

8. Elektrostatik

8.1. Grundgleichungen - Poisson, Laplace Gl.

- ruhende Ladungen $\rho = \rho(\vec{r})$
 $\vec{j} = 0$
 $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$ $\vec{B} = \vec{B}(\vec{r})$
- Maxwell Gl. (vgl. Kap 7.3) werden vereinfacht
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ $\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$
 $\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \vec{B} = 0$

Bem: für zeitunabhängige Systeme entkoppeln die MW Gl. für \vec{E} und \vec{B}

- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi$ da $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \phi = 0$ immer gilt
- Elektrisches Potential

$$\phi(\vec{r}) = \phi(\vec{r}_0) - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$
wegunabhängig

• in Maxwell

$$\boxed{-\epsilon_0 \Delta \phi(\vec{r}) = \rho(\vec{r})} \quad \text{Poisson Gl. (*)}$$

für $\rho(\vec{r}) = 0 \Rightarrow \Delta \phi(\vec{r}) = 0$ Laplace Gl.

Bem: Lsg. des Poisson Gl. ist Grundproblem der Elektrostatik

8.2. Kugelsymmetrische Ladungsverteilung

- $\rho = \rho(r) \rightarrow \phi = \phi(r)$
- \rightarrow Äquipotentialflächen sind Kugeloberflächen (d.h. Flächen mit $\phi = \text{const}$)
- $\rightarrow \vec{E}$ radial, d.h. $\vec{E} \parallel \vec{e}_r$ ($\vec{E} = E(r) \frac{\vec{r}}{r}$)

$$\vec{E} = -\nabla \phi(r) \stackrel{\text{Kugel Koord.}}{=} -\frac{\partial \phi}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r} \quad \text{damit } E(r) = \phi'(r)$$

MW Gl

$$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \xrightarrow{\text{Integr. Gaußsches Satz}} \epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = Q$$

elektr. Fluss Φ durch A

Kugelflächen

$$2\pi r$$

$$\epsilon_0 \oint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} = \epsilon_0 \int_0^r \int_0^{2\pi} E(r) \frac{\vec{r}}{r} \cdot \underbrace{r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}_{dA \text{ in Kugelkoordin.}} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$= \epsilon_0 4\pi r^2 E(r)$$

mit $Q(r)$, die Ladung die von Kugel des Radius r eingeschlossen wird

$$\rightarrow \epsilon_0 4\pi r^2 E(r) = Q$$

d.h. $E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0 4\pi r^2}$ fällt ab mit $\sim \frac{1}{r^2}$

■ Punktladung bei $r=0$: $Q(r) = q$

$$E(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

→ Lorentz-Kraft $\vec{F} = q_2 \vec{E}_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r}$
 Ladg 2 im elektr. Feld der Ladg 1 bei $r=0$
 hier $K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ (Coulomb-Konstante)

Potential einer Punktladung

(Referenzpotential $\varphi(\infty) = 0$)
 d.h. Annahme einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung.

$$\varphi(r) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_{\infty}^r E(r) dr = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$$

↑
radialer Integrationsweg

8.3. Feld einer beliebigen Ladungsverteilung

• Punktladg bei \vec{r}_0 : $\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|}$

• mehrere Pkt.ladg. $\varphi(\vec{r}) = \sum_{k=1}^N \frac{q_k}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_k|}$
 (Superposition da Grundgleichungen linear)

• Kontin. Verteilg. $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$

• zurück zur Pkt.ladg. $\rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

Poisson Gl. (*) $-\epsilon_0 \Delta \varphi(\vec{r}) = \rho(\vec{r}) = q \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \xrightarrow{\text{so}} \varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|}$

• für $q=1$ gibt es die Greensche Funktion der Poisson Gl. (S. T 6.3.3)

d.h.

$$-\epsilon_0 \Delta g(\vec{r}, \vec{r}_0) = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \Rightarrow g(\vec{r}, \vec{r}_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_0|}$$

