Übungen zu Atom- und Quantenphysik/Physik IV, SoSe 2010

Prof. Dr. R. Friedrich, Prof. Dr. G. F. Hanne

Übungen im WWW: http://pauli.uni-muenster.de/tp/

Übungsblatt 1: (15 P.) **Abgabe: _**

Aufgabe 1: Fourier-Reihen

Betrachten Sie Funktionen f(x), die im Intervall $-L/2 \leq x \leq L/2$ definiert sind und periodische Randbedingungen erfüllen:

$$f(-L/2) = f(L/2)\,. \tag{1}$$

Diese Funktionen sind als Fourier-Reihe darstellbar:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{1}{\sqrt{L}} e^{inkx}\,. \tag{2}$$

Dabei ist $k = 2\pi/L$.

a) **[1P.]** Wie können die Fourier-Koeffizienten c_n aus der Funktion $f(x)$ bestimmt werden?

Hinweis: Beweisen Sie zunächst die Relation

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-inkx} \frac{1}{\sqrt{L}} e^{imkx} = \delta_{nm}\,. \tag{3}$$

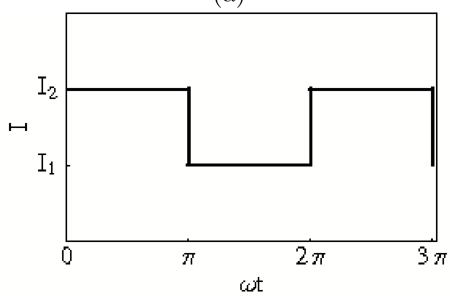
b) **[2P.]** Welche Relation müssen die Foruier-Koeffizienten c_n erfüllen, falls

1) $f(x)$ eine reelle Funktion ist;
2) $f(x)$ eine ungerade Funktion, $f(x) = -f(-x)$ ist;
3) $f(x)$ eine gerade Funktion, $f(x) = f(-x)$ ist.

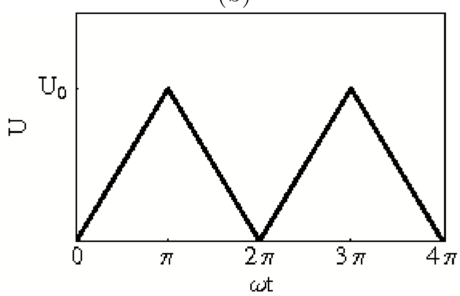
c) Berechnen Sie die Fourierkoeffizienten für

1) **[1 P.]** die Funktion $f(x) = x + \pi$, $x \in [-\pi, \pi]$;
2) **[1 P.]** den Stromverlauf $I(\omega t)$ (siehe Fig. (a));
3) **[1 P.]** den Spannungsverlauf $U(\omega t)$ (siehe Fig. (b)).

(a)



(b)



Aufgabe 2: Fourier-Integrale und Fourier-Transformation

Eine Funktion $f(x)$, $-\infty \leq x \leq \infty$ kann durch das Fourierintergal

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} F(k) \tag{4}$$

oder

$$F(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-ikx} f(x) \tag{5}$$

dargestellt werden, wobei $F(k)$ die Fouriertransformation der Funktion $f(x)$ ist.

a) **[2P.]** Zeigen Sie, dass die Fouriertransformierte der Ableitung der Funktion $f(x)$, $f'(x)$, durch

$$\frac{d}{dx} f(x) \to ikF(k) \tag{6}$$

gegeben ist. Wie lautet die Fouriertransformierte der zweiten, bzw. der n-ten Ableitung von f(x)?

b) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $F(k)$ für die folgende Funktionen:

1) **[1 P.]**

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{für} \quad x \geq 0\,, \\ -e^{x}, & \text{für} \quad x < 0\,. \end{cases} \tag{7}$$

2) **[1 P.]**

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für} \quad x < \pi/2 \quad \text{und} \quad x > \pi/2\,, \\ h, & \text{für} \quad -\pi/2 < x < \pi/2\,. \end{cases} \tag{8}$$

Aufgabe 3: Gauss'sche Glockenkurve

a) **[1 P.]** Berechnen Sie die Fläche A zwischen der Gauss'sche Glockenkurve $G(x) = e^{-\alpha x^2}$ und der x-Achse,

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \qquad \text{mit} \quad \alpha > 0\,. \tag{9}$$

Hinweis: Berechnen Sie A^2 und stellen Sie A^2 in der Form eines Doppelintegrals dar. Führen Sie dann Polarkoordinaten ein.

b) **[2 P.]** Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $F(k)$ der normierten Gauss'schen Glockenkurve $f(x)$ und diskutieren Sie das Ergebniss.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} exp(-\frac{x^2}{2\alpha}) \qquad \text{mit} \quad \alpha > 0\,. \tag{10}$$

c) **[1 P.]** Diskutieren Sie den Verlauf der Kurve $f(x)$ im Grenzfall $\alpha \to 0$.

d) **[2 P.]** Bestimmen Sie das Integral

$$I = \lim_{\alpha \to 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}} e^{-x^2/2\alpha} h(x) \tag{11}$$

für eine bei $x = 0$ stetige Funktion $h(x)$.