T 11. Energie- und Impulsbilanz des elektromagnetischen (em) Feldes

(Benutzg. der voll zeitabhängigen MW Gl. (T 7.3))

T 11.1 Wiederholung zu Bilanzgleichungen

- bisher Kontinuitätsgleichung für Erhaltungsgröße

$$\dot{\rho} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j} = 0$$

ρ allg. Dichte — Ladung, Masse

$\vec{j}$ dazugehöriger Strom

- jetzt: allgemeine Dichte $u = \frac{dU}{dV} \longleftrightarrow U = \int_V u\, d^3r$

U allg. extensive Größe — Energie, Entropie, Impuls

$$\rightarrow \boxed{\frac{\partial u}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_u = \nu_u}$$

Bilanzgleichung

u Dichte

$\vec{j}_u$ dazugeh. Strom

ν_u Erzeugungsdichte

für Erhaltungsgröße: Spezialfall $\nu_u = 0$

11.2. Energiebilanz des em Feldes (im Vakuum)

Lit: Nolting 3, Kap 4.1.4

Ges: Bilanzgl. f. Energiedichte w

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{j}_w = \nu_{em}$$

$\vec{j}_w$: Energiestromdichte

ν_{em} Energieerzeugungsdichte der elektromagn. Energie

- Ladg q in Feld: Was ist die vom Feld erbrachte Leistung

$$\frac{\text{Energie}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Kraft}\cdot\text{Weg}}{\text{Zeit}}$$

$$\begin{aligned} \text{Leistg.} &= \vec{F}_{\text{Lorentz}}\cdot\vec{v} \\ &= q(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v} \\ &= q\vec{E}\cdot\vec{v} \qquad \text{(nur E-feld trägt bei)} \end{aligned}$$

mech. Leistg. $\hat{=}$ Negativem der Energieänderung des em Feldes (Energieerhaltung Gesamtenergie)

$$\dot{W}_{em} = -q\vec{E}\cdot\vec{v}$$

$\rightarrow$ pro Volumen

$$\nu_{em} = -\rho\vec{E}\cdot\vec{v} = -\vec{E}\cdot\vec{j}_e$$

wobei $\vec{j}_e = \rho\vec{v}$ elektr. Strom, Ladungsstrom

$$\nu_{em} \overset{MW}{=} \varepsilon_0 \dot{\vec E}\cdot\vec E - \frac{1}{\mu_0}(\vec\nabla\times\vec B)\cdot\vec E$$

$$\underset{PR}{\overset{\text{Kettenr.}}{=}} \frac{\varepsilon_0}{2}\frac{\partial}{\partial t}\vec E^2 - \frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\cdot(\vec B\times\vec E) - \frac{1}{\mu_0}\vec B\cdot\underbrace{(\vec\nabla\times\vec E)}_{-\dot{\vec B}\ (MW)}$$

$$\nu_{em} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec E^2+\frac{1}{2\mu_0}\vec B^2\right) + \frac{1}{\mu_0}\vec\nabla\cdot(\vec E\times\vec B)$$

Vergleich mit Bilanzgl. ergibt

$w = \frac{\varepsilon_0}{2}\vec E^2 + \frac{1}{2\mu_0}\vec B^2$ Energiedichte (siehe vorige Kapitel)

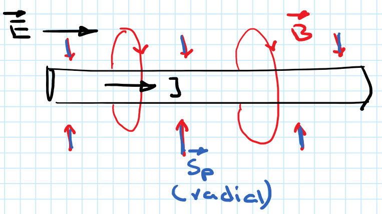
$\vec j_w = \frac{1}{\mu_0}\vec E\times\vec B \equiv \vec S_p$ Energiestromdichte Poynting Vektor

$\nu_{em} = -\vec j_e\cdot\vec E$ Energieerzeugungsdichte

Leiter $\vec j_e = \sigma\vec E \Rightarrow \nu_{em} = -\sigma E^2 = -\frac{j_e^2}{\sigma}$ Joulsche Wärme

10.3. Beispiele für Energiestromdichte

a) stromdurchflossener Leiter (gerade)



$\vec S_p = \frac{1}{\mu_0}(\vec E\times\vec B)$ radial nach innen

$B = \frac{\mu_0 J}{2\pi r_\perp} \rightarrow S_p = \frac{JE}{2\pi r_\perp}$

Energiestrom durch Zylinder um Draht (Länge L)

$2\pi r_\perp L S_p = JEL = JU = \underset{\text{Leistung}}{N}$

d.h. Energie fließt aus em Feld um den Leiter in den Leiter hinein → und wird in Ohmsche Wärme umgesetzt

b) Doppelleitung

11.4. Impulsbilanz des em Feldes

Ges. Bilanzgleichung für Vektordichte $\vec g$ (Impulsdichte) $\quad \frac{\partial\vec g}{\partial t} + \vec\nabla\cdot\vec j_{\vec g} = \vec\nu_{\vec g}$

