Donnerstag, 16. April 2015
15:05

E.2 Lagrange Formalismus

Lit: Goldstein Kap. 2
Nolting 2, Kap. 1.3, 1.4

E 2.1. Das Hamiltonsche Prinzip

Newtonsche Bewegungsgleichung ist Differentialgl. (lokale Formulierung)

alternativ: Integralprinzip, Extremalprinzip

Beschränkung auf konservative holonome Systeme

Def. Wirkung S

$$\boxed{S[q_i(t)] = \int_{t_a}^{t_b} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt}$$

mit Lagrange Funktion (Lagrangian) $L = T - V$

T kinetische Energie
V potentielle Energie

S ist ein Funktional der Bahnkurve (Funktion einer Funktion)

$\vec{q}(t) = (q_1(t), q_2(t), \ldots, q_n(t))$ im n-dimensionalen Konfigurationsraum,

d.h. der ganzen Bahnkurve wird eine Zahl zugeordnet

Bem: $\vec{q}$ Kurzschreibweise, kein geometr. Vektor

Hamiltonsches Prinzip (Prinzip der kleinsten Wirkung)

Wird die Wirkung S bzgl. beliebig variierender Bahnkurven $\vec{q}(t)$ mit festgehaltenem Anfangs- und Endpunkt berechnet $[\vec{q}(t_a) = \vec{q}_a, \vec{q}(t_b) = \vec{q}_b]$, so zeichnet sich die realisierte Bahn dadurch aus, dass S extremal wird.

Bem 1. Das Hamiltonsche Prinzip

(i) enthält die gesamte klass. Mechanik konservativer holonomer Systeme

(ii) ist unabhängig vom Koordinatensystem

(iii) ist auf nicht-mechanische Systeme erweiterbar (Elektrodynamik und andere Feldtheorien)
$\rightarrow$ Benutzung von jeweils geeigneten Lagrangefunktionen

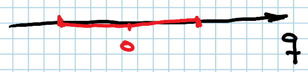
Bem 2. Man unterscheidet verschiedene Räume

▪ harmon. Oszillator in 1d

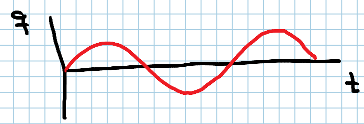
Koord. $q = x$

Impuls p

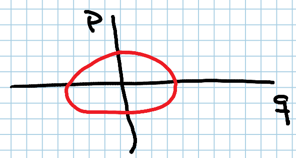
- Konfigurationsraum $\vec{q}$ (bzw. $\vec{r}$)



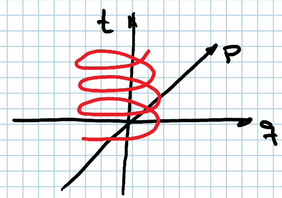
- Ereignisraum $\vec{q}, t$



- Phasenraum* $\vec{q}, \vec{p}$



- Zustandsraum $\vec{q}, \vec{p}, t$



* Für Vielteilchensysteme (im Kontext der Statistischen Physik) ist Phasenraumvolumen verknüpft mit der Entropie

E 2.2. Mathematischer Einschub – Variationsrechnung

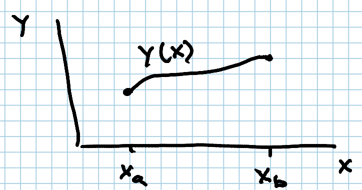
E 2.2.1. Funktionale

Durch ein Funktional $F[\vec{y}]$ wird einer d-dimensionalen vektorwertigen Funktion $\vec{y}(x) = (y_1(x), y_2(x), \dots, y_d(x))$ eine Zahl zugeordnet.

Hier: reelle Zahl

▪ $d = 1$

(a) Bogenlänge einer Kurve



$$L[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} ds = \int_{x_a}^{x_b} \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} dx$$

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 = dx^2\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)$$

(b) Potentielle Energie einer Kette im Schwerefeld

ϱ .. lineare Dichte (Masse pro Länge)
hier konstant

Massenelement $dm = \varrho\, ds$
$$= \varrho \left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{1/2} dx$$

Beitrag zur potentiellen Energie $dV = y g\, dm$

$$V = \varrho g \int_{x_a}^{x_b} y \sqrt{1 + y'^2}\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

Typische Frage: Welche Form $y(x)$ minimiert V ?