Bem: $g(\vec{r}, \vec{r}_0) = g(|\vec{r} - \vec{r}_0|)$
 $\hat{=}$ Homogenität und Isotropie des Raumes

hier $\Delta \hat{=} \Delta_{\vec{r}}$ Laplace bzgl. \vec{r} (nicht bzgl. \vec{r}_0)

hier $\Delta \equiv \Delta_{\vec{r}}$ Laplace bzgl. \vec{r} (nicht bzgl. \vec{r}_0)

$\vec{r}_0 \rightarrow \vec{r}$; multipliziere Gl. mit $S(\vec{r}')$; integriere über \vec{r}' (dV')

$$-\epsilon_0 \int (\Delta_{\vec{r}} g(\vec{r}, \vec{r}')) S(\vec{r}') d\vec{r}' = \int S(\vec{r} - \vec{r}') S(\vec{r}') d\vec{r}'$$

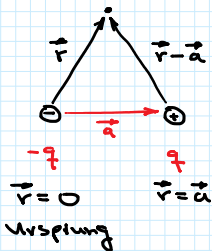
$$-\epsilon_0 \Delta_{\vec{r}} \left[\int g(\vec{r}, \vec{r}') S(\vec{r}') dV' \right] = S(\vec{r})$$

$\Delta_{\vec{r}}$ operiert nicht auf gestrichelten Größen

Vergleiche mit Poisson Gl. (*)

$$\varphi(\vec{r}) = \int g(\vec{r}, \vec{r}') S(\vec{r}') d\vec{r}'$$

8.4. Feld eines Dipols



Dipolmoment
 $\vec{p} = q\vec{a}$

Superposition

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{1}{|\vec{r} - \vec{a}|} \right)$$

Fernfeld ($r \gg a$), Entwicklung in \vec{a} (Taylorentw.)

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \vec{a} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right) + O(a^2) \right)$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{a} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3}$$

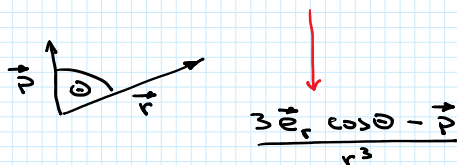
$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{\nabla} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \underbrace{\vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r})}_{\vec{p} \text{ const.}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

$$\vec{\nabla} \vec{\nabla} \frac{1}{r} = \frac{3\vec{r}\vec{r} - r^2\mathbf{I}}{r^5}$$

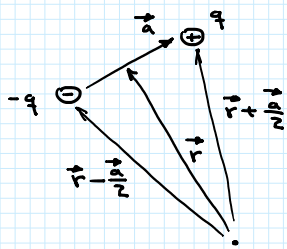
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3\vec{r}(\vec{p} \cdot \vec{r}) - r^2\vec{p}}{r^5}$$

fällt ab mit $\sim 1/r^3$

(vgl. Punktldg.) $\sim 1/r^2$



8.5. Kraftwirkungen auf elektr. Dipol



Kraft auf Dipol in einem externen elektr. Feld \vec{E}

Lorenzkraft

$$\vec{F} = q \vec{E} \left(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \right) - q \vec{E} \left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right)$$

\vec{E} sei $a \ll r$ (Dipol sei klein gegenüber der typischen Länge für Änderung des \vec{E} feldes)

Taylorw

$$\vec{F} = q \left(\vec{E}(\vec{r}) + \frac{\vec{a}}{2} \cdot \nabla \vec{E} - \vec{E}(\vec{r}) + \frac{\vec{a}}{2} \cdot \nabla \vec{E} + O(a^3) \right)$$

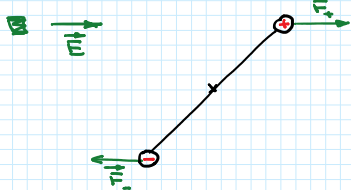
$$\vec{F} = q \vec{a} \cdot \nabla \vec{E} = \vec{p} \cdot \nabla \vec{E}$$

Terme $O(a^2)$ sind Null

Kraft auf Schwerpunkt des Gesamtdipoles

→ im homogenen Feld keine Kraft

Gibt es ein Drehmoment?



$$\vec{M} = \frac{q}{2} \vec{a} \times \vec{F}_+ - \frac{q}{2} \vec{a} \times \vec{F}_-$$

$$= \frac{q}{2} \left[\vec{a} \times \vec{E} \left(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2} \right) + \vec{a} \times \vec{E} \left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2} \right) \right]$$