$\vec j_{\vec g}$ Impulsstromdichte (Tensor $\underline{T}$)

$\vec\nu_{\vec g}$ Impulserzeugungsrate

mech. Impuls $\vec P_{mech} = \int_{-\infty}^{t}\vec F(t')\,dt' \qquad \dot{\vec P}_{mech} = \vec F$

mech. Impuls $\vec{p}_{mech} = \int_{-\infty} (t')\,dt'$ $\quad \dot{\vec{p}}_{mech} = \vec{F}$

Erhaltg. des Gesamtimpulses $\quad \dot{\vec{p}}_{mech} = -\dot{\vec{p}}_{em} = \vec{F}_L$ (Lorentz)

$\longrightarrow$ pro Volumen $\quad \vec{f}_{Lorentz}$ Lorentzkraftdichte

$= -\dot{\vec{g}}_{em}$

$$-\vec{f}_{Lorentz} = -\left(\rho\vec{E} + \vec{j}_e \times \vec{B}\right) \qquad \text{T S.1.}$$

$$\overset{MW}{=} -\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - \underbrace{\frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}} + \underbrace{\varepsilon_0\dot{\vec{E}}\times\vec{B}} \qquad (*)$$

$$\underbrace{\dot{\vec{E}}\times\vec{B}} \overset{PR}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) - \vec{E}\times\dot{\vec{B}} \overset{MW}{=} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})$$

$$\underset{\text{Grassm.}}{\overset{MW}{=}} \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \vec{\nabla}(\overset{\downarrow}{\vec{E}}\cdot\vec{E}) - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\overset{\downarrow}{\vec{E}}$$

"$\downarrow$" Nabla wirkt nur auf dieses Feld

$$= \frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B}) + \vec{\nabla}\left(\frac{\vec{E}^2}{2}\right) - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E} \qquad (1)$$

$$\underbrace{(\vec{\nabla}\times\vec{B})\times\vec{B}} = -\vec{\nabla}\left(\frac{\vec{B}^2}{2}\right) + (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} \qquad (2)$$

(1), (2) in $(*)$

$$-f_L = -\varepsilon_0 \vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) + \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\frac{\vec{B}^2}{2} - \frac{1}{\mu_0}(\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$+ \varepsilon_0\vec{\nabla}\frac{\vec{E}^2}{2} - \varepsilon_0(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}$$

$$= \varepsilon_0\left[\vec{\nabla}\frac{E^2}{2} - \vec{E}(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}) - (\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}\right] + \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{E}\times\vec{B})$$

$$+ \frac{1}{\mu_0}\left[\vec{\nabla}\frac{B^2}{2} - \underbrace{\vec{B}(\vec{\nabla}\cdot\vec{B})}_{\substack{\text{Null addiert}\\ \text{(MW)}}} - (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}\right]$$

i.A. $\quad \vec{\nabla}\cdot(\vec{a}\vec{a}) = \vec{a}(\vec{\nabla}\cdot\vec{a}) + (\vec{a}\cdot\vec{\nabla})\vec{a}$

$$\Longrightarrow \underbrace{-f_L}_{\dot{g}} = \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\vec{E}\times\vec{B})}_{\vec{g} = \varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B})} + \vec{\nabla}\cdot\underbrace{\left[\varepsilon_0\frac{E^2}{2}\underline{\underline{I}} + \frac{1}{\mu_0}\frac{B^2}{2}\underline{\underline{I}} - \varepsilon_0\vec{E}\vec{E} - \frac{1}{\mu_0}\vec{B}\vec{B}\right]}_{\underline{T} \,\hat{=}\, \vec{j}_{\vec{g}}}$$

Impulsstromdichte

Maxwellscher Spannungstensor

$$\underline{T} = \varepsilon_0\left(\frac{E^2}{2}\underline{\underline{I}} - \vec{E}\vec{E}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{B^2}{2}\underline{\underline{I}} - \vec{B}\vec{B}\right)$$

Interpretation von $\vec{g} = \varepsilon_0(\vec{E}\times\vec{B}) = \varepsilon_0\mu_0\vec{S}_p$

$$\Longrightarrow \frac{1}{}\vec{S}_{} = \vec{g}$$

$$\text{Impulsdichte} \;\hat{=}\; \frac{\text{Energiestromdichte}}{\text{Geschw.}^2}$$

→ Anwendungen : Strahlungsdruck
Energie- / Impulstransport em Wellen

$\Longrightarrow$ Physik 3