E 2.6 Das Noether Theorem

⋮

Fortsetzung:

E 2.6.1 Homogenität des Raumes

(räumliche Homogenität $\hat{=}$ Eigenschaften sind unabhängig vom Ort)

$\longrightarrow$ Lagrangian ist invariant gegen Translation $\Delta\vec{r}$

$$L(\vec{r}_i + \Delta\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i, t) = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t) \quad \text{für beliebige } \Delta\vec{r}$$

für infinitesimale $\Delta\vec{r}$ gilt

$$0 = \Delta L = L(\vec{r}_i + \Delta\vec{r}, \dot{\vec{r}}_i, t) - L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$$

$$\overset{\text{Taylor}}{\approx} \cancel{L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \Delta\vec{r} - \cancel{L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)}$$

$$\Longrightarrow \sum_i \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = 0 \qquad \text{ELGl.} \quad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0$$

$$\overset{\text{EL Gl.}}{\Longrightarrow} \frac{d}{dt} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{d}{dt} \sum_i \vec{p}_i = 0$$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}\vec{P} = 0 \qquad \text{Erhaltung des Gesamtimpulses}}$$

E 2.6.2. Isotropie des Raumes

Selbststudium Nolting 2, Kap 1.4 (1.4.3)
Kontrollfragen zu 1.4 (#8-12)
Übg. 4, Aufg. 3

$\longrightarrow$ Erhaltung des Drehimpulses

E 2.6.3. Homogenität der Zeit

Lit: Goldstein Kap 2.7

($\hat{=}$ Eigenschaften unabhängig von der Zeit)

$\longrightarrow$ Lagrangian invariant gegen Zeittranslation

$$L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t + \Delta t) = L(\vec{r}_i, \dot{\vec{r}}_i, t)$$

$$\overset{\text{Taylor-entw. f.}}{\Longrightarrow} \quad \frac{\partial L}{\partial t} = 0$$

$\Delta t \ll t$ $\qquad \partial t$

Dies impliziert:

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \ddot{\vec{r}}_i \right]$$

$$\overset{\text{ELGl}}{=} \sum_i \left[\left(\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \right) \cdot \dot{\vec{r}}_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \frac{d}{dt} \dot{\vec{r}}_i \right]$$

$$\frac{dL}{dt} \overset{\text{Prod.regel}}{=} \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i \right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dH}{dt} = 0 \quad \text{mit} \quad H = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} \cdot \dot{\vec{r}}_i - L \qquad H = \sum_i \vec{p}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - L} \qquad (*)$$

Erhaltung der Hamiltonfunktion H

Bedeutung von H:

- in Kartesischen Koordinaten

$$L = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - V(\vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}_i} = m_i \dot{\vec{r}}_i$$

$$H = \sum_i m \dot{\vec{r}}_i^{\,2} - \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V$$

$$H = \sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\vec{r}}_i^{\,2} + V = T + V = E$$ Gesamt-energie

$\Rightarrow$ Hamiltonian H ist Gesamtenergie des Systems

Homogenität der Zeit $\longrightarrow$ Energieerhaltung

E.3 Hamilton Formalismus

E3.1 Grundlagen

- Hamiltonsche Mechanik ist formale Theorieweiterentwicklung
- rechentechnisch selten vorteilhaft im Vergleich zu Lagrangeformalismus

jedoch

- gut für die Untersuchung allg. Eigenschaften (hamiltonscher) dynamischer Systeme
- Grundlage des Übergangs

Mechanik $\longrightarrow$ Quantenmechanik

Hamiltonfunktion $\quad$ Hamiltonoperator

- wichtig in der statistischen Mechanik
  (Phasenraum, Zustandssumme)

- Ausgangspunkt Variablentransformation

$$(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t) \longrightarrow (\{q_i\},\{p_i\},t)$$

$$\text{mit } p_i = \frac{\partial L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)}{\partial \dot{q}_i}$$