<u>Allgemein</u> Funktionale häufig gegeben als

$$\boxed{F[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} f(y, y', x)\, dx} \qquad (*)$$

gesucht: Extrema von F

E 2.2.2. Elemente der Variationsrechnung (Lit: Goldstein Kap. 2.2)

geg: Funktional der Form $(*)$ mit stetig differenzierbarer Funktion $f(y, y', x)$

ges: Kurve $y(x)$ mit gegebenen Anfangs- und Endpunkten $y(x_a) = y_a$ bzw. $y(x_b) = y_b$ für die $F[y(x)]$ extremal wird

- <u>kurz</u> (siehe PhyI Kap T 3.5.1)

man bestimmt die Variation

$$\delta F = \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y + \frac{\partial f}{\partial y'}\delta y'\right) dx = 0 \qquad \text{(analog zum totalen Differential)}$$

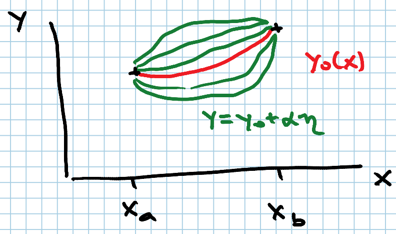
$$\underset{\text{part. Int.}}{=} \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right) \delta y\, dx \overset{!}{=} 0 \quad \text{Minimierung}$$

$$\xrightarrow[\text{beliebige } \delta y]{\text{gilt für}} \quad \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$

Euler - Lagrange Gleichung (EL-Gl.)

- <u>lang</u> – $y_0(x)$ sei gesuchte Funktion

- sehe $y(x) = y_0(x) + \alpha\,\eta(x)$ mit $\eta(x_a) = \eta(x_b) = 0$
α Parameter



Für gegebenes $y_0(x)$ und $\eta(x)$ wird $F[y(x)]$ zu Funktion von α : $F(\alpha)$

→ am Extremalwert gilt $\dfrac{dF}{d\alpha} = 0$ da α unabhängig von x

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_a}^{x_b} \frac{d}{d\alpha} f(y, y', x)\, dx = \int_{x_a}^{x_b} \left(\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} \right) dx$$

$$y = y_0 + \alpha\eta \longrightarrow \frac{\partial y}{\partial \alpha} = \eta$$

$$y' = y_0' + \alpha\eta' \longrightarrow \frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \eta' = \frac{d\eta}{dx}$$

Produkt ~~Kettenregel~~ gibt

$$\frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha} = \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{d\eta}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\eta\right) - \eta\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}$$

Nun folgt

$$\frac{dF}{d\alpha} = \int_{x_a}^{x_b} \eta \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx + \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial y'}\eta \right]_{x_a}^{x_b}}_{=0 \text{ weil } \eta(x_a)=0,\ \eta(x_b)=0} = 0$$

soll für beliebige $\eta(x)$ gelten

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0}$$ EL Gleichung des Variationsproblems

globale Bedingung (Minimierung Integral) ⟶ lokale Gleichung (Differentialgl. für $y(x)$)

E 2.2.3. Beispiele (vgl. E 2.2.1)

(a) Kürzeste Verbindung zwischen 2 Punkten

$$f(y, y', x) = \sqrt{1 + y'^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

EL Gl: $\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} = 0 \quad \Longrightarrow \quad -\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = 0$

$\xrightarrow{\text{Integration}} \quad \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$

$$\Longrightarrow \quad y'^2 = C^2(1+y'^2) \quad \Longrightarrow \quad y'^2 = \frac{C^2}{1-C^2} = \text{const.}$$

$$y = c_1 x + c_2 \quad \longrightarrow \text{Gerade}$$

Konstanten durch Endpunkte festgelegt

(b) minimale potentielle Energie einer Kette

$$f(y,y',x) = y\sqrt{1+y'^2}$$

allg. gilt falls $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right) = 0 \qquad \text{denn}$$

$$\frac{d}{dx}\left(y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f\right) = \cancel{y''\frac{\partial f}{\partial y'}} + y'\frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y}y' - \cancel{\frac{\partial f}{\partial y'}y''}$$

$$= -y'\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y'}\right) \underset{\text{EL Gl.}}{=} 0$$

damit $\quad y'\frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const.}$

hier: $\quad y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} - y\sqrt{1+y'^2} = -\frac{y}{\sqrt{1+y'^2}} = C_1$

$$\Longrightarrow \quad y' = \pm\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2} - 1}$$

