
Übungsblatt 6: (14 P.) **Abgabe: 01.06.10**

Aufgabe 1: (schriftlich)

Nehmen Sie an, dass für zwei Operatoren A und B gilt:

$$[A,\, B] = i\,\mathbf{1}. \tag{1}$$

Beweisen Sie, dass dann für $n = 1, 2, 3, \ldots$ folgt:

a) **[1 P.]**

$$[A,\, B^n] = inB^{n-1} = i\frac{d}{dB}B^n. \tag{2}$$

b) **[1 P.]**

$$[A^n,\, B] = inA^{n-1} = i\frac{d}{dA}A^n. \tag{3}$$

Hinweis: Benutzen Sie die Methode der vollständigen Induktion sowie die folgenden Relationen:

$$[A, BC] = B[A, C] + [A, B]C, \quad [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B, \tag{4}$$

wobei A, B und C lineare Operatoren sind.

Aufgabe 2: [3 P.] (mündlich)

Sei $\mathcal{H}$ die Menge aller Spaltenvektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \end{pmatrix} := (a_n),$$

deren Komponenten komplexe Zahlen sind mit

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty. \tag{5}$$

Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl seien komponentenweise erklärt:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_n + b_n), \quad c\,\mathbf{a} = (c\,a_n). \tag{6}$$

Das Skalarprodukt sei definiert durch:

$$\langle \mathbf{a}|\mathbf{b}\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^* b_n. \tag{7}$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{H}$ ein Hilbert-Raum ist.

Aufgabe 3: (mündlich)

Gegeben sei die hermitesche Matrix

$$H = \begin{pmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{pmatrix}.$$

a) **[1 P.]** Bestimmen Sie die Eigenwerte E_1 und E_2.

b) **[1 P.]** Berechnen Sie die zugehörige Eigenzustände.

c) **[1 P.]** Mit Hilfe von a) und b) bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren für die Matrix

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 2i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Aufgabe 4: Spin-Bahn-Wechselwirkung

a) **[2P.] (mündlich)** Unter welchem Winkel kann sich der Spinvektor eines Elektrons zu einer gegebenen Quantisierungsachse einstellen? Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren des Gesamtdrehimpulses und des Bahndrehimpulses für den Zustand $^2f_{5/2}$.

b) **[2P.] (schriftlich)** Zeigen Sie, dass die Spin-Bahn-Wechselwirkung für ein Elektron, dass sich im H-Atom auf einer Kreisbahn mit dem Bohr'schen Radius $r = a_B$ bewegt, sehr viel kleiner ist die Gesamtenergie auf dieser Kreisbahn (grobe semiklassische Abschätzung; nehmen Sie die Energie des Grundzustands).

c) **[2P.] (schriftlich)** Zeigen Sie allgemein, dass der relativistische Korrekturterm (Feinstruktur) im Wasserstoffatom für keinen möglichen Wert der Quantenzahlen n und j verschwindet.