Legendre Transformation (vgl. Physik 2, Kap 4)

$$H(\{q_i\},\{p_i\},t) = \sum_j p_j \dot{q}_j - L(\{q_i\},\{\dot{q}_i\},t)$$

E 3.2 Hamiltonsche Gleichungen (Kanonische Gl)

E 3.2.1 Ableitung der Hamiltonschen Gl

mit $L = L(q_i, \dot{q}_i, t)$ gilt

$$dL = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$\overset{\text{ELGl}}{=} \sum_i \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$= \sum_i \left(\dot{p}_i dq_i + p_i d\dot{q}_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$d(p_i \dot{q}_i) = p_i d\dot{q}_i + \dot{q}_i dp_i$$

$$dL = \sum_i \left(\dot{p}_i dq_i + d(p_i \dot{q}_i) - \dot{q}_i dp_i \right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

$$d\left(L - \sum_i p_i \dot{q}_i\right) = \sum_i \left(\dot{p}_i dq_i - \dot{q}_i dp_i\right) + \frac{\partial L}{\partial t} dt$$

für Hamiltonfkt gilt $\quad (H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L)$

$$dH = \sum_i \left(-\dot{p}_i dq_i + \dot{q}_i dp_i\right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt \qquad (*)$$

Andererseits gilt für $H = H(q_i, p_i, t)$

$$dH = \sum_i \left(\frac{\partial H}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i \right) + \frac{\partial H}{\partial t} dt \qquad (**)$$

Vergleich von $(*)$ und $(**)$

$$\boxed{\begin{aligned}\dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i}\\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned}}$$

Hamiltonsche Gleichungen

$$\frac{\partial L}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial t}$$

$\left.\begin{array}{l} f \text{ Ortskoordinaten} \\ f \text{ Impulskoordinaten}\end{array}\right\}$ 2f Differentialgleichungen 1. Ordnung

[statt f DGl. 2. Ordnung im Lagrange Formalismus]

- q_i und p_i : kanonisch konjugierte Größen
- Bewegungsgleichungen bis auf Vorzeichen symmetrisch
- Hängt H von einer Variablen q_k nicht ab:

$$\frac{\partial H}{\partial q_k} = 0 \longrightarrow \dot{p}_k = 0 \longrightarrow p_k \text{ konstant}$$

"zyklische Variable"

E 3.3.2 Der Phasenraum

- Lagrange: Bewegung im Konfigurationsraum $\{q_i\}$
- Hamilton Gl. beschreiben Bew. im Phasenraum $\{q_i, p_i\}$
  2f dimensional
  Anf. bedingungen $q_i(t_0)$, $p_i(t_0)$
- Zustand eines Systems eindeutig durch Position im Phasenraum bestimmt
- Bahnkurve $\{q_i(t), p_i(t)\}$ heißt Trajektorie
  Vektor $(\dot{q}_i, \dot{p}_i) = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$ zeigt in Richtg. der Tangente der Trajektorie
- Falls $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$, dann liegt Trajektorie im 2f − 1 dimensionalen Unterraum mit H = const
  ("Hyperfläche" des 2f-dim. Phasenraumes)

E 3.2.3. Beispiele

E 3.2.3.1 Federpendel

- Energien $T = \frac{m}{2}\dot{x}^2$ $\qquad V = \frac{D}{2}x^2$

- $L = T - V$ Lagrangian

  mit $q = \sqrt{m\omega}\, x \qquad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$

  $$L = \frac{1}{2\omega}\dot{q}^2 - \frac{1}{2}\omega q^2$$

- verallg. Impuls $\quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{1}{\omega}\dot{q}$

- Hamiltonfunktion $\quad H = p\dot{q} - L = \omega p^2 - \frac{\omega}{2}p^2 + \frac{\omega}{2}q^2$