Trennung der Variablen

$$\pm\int\frac{dy}{\sqrt{\frac{y^2}{C_1^2}-1}} = \int dx$$

$$C_1 \operatorname{arcosh}\frac{y}{C_1} = \pm(x+c_2)$$

$$y = C_1\cosh\frac{x+c_2}{C_1} \qquad \cosh(-x) = \cosh(x)$$

Endpunkte $\longrightarrow C_1, C_2$

E 2.2.4 Erweiterung auf Funktional mehrerer Veränderlicher

$$F[y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)] = \int_{x_a}^{x_b} f(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x)\, dx$$

analoge Rechnung liefert $\displaystyle\int_{x_a}^{x_b} \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} \right) \eta_i \, dx = 0$

alle η_i unabhängig und beliebig (mit $\eta_i(x_a) = 0$, $\eta_i(x_b) = 0$)

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial f}{\partial y_i'} = 0} \quad \text{für } i = 1..n$$

EL Gl. des Variationsproblems

E 2.3. Lagrange Gleichungen 2. Art

E 2.3.1. Anwendung auf Hamiltonsches Prinzip

Wirkung $\displaystyle S[q_1, q_2, \dots, q_n] = \int_{t_a}^{t_b} L(q_i, \dot{q}_i, t)\, dt$

$$\Longrightarrow \boxed{\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0}$$

EL Gl. des Variationsproblems $\displaystyle\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0$

oder Lagrange Gleichung 2. Art

(Keine Nebenbedingungen)

Bem: Bedingung ist, dass die q_i unabhängig voneinander sind

→ damit sind die η_i unabhängige Variationen

Notation: man sagt auch kurz $\eta_i = \delta q_i$

$$\frac{\delta S}{\delta q_i} = 0 \longrightarrow \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = 0$$

Rechenvorschrift

1) Formuliere Zwangsbedingungen
2) Bestimme verallgemeinerte Koordinaten q_i
3) Stelle Lagrange Funktion auf $L = T - V$
4) Leite Euler Lagrange Gl. her
5) Löse EL Gl.
6) Transformiere zurück in Ortskoordinaten

Beispiele Nolting 2 Kap. 1.2.2

Übungsblatt 2 | 3

E 2.3.2. Der Fall geschwindigkeitsabhängiger Potentiale

Normalerweise $\quad L = T(\dot q_1, \dots \dot q_n) - V(q_1, \dots, q_n, t)$

- Wie lautet der Formalismus bei geschwindigkeitsabhängigen Kräften? $\quad \tilde F_i\,(q_1, \dots, q_n, \dot q_1, \dots \dot q_n, t)$
- Zunächst Einschränkung die sich aus Potentialen ableiten lassen

$$\tilde F_i(\vec q, \dot{\vec q}, t) = -\frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_i} \qquad \text{(definiert } U\text{)}$$

- Übergang zu neuem Lagrangian

$$L \to L' = T - U$$

$\longrightarrow$ EL Gleichungen

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_i} \overset{T = T(\dot q_i)}{=} -\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i} \underbrace{- \frac{\partial U}{\partial q_i} + \frac{d}{dt}\frac{\partial U}{\partial \dot q_i}}_{\tilde F_i}$$

■ Teilchen im elektromagnetischen Feld

Lorentzkraft $\quad \vec F = q(\vec E + \vec v \times \vec B)$, $\quad \vec v = \dot{\vec r}$, $\quad q$: Ladung

? Potential U

nutze: $\quad \vec\nabla \cdot \vec B = 0 \quad$ (Magnetfeld ist quellenfrei) $\quad (*)$

$\quad \vec\nabla \times \vec E + \frac{\partial \vec B}{\partial t} = 0 \quad$ (Induktionsgesetz) $\quad (**)$

$(*)$ $\quad \vec B$ kann immer als $\vec\nabla \times \vec A$ geschrieben werden

in $(**)$ $\quad \vec\nabla \times \vec E + \vec\nabla \times \frac{\partial \vec A}{\partial t} = 0 \longrightarrow \vec\nabla \times \left(\vec E + \frac{\partial \vec A}{\partial t}\right) = 0$

$\longrightarrow \vec E + \frac{\partial \vec A}{\partial t} = -\vec\nabla \Phi \longrightarrow \vec E = -\vec\nabla \phi - \frac{\partial \vec A}{\partial t}$

↳ Konvention

Potential Φ und Vektorpotential $\vec A$
(aus Eigenschaften der Divergenz $(\vec\nabla \cdot)$ und der Rotation $(\vec\nabla \times)$)

$\longrightarrow$ geschwindigkeitsabh. Potential der Lorentzkraft

$$\boxed{U(\vec r, \dot{\vec r}, t) = -q\left(-\Phi(\vec r, t) + \vec A(\vec r, t) \cdot \dot{\vec r}\right)}$$

↳ zeige Newton Gl. mit Lorentzkraft resultiert aus Minimierung von S, d.h. entspricht der EL-Gl.

