 q^2, & \text{für} \quad q > 0. \end{cases}$$

Berechnen Sie Eigenwerte und Eigenfunktionen des Hamilton-Operators

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(q).$$

Aufgabe 2: (mündlich) [2 P.]

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\varphi(x) = \alpha(2x^2 - 1) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \qquad x = q\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$$

Eigenfunktion des linearen harmonischem Oszillators ist und geben Sie den zugehörigen Energieeigenwert an.

Aufgabe 3: (mündlich)

Ein Teilchen der Ladung $\hat{q}$ und der Masse m führt eine eindimensionale Bewegung in einem harmonischen Oszillatorpotential aus und ist außerdem dem Einfluß eines konstanten elektrischen Feldes unterworfen, das parallel zu seiner Bewegungsrichtung wirkt.

a) **[1 P.]** Geben Sie den Hamilton-Operator H dieses Systems an.

b) **[2 P.]** Bestimmen Sie Eigenwertspektrum und Eigenfunktionen des Operators H.

Aufgabe 4: (schriftlich) Näherung zum Grundzustand des Helium-Atoms

Wir haben in der Vorlesung die Coulomb-Abstoßung der Elektronen im He-Atom als "Störung" betrachtet und ihren Erwartungswert mit Wasserstoff-Eigenfunktionen zur Kernladungszahl $Z = 2$ als Korrektur angegeben. Eine bessere Näherung zum Grundzustand des He-Atoms erhält man durch die Überlegung, dass es sicher günstig ist, eine möglichst kleine "Störung" abzuspalten. Schreiben wir den Hamilton-Operator wie folgt um,

$$\frac{\mathbf{p}_1^2}{2m} + \frac{\mathbf{p}_2^2}{2m} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z' e^2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Z' e^2}{r_2} + \left\{ -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Z - Z') e^2}{r_1} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{(Z - Z') e^2}{r_2} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_{12}} \right\} = H_0(Z') + W\,,$$

so können wir diese Gleichung so interpretieren, als würden sich die beiden Elektronen im Feld eines Atomkerns mit der Kernladungszahl $Z' < Z$ (Abschirmung!) bewegen (H_0), und die geschweifte Klammer ist die zu betrachtende "Störung" W.

a) **[2 P.]** Berechnen Sie die Bindungsenergie $E(Z') =< H_0(Z') > + < W >= 2(-13,6\,\text{eV})Z'^2 + < W >$ der Elektronen im Grundzustands "dieses" He-Atoms mit der Kernladungszahl Z'. (Hinweis: benutzen Sie $< e^2/(4\pi\varepsilon_0 r_{12}) >= (5/4)\,(13,6\,\text{eV})Z'$ und den Virialsatz $< V(Z') >= 2 < H_0(Z') >$ für ein Coulomb-Potential, der auch in der Quantenphysik gilt.)

b) **[2 P.]** Bestimmen Sie Z' so, dass der Erwartungswert $< W >$ der Störung verschwindet und die Bindungsenergie so optimal angenähert wird. Berechnen Sie die Bindungsenergie beider Elektronen in eV.

Aufgabe 5: Diskussion einer Energieformel für das He-Atom (mündlich) [2 P.]

Die Energieniveaus heliumähnlicher Atome mit einem Elektron im Grundzustand ($n = 1$) und dem anderen im angeregten Zustand ($n > 1$) seien ausgedrückt durch

$$E = -13,6 \left(Z^2 + \frac{(Z-1)^2}{n^2} \right) \mathrm{eV}\,.$$

Diskutieren Sie diesen Ansatz. Für welche Werte von n ist dieser Ansatz geeignet?