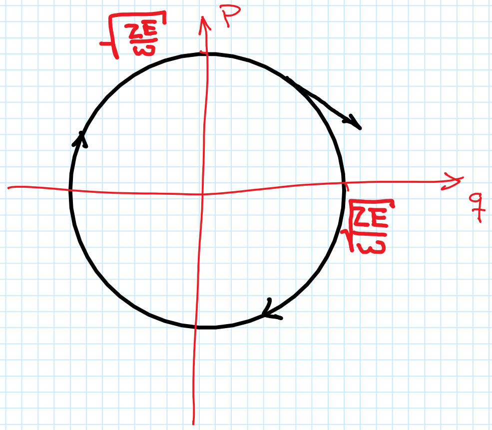
  $$H = \frac{\omega}{2}(p^2 + q^2) = E = \text{const} \qquad (*)$$

- Bewegungsgleichungen $\quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \omega p$

  $$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\omega q$$

  Ableiten ergibt $\ddot{q} = \omega\dot{p} = -\omega^2 q$ $\longrightarrow$ äquivalent zu Newton u. Lagrange Formulierung

- im 2d Phasenraum der durch p, q aufgespannt wird, formt die Bahn eine $2-1=1$ dimensionale Hyperfläche:



$$(p^2 + q^2) = \frac{2E}{\omega}$$

Kreis mit Radius $\sqrt{\frac{2E}{\omega}}$

$$\begin{pmatrix}\dot{q}\\ \dot{p}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\partial H/\partial p\\ -\partial H/\partial q\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}p\\ -q\end{pmatrix}$$

Tangentvektor (vgl. E 3.2.2)

$\longrightarrow$ gibt Umlaufsinn

E 3.2.3.2. Teilchen im elektromagn. Feld

$$L = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + q\dot{\vec{r}}\cdot\vec{A} - q\phi - \tilde{V}$$

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{r}}} = m\dot{\vec{r}} + q\vec{A} \longrightarrow \dot{\vec{r}} = \frac{1}{m}(\vec{p} - q\vec{A})$$

$$H = \vec{p}\cdot\dot{\vec{r}} - L$$

$$= \vec{p}\cdot(\vec{p} - q\vec{A})\frac{1}{m} - \frac{m}{2}\frac{1}{m^2}(\vec{p}-q\vec{A})^2 - q/m\,(\vec{p}-q\vec{A})\cdot\vec{A} + q\phi + \tilde{V}$$

$$= \frac{1}{2m}(\vec{p} - q\vec{A})^2 + q\phi + \tilde{V}$$

Kopplung an ein Feld erfolgt im Hamilton Formalismus durch

"Minimalsubstitution"

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - q\vec{A}$$
$$\tilde{V} \longrightarrow \tilde{V} + q\phi$$

E 3.4. Kanonische Transformationen

E 3.4.1. Phasenraumtransformationen

- Lagrangefunktion (E 2.4.)
  - forminvariant gegenüber Punkttransformationen
    $$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, t)$$
  - Eichtransformationen gibt äquivalente Lagrangefunktion

- Hamiltonfunktion auch forminvariant
  - da p_i und q_i gleichberechtigt
    $\longrightarrow$ Transf. zwischen Koordinaten und Impulsen möglich

$\boxed{\text{Phasenraumtransformationen}}$ PRT

$$\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k, t)$$
$$\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, p_k, t)$$

- PRT heißt Kanonische Transformation falls ein

$\tilde{H} = \tilde{H}(\tilde{q}_i, \tilde{p}_i, t)$ existiert, sodass gilt:

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}_i} \qquad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}$$

Durch PRT kann Lsg. von Problemen vereinfacht werden.

E 3.4.2. Erzeugende Funktion

Behauptung: Eine PRT ist Kanonisch falls gilt:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i - H = \sum_i \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i - \tilde{H} + \frac{dF_1}{dt}$$

mit einer beliebigen Funktion $F_1 = F_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$

Typ 1

Beweis in 2 Schritten, man zeigt

(1) F_1 definiert eindeutig die Transformation und $\tilde{H}$

(2) die Transformation ist Kanonisch

für vollen Beweis siehe Scan E 3.4.2 auf webseite

hier nur Skizze von (1)