$$L' = \frac{m}{2}\dot{\vec r}^{\,2} - U$$

EL Gl. $\Longrightarrow$

$$0 = \frac{\partial L'}{\partial \vec r} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot{\vec r}} = -q\vec\nabla\Phi + q\vec\nabla(\vec A \cdot \dot{\vec r}) - m\ddot{\vec r} - q\frac{d\vec A}{dt}$$

totale Zeitabl. $\quad \frac{d\vec A}{dt} = \sum_k \frac{\partial \vec A}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial \vec A}{\partial t} = \dot{\vec r} \cdot (\vec\nabla \vec A) + \frac{\partial \vec A}{\partial t}$

totale Zeitabl. $\frac{dA}{dt} = \sum_k \frac{\partial A}{\partial x_k}\frac{dx_k}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} = \dot{\vec r}\cdot(\vec\nabla \vec A) + \frac{\partial A}{\partial t}$

Grassmann identität $\vec\nabla(\vec A\cdot\dot{\vec r}) - (\dot{\vec r}\cdot\vec\nabla)\vec A = \dot{\vec r}\times\underbrace{(\vec\nabla\times\vec A)}_{\vec B}$

$$0 = -q\left(\vec\nabla\Phi + \frac{\partial\vec A}{\partial t}\right) + q\dot{\vec r}\times\vec B - m\ddot{\vec r}$$

$$\rightarrow \boxed{m\ddot{\vec r} = q\vec E + q\dot{\vec r}\times\vec B}$$

2.3.3. Lagrange Gl. mit Reibung

einfaches Beispiel $\vec F_{Reib} = -c\dot{\vec r}$

- man kann kein Potential wie in E 2.3.2 angeben
- Einführung Rayleigh'sche Dissipationsfunktion

$$\boxed{R = \frac{c}{2}\dot{\vec r}^2}$$

$$\Longrightarrow \vec F_{Reib} = -\frac{\partial}{\partial\dot{\vec r}}R$$

- Verrichtete Arbeit $dW = \vec F_{Reib}\cdot d\vec r$

$$= -c\dot{\vec r}\cdot\frac{d\vec r}{dt}dt = -2R\,dt$$

$$\rightarrow R = -\frac{1}{2}\frac{dW}{dt}$$

- Nicht-äquivalente Lagrangefunktion

$$L^* = L e^{ct/m} \xrightarrow[\text{EL Gl.}]{} c\dot{\vec r} + \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}} - \frac{\partial L}{\partial\vec r} = 0$$

$\frac{c}{m}\frac{\partial L}{\partial\dot{\vec r}}$

allgemeiner: Nolting 2, Kap 1.2.4.

E 2.4. Transformationseigenschaften der EL Gl.

E 2.4.1. Vertiefung verallg. Koordinaten

$\vec r_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i\end{pmatrix}$ kart. Koord. für $i = 1..N$

(oder einfach r_i für $i = 1...3N$)

verallg. Koordinaten q_s mit $s = 1...n$

$q_s = q_s(r_1,\dots,r_{3N},t)$ $\quad dq_s = \sum_{i=1}^{3N}\frac{\partial q_s}{\partial r_i}dr_i + \frac{\partial q_s}{\partial t}dt$

- Transformation beschrieben durch Jacobi Matrix (Jacobian) $\underline{J}$ mit Komponenten

$$J_{si} = \frac{\partial q_s}{\partial r_i} = q_{s,i}$$

für zeitunabh. Transf.

$dq_s = \sum J_{si}\,dr_i \qquad dr_i = \sum \frac{\partial r_i}{\partial q_s}dq_s = \sum (J^{-1})\dots$

für zeitunabh. Transf.

$$dq_s = \sum_i J_{si}\, dr_i \qquad dr_i = \sum_s \frac{\partial r_i}{\partial q_s} dq_s = \sum_s \left(\underline{J}^{-1}\right)_{is} dq_s$$

falls Transf. bijektiv (eins-zu-eins) ist:

$$|\underline{J}| = \det\left(\frac{\partial q_s}{\partial r_i}\right) \neq 0 \qquad \text{(Funktionaldeterminante)}$$