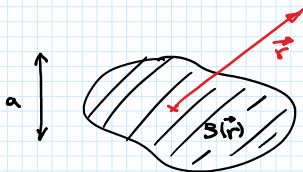
$$\stackrel{\text{Taylor}}{=} q \left(\vec{a} \times \vec{E}(\vec{r}) \right) + O(a^3)$$

Terme in $O(a^2) = 0$

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}(\vec{r})$$

Bem: In homogenen \vec{E} -feldern richten sich Dipole aus aber bewegen ihren Schwerpunkt nicht

T. 8.6. Fernfeld einer räumlich begrenzten Ladungsverteilung - Multipolentwicklung



Fernfeld $r \gg a$

a typ. Länge der Ausdehnung der Verteilung

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\vec{r}'$$

(vgl. T 8.3.)

↑
Volumen der Ladungsverteilung

$r \gg a$ heißt $r \gg r' \forall r' \rightarrow$ Taylorw. in r'

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\vec{r}' \cdot \nabla_{\vec{r}} \right)^n \frac{1}{r}$$

$$= \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \nabla_{\vec{r}} \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\vec{r}' \cdot \nabla_{\vec{r}})^2 \left(\frac{1}{r} \right) + O(r^{-3})$$

$$= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \cdot \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + O(r^{-3})$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}' + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{r}' + \dots \right]$$

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\underbrace{\frac{1}{r} \int \rho(\vec{r}') d\vec{r}'}_{\substack{Q \text{ Ladg.} \\ \sim 1/r}} + \underbrace{\frac{\vec{r}}{r^3} \cdot \int \rho(\vec{r}') \vec{r}' d\vec{r}'}_{\substack{\vec{P} \text{ Dipol-} \\ \text{moment} \\ \sim 1/r^2}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\vec{r}\vec{r}}{r^5} \cdot \int \rho(\vec{r}') [3\vec{r}'\vec{r}' - r'^2 \underline{\underline{I}}] d\vec{r}'}_{\substack{\underline{\underline{D}} \\ \text{Quadrupolmoment (Tensor)} \\ \sim 1/r^3}} + O(r'^3) \right]$$

Bem :- " : " doppeltes inneres Produkt (Summation über 2 Indizes)

$$\underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij}$$

- $Q, \vec{P}, \underline{\underline{D}}$ Eigenschaften der Ladungsverteilung

$$\varphi(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{P}}{r^3} + \frac{1}{2} \frac{1}{r^5} \vec{r} \cdot \underline{\underline{D}} \cdot \vec{r} \right)$$

- Quadrupolterm in Indexschreibweise

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{x_i x_j}{r^5} \underbrace{\int \rho(\vec{r}') [3x'_i x'_j - r'^2 \delta_{ij}] d^3x'}_{\underline{\underline{D}}_{ij}}$$

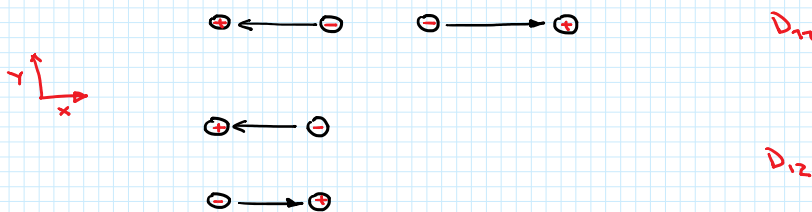
- Eigenschaften Quadrupolmoments

$$\underline{\underline{D}} \text{ symmetrisch, d.h. } D_{ij} = D_{ji}$$

$$\text{Sp } \underline{\underline{D}} = 0, \text{ d.h. } \sum_i D_{ii} = 0$$

↳ i.A. 5 unabhängige Komponenten (3d)

- Einfache Modelle f. Quadrupole (in 2d)
($Q=0, \vec{P}=0$)



T 8.7. Elektrostatistische Feldenergie

Gesucht: Energie, die notwendig ist, um eine vorgegebene Ladungsverteilung aