
Übungsblatt 2: (16 P.) **Abgabe: 26.04.10**

Aufgabe 1: Wellenpakete (schriftlich)

a) **[1P.]** Formulieren Sie die Schrödingergleichung für ein freies Teilchen, das sich entlang einer Koordinate x bewegen kann.

b) **[1P.]** Wie lautet die allgemeine Lösung der zeitabhängigen Schrödingergleichung?

c) **[2P.]** Die Wellenfunktion zur Zeit $t = 0$ besitze die Form

$$\Psi(x, t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int dk\, A e^{-(k-k_0)^2 \frac{D^2}{2}} e^{ikx} \tag{1}$$

Berechnen Sie das Integral. Wie muss A gewählt werden, dass die Normierung der Wellenfunktion

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx |\Psi(x, t)|^2 = 1 \tag{2}$$

gewährleistet ist?

Hinweis: Die Fourier-Transformierten einer Gauss-Funktion ist wiederum eine Gauss-Funktion.

d) **[2P.]** Berechnen Sie die Wellenfunktion zur Zeit t. Wie bewegt sich das Maximum der Wellenfunktion? Was können Sie über die Breite der Wellenfunktion aussagen? Bleibt die Normierung bei der zeitlichen Entwicklung erhalten?

e) **[1P.]** Diskutieren Sie das Auseinanderfliessen der Wellenfunktion für ein Teilchen mit der Masse $m = 0,1$ g, $D = 2$mm, sowie für ein α-Teilchen der Masse $6,6 \cdot 10^{-27}$kg mit $D = 10^{-11}$cm.

Aufgabe 2: (mündlich)

Betrachten Sie ein Teilchen der Masse m, das sich in einem unendlich tiefen eindimensionlen Kastenpotential

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad |x| \leq a, \\ +\infty, & \text{für} \quad |x| > a \end{cases}$$

befindet. Zu einem bestimmten Zeitpunkt sei seine Zustandsfunktion $\psi(x)$ durch

$$\psi(x) = N(a^2 - x^2), \quad |x| \leq a$$

gegeben, wobei N eine Normierungskonstanke ist.

a) **[1P.]** Bestimmen Sie zunächst die Normierungskonstante N.

b) **[3P.]** Nehmen Sie an, dass bei einer Messung der Energie des Teilchens zum betreffenden Zeitpunkt der Messwert

$$E_{n-1} = \frac{\hbar^2 \pi^2}{8ma^2} n^2, \quad n \in \mathbb{N}$$

gefunden wurde. Zeigen Sie, dass die Entwicklungskoeffizienten $c_{n-1} := \langle\psi_{n-1}|\psi\rangle$ in diesem Fall durch

$$c_{n-1} = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} \frac{8\sqrt{15}}{(n\pi)^3}, & n \quad \text{ungerade}, \\ 0, & n \quad \text{gerade} \end{cases}$$

gegeben sind.

Hinweis: Die Energieeigenfunktionen $\psi_{n-1}(x)$ für das unendlich tiefe Kastenpotential sind durch

$$\psi_{n-1} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a}} \cos \frac{n\pi x}{2a}, & |x| \leq a \quad n \quad \text{ungerade}, \\ \frac{1}{\sqrt{a}} \sin \frac{n\pi x}{2a}, & |x| \leq a \quad n \quad \text{gerade} \end{cases}$$

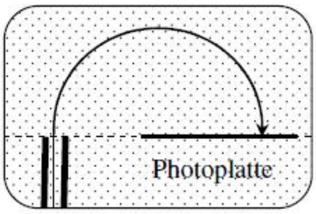
gegeben. Benutzen Sie auch die Formel

$$\int d\xi \xi^2 \cos \alpha\xi = \frac{2\xi}{\alpha^2} \cos \alpha\xi + \frac{\alpha^2\xi^2 - 2}{\alpha^3} \sin \alpha\xi + C, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+.$$

c) **[1P.]** Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit W_{n-1} dafür, den Messwert E_{n-1} zum diesen Zeitpunkt zu finden.

Aufgabe 3: Massenspektrometrie und atomare Masseneinheit

a) **[3P.] (schriftlich)** Sie arbeiten mit einem Massenspektrographen, der nach dem von Bainbridge angegebenen Prinzip funktioniert (siehe Bild): Im Geschwindigkeitsfilter (Plattenkon-



densator plus homogenes **B**-Feld, "Wien-Filter") werden einfach geladene Ionen mit einer bestimmten Geschwindigkeit gerade durch den Plattenkondensator geschossen. Über der ganzen Anordnung liegt ein **B**-Feld, welches die Ionen nach Verlassen des Kondensators auf eine Kreisbahn zwingt. Im Geschwindigkeitsfilter und für die Ablenkung wird ein Magnetfeld von $0,55$ T benutzt. Die elektrische Feldstärke am Geschwindigkeitsfilter sei 800 V/cm. Wie groß ist der Abstand, den die Ionen der Isotope ^{20}Ne und ^{21}N auf der als Nachweisgerät dienenden Photoplatte voneinander haben?

b) **[1P.] (mündlich)** Das *amu* (atomic mass unit, auch u) ist definiert als 1/12 der Masse des Kohlenstoffatoms ^{12}C mit der Massenzahl 12, d. h $M(^{12}C) = 12$ u. Es ist $1 \text{ u} = 931,494 \text{ MeV/c}^2$. Zeigen Sie, dass diese Definition zweckmäßiger ist als eine Definition, der die Masse des Wasserstoffatoms $M(H) = 938,783 \text{ MeV/c}^2$ zugrunde liegt. Um dies zu sehen, berechnen Sie die Masse des Uranatoms ^{238}U mit der Massenzahl 238 in beiden Einheiten. Es ist $M(^{238}\text{U}) = 221,744545 \text{ GeV/c}^2$.