- Transformation der Geschwindigkeiten

$$\dot{r}_i = \frac{dr_i}{dt} = \sum_s \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \overset{\dot{q}_s}{\frac{dq_s}{dt}} + \frac{\partial r_i}{\partial t} \longrightarrow \frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_s} = \frac{\partial r_i}{\partial q_s} \quad \oplus$$

$$\boxed{\dot{q}_s = \sum_i \frac{\partial q_s}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt} + \frac{\partial q_s}{\partial t}}$$

verallg. Geschwindigkeiten

- Verallgemeinerte Kraft (Potential $U(q_s) = U(q_s(r_i)) = V(r_i) = V(r_i(q_s))$)

$$K_s = -\frac{\partial U}{\partial q_s} = -\sum_i \underbrace{\frac{\partial V}{\partial r_i}}_{F_i} \frac{\partial r_i}{\partial q_s} = \sum_i F_i \left(\underline{J}^{-1}\right)_{is}$$

- verallg. Impulse

$$\boxed{p_s = \frac{\partial L(q_s, \dot{q}_s)}{\partial \dot{q}_s}}$$

- zyklische Koordinate

$$\frac{\partial L}{\partial q_s} = 0 \quad \Longrightarrow \quad q_s \text{ heißt "zyklisch"}$$

$$\overset{\text{EL Gl}}{\Longrightarrow} \quad 0 = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{p_s = \text{const}}$$

E 2.4.2. EL Gl unter Koordinatentransformationen

Ist EL Gl. forminvariant?

Lagrange funktion

$$L(r_i, \dot{r}_i, t) = L\left(r_i(q_s, t), \frac{\partial r_i}{\partial t} + \sum_s \frac{\partial r_i}{\partial q_s}\dot{q}_s, t\right)$$

$$= L'(q_s, \dot{q}_s, t) \qquad (*)$$

$$\frac{\partial L'}{\partial q_s} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_s} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s}$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_s} = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{\partial \dot{r}_i}{\partial \dot{q}_s} \overset{\oplus}{=} \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{r}_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_s} \qquad (**)$$

Bem $\quad \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial r_i}{\partial q_s} = \dfrac{\partial \dot{r}_i}{\partial q_s}$

EL in q_s

<u>EL in q_s</u>

$$\frac{\partial L'}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L'}{\partial \dot q_s} \overset{(**)}{=} \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_s} + \frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\frac{\partial \dot r_i}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\right]$$

$$= \sum_i \left[\frac{\partial L}{\partial r_i}\frac{\partial r_i}{\partial q_s} + \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\frac{\partial \dot r_i}{\partial q_s}} - \left(\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\right)\frac{\partial r_i}{\partial q_s} - \cancel{\frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\frac{\partial \dot r_i}{\partial q_s}}\right]$$

$$= \sum_i \underbrace{\frac{\partial r_i}{\partial q_s}}_{(\underline{J}^{-1})_{is}} \left(\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r_i}\right) = 0$$

für $|\underline{J}| \neq 0$ folgt $\boxed{\frac{\partial L}{\partial r_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot r_i} = 0}$ $\forall i$

EL Gl. in r_i

$\Longrightarrow$ <u>Deshalb</u> kann man dem Problem angepasste Koordinaten wählen!

- Teilchen im Zentralfeld $V = V(r)$

Kartesische (x, y) $\longleftrightarrow$ polarkoordinaten (r, φ) $\qquad r(x,y)$, $\varphi(x,y)$

$r_i \mathrel{\hat=} \{x, y\}$ $\qquad q_s \mathrel{\hat=} \{r, \varphi\}$

$x = r\cos\varphi$ $\qquad y = r\sin\varphi$

Jacobian $\left(\frac{\partial r_i}{\partial q_s}\right)$ $\qquad \underline{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}$

$$\det \underline{J}^{-1} = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r \neq 0 \quad \forall r \neq 0$$

Lagrangian $\qquad L(r, \dot r, \varphi, \dot\varphi, t) = T(r, \dot r, \varphi, \dot\varphi, t) - V(r)$

$$T'(\dot x, \dot y) = \frac{m}{2}(\dot x^2 + \dot y^2) = \frac{m}{2}\left(\Big(\underbrace{\frac{\partial x}{\partial r}\dot r + \frac{\partial x}{\partial \varphi}\dot\varphi}_{\sum_s (\underline{J}^{-1})_{1s}\dot q_s}\Big)^2 + \Big(\underbrace{\frac{\partial y}{\partial r}\dot r + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\dot\varphi}_{\sum_s (\underline{J}^{-1})_{2s}\dot q_s}\Big)^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left((\dot r\cos\varphi - r\dot\varphi\sin\varphi)^2 + (\dot r\sin\varphi + r\dot\varphi\cos\varphi)^2\right)$$

$$= \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) = T(r, \dot r, \dot\varphi)$$

$$\boxed{L = \frac{m}{2}\left(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2\right) - V(r)}$$

EL- Gl. : $\qquad \frac{\partial L}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_s} = 0$