(1) einerseits gilt
$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(p_i \dot{q}_i - \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i \right) - \left(H - \tilde{H} \right)$$

andererseits:
$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \dot{\tilde{q}}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}$$

Vergleich gibt:
$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \qquad \tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \qquad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \qquad \text{(i)} \dots \text{(iii)}$$

aus (i) $p_i = p_i(q_k, \tilde{q}_k, t)$ auflösen $\tilde{q}_i = \tilde{q}_i(q_k, p_k, t)$

aus (ii) $\tilde{p}_i = \tilde{p}_i(q_k, \tilde{q}_k, t) = \tilde{p}_i(q_k, \tilde{q}_k(q_j, p_j, t), t)$

aus (iii) $\tilde{H} = H(q_i(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t), p_i(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t), t) + \frac{\partial F_1}{\partial t}(q_i(\tilde{q}_k, \tilde{p}_k, t), \tilde{q}_k, t)$

$\longrightarrow$ Transfo. und $\tilde{H}$ eindeutig bestimmt

(2) siehe scan

$\longrightarrow$ in den transf Variablen gelten die Hamiltonschen Gl.
d.h. durch $F_1(q_i, \tilde{q}_i, t)$ bestimmte Transf. ist kanonisch

- alternative Formen der erzeugenden Funktionen ergeben sich durch Legendre Transformationen:

$$F_2(q_i, \tilde{p}_i, t) = F_1 - \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i = F_1 + \sum_i \tilde{p}_i \tilde{q}_i \qquad \text{Typ 2}$$

Transformationsregeln ergeben sich aus (s.o.)
$$\frac{dF_1}{dt} = \sum \left(p_i \dot{q}_i - \tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i \right) - \left(H - \tilde{H} \right)$$
$$\frac{dF_2}{dt} = \frac{dF_1}{dt} + \sum_i \left(\tilde{p}_i \dot{\tilde{q}}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i \right)$$
$$= \sum_i \left(p_i \dot{q}_i + \tilde{q}_i \dot{\tilde{p}}_i \right) - \left(H - \tilde{H} \right) \qquad (*)$$

andererseits
$$\frac{dF_2}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_2}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} \dot{\tilde{p}}_i \right) + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad (**)$$

Vergleich (*), (**)
$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \qquad \tilde{q}_i = \frac{\partial F_2}{\partial \tilde{p}_i} \qquad \tilde{H} = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \qquad +$$

Analog:
$$F_3(p_i, \tilde{q}_i, t) = F_1 - \sum_i \frac{\partial F_1}{\partial q_i} q_i = F_1 - \sum_i p_i q_i$$
$$F_4(p_i, \tilde{p}_i, t) = F_1 - \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial q_i} q_i \right) =$$

$$= F_1 + \sum_i (\tilde{p}_i \tilde{q}_i - p_i q_i)$$

Beispiele

a) $F_1(q_i, \tilde{q}_i, t) = -\sum_i q_i \tilde{q}_i$

(i) $\rightarrow$ $p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} = -\tilde{q}_i$ (ii) $\tilde{p}_i = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}_i} = q_i$

$\rightarrow$ Vertauschung Ort und Impuls

b) $F_1(q, \tilde{q}, t) = -\frac{1}{2} q^2 \tan \tilde{q}$ (1d)

$$\Rightarrow \quad p = \frac{\partial F_1}{\partial q} = -q \tan \tilde{q} \qquad \tilde{p} = -\frac{\partial F_1}{\partial \tilde{q}} = \frac{1}{2} q^2 \frac{1}{\cos^2 \tilde{q}}$$

$$= \frac{1}{2} q^2 (1 + \tan^2 \tilde{q})$$

- Auflösen nach neuen Variablen

$$\tilde{q} = -\arctan(p/q) \qquad \tilde{p} = \frac{1}{2} q^2 \left(1 + \frac{p^2}{q^2}\right) = \frac{1}{2}(q^2 + p^2)$$

- speziell: Anwendung auf harmonischen Oszillator

$$H = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) \quad \Rightarrow \quad \tilde{H} = \omega \tilde{p}$$

$\tilde{H} \neq \tilde{H}(\tilde{q})$ $\rightarrow$ $\tilde{q}$ ist zyklische Koordinate

$\rightarrow$ Hamiltonsche Gl.

$$\dot{\tilde{p}} = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{p} = \tilde{p}_0 = \text{const.}$$

$$\dot{\tilde{q}} = \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{p}} = \omega \quad \Rightarrow \quad \tilde{q} = \omega t + \tilde{q}_0$$

$\tilde{p}, \tilde{q}$ entsprechen Polarkoordinaten im Phasenraum

- Rücktransformation: mit $q^2 = 2\tilde{p} \cos^2 \tilde{q}$ folgt

$$q = \sqrt{2\tilde{p}} \cos \tilde{q} = \sqrt{2\tilde{p}_0} \cos(\omega t + \tilde{q}_0)$$

$$p = -q \tan \tilde{q} = -\sqrt{2\tilde{p}_0} \sin \tilde{q} = -\sqrt{2\tilde{p}_0} \sin(\omega t + \tilde{q}_0)$$

$\tilde{p}_0, \tilde{q}_0$ durch Anfangsbedingungen festgelegt

E 3.5 Hamilton Jacobi Theorie

hier nur Skizze

Selbststudium Nolting 2 Kap 3.1. – 3.5.2.
S. 170 – 194

- Suche nach Transformation zur einfachst möglichen Struktur des Hamiltonschen Problems

$\rightarrow$ im transf. System alle Variablen zyklisch, d.h. $\tilde{H} = 0$ (bzw. konstant)

- Hamilton Jacobi Differentialgleichung (HJD) ist die Gleichung für die Erzeugende vom Typ $F_2(q_i, \tilde{P}_i, t)$ die in diesem spezielle Fall Hamiltonsche Wirkungsfunktion S heißt:

$$\boxed{H\left(q_1, \dots, q_f, \frac{\partial S}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial S}{\partial q_f}\right) + \frac{\partial S}{\partial t} = 0} \qquad \text{HJD}$$

identisch zu Gl. ⊕ mit $\tilde{H} = 0$

- Beispiele
  Lösungsverfahren
  Anwendungen } Nolting

- Bedeutung
  - S ist Erzeugende vom Typ F_2, d.h.

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial S}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial S}{\partial \tilde{P}_i} \dot{\tilde{P}}_i \right) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

außerdem gilt $\quad \tilde{H} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0 \qquad$ HJD

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \qquad \dot{\tilde{P}}_i = 0$$

$$\dot{\tilde{P}}_i = -\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \tilde{q}_i}$$

$$\frac{dS}{dt} = \sum_i p_i \dot{q}_i - H = L \qquad \text{Lagrangian}$$

integriere: $\quad S = \int_{t_0}^{t} L(t')\, dt' \qquad$ Wirkungsfkt des Hamiltonschen Prinzips

E 3.6 Poisson Klammern

Lit: Nolting 2, Kap 2.4.2 – 2.4.5

Bewegungsgleichg. für beliebige Fkt $f(q_i, p_i, t)$

$$\frac{df}{dt} = \sum_i^N \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$$\underset{\text{Hamilton}}{=} \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right)}_{\{f, H\}} + \frac{\partial f}{\partial t}$$

$\{f, H\}$ Poisson Klammern

$$\frac{df}{dt} = \{f, H\} + \frac{\partial f}{\partial t} \qquad (*)$$

Eigenschaften, Beispiele ⟶ Nolting

<u>Ausblick</u>

- in der Quantenmechanik geht die Poissonklammer über in den Kommutator zweier Operatoren $[A,B] = AB - BA$ und die Heisenbergsche Bewegungsgleichung für einen Operator A:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{i\hbar}[A,H] + \frac{\partial A}{\partial t} \qquad \text{analog zu } (*)$$

hier ist H der Hamiltonoperator

Übersetzungsvorschrift $\quad \{\ldots,\ldots\} \longrightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ldots,\ldots]$

E 3.7 Satz von Liouville

Lit.: Greiner Mechanik – Hamiltonsche Dynamik S. 384 ff (in Kap. 18)

Was passiert mit einem Element des Phasenraumvolumens

$\Delta\Gamma(0)$ $\qquad \Delta\Gamma(t) \overset{?}{\gtreqless} \Delta\Gamma(0)$

- Dimension des Phasenraumes sei $k = 2f$
- Koordinaten & Impulse $\{q_1 \ldots, q_{k/2}, p_1 \ldots p_{k/2}\} = \{z_i\}$ mit $i = 1 \ldots k$
- Volumenelement des Phasenraumes

$$\Delta\Gamma = \prod_{i=1}^{k} \Delta z_i$$

- Fluss

(*) $\quad \dot{z}_i = V_i(\{z_i\}) \qquad$ Hamiltonsche Gl. oder anderes dyn. System

- Zeitentwicklung

(**) $$\frac{d}{dt}\Delta\Gamma = \frac{d}{dt}\prod_{i=1}^{k}\Delta z_i \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Produkt-} \\ \text{regel}}}{=} \frac{d\Delta z_1}{dt}\Delta z_2 \ldots \Delta z_k + \ldots + \Delta z_1 \ldots \Delta z_{k-1}\frac{d\Delta z_k}{dt}$$

$$\frac{d\Delta z_1}{dt} = \Delta \frac{dz_1}{dt} \overset{(*)}{=} \Delta V_1(\{z_i\}) = V_1(z_1+\Delta z_1, z_2, \ldots, z_k) - V_1(z_1, z_2, \ldots, z_k)$$

$$\underset{\text{Taylor}}{\approx} \frac{\partial V_1}{\partial z_1}\Delta z_1$$

analog für alle $\quad \frac{d\Delta z_i}{dt} \approx \frac{\partial V_i}{\partial z_i}\Delta z_i$

Einsetzen in (**)

$$\frac{d}{dt}\Delta\Gamma = \underbrace{\left(\frac{\partial V_1}{\partial z_1} + \frac{\partial V_2}{\partial z_2} + \dots + \frac{\partial V_K}{\partial z_K}\right)}_{\equiv\, \vec{\nabla}_K \cdot \vec{V}} \Delta\Gamma \qquad (***)$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_K \end{pmatrix} \qquad \vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \partial/\partial z_1 \\ \vdots \\ \partial/\partial z_K \end{pmatrix}$$

$$\left[\ \frac{d}{dt}(\ln \Delta\Gamma) = \vec{\nabla}_K \cdot \vec{V}\ \right]$$

Kontinuitätsgleichung im Phasenraum

- nun Hamiltonscher Fluss

$$\dot{\vec{z}} = (\dot{q}_1, \dots, \dot{q}_{K/2}, \dot{p}_1, \dots, \dot{p}_{K/2})$$

$$= \left(\frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{\partial H}{\partial p_{K/2}}, -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, -\frac{\partial H}{\partial q_{K/2}}\right)$$

- in (***)

$$\frac{d}{dt}\Delta\Gamma = \cancel{\frac{\partial}{\partial q_1}\frac{\partial H}{\partial p_1}} + \dots + \cancel{\frac{\partial}{\partial q_{K/2}}\frac{\partial H}{\partial p_{K/2}}} + \cancel{\frac{\partial}{\partial p_1}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_1}\right)} + \dots + \cancel{\frac{\partial}{\partial p_{K/2}}\left(-\frac{\partial H}{\partial q_{K/2}}\right)}$$

$= 0 \quad \hat{=}$ Hamiltonsche Dynamik
Konservatives System

Phasenraumvolumen ist konstant

- Im Kontrast:
  wenn $\frac{d}{dt}\Delta\Gamma \neq 0$ dissipatives System (< 0)

  System mit Reibung

Satz von Liouville

In einem Hamiltonschen System mit nicht explizit zeitabhängigem Hamiltonian ist das Phasenraumvolumen Γ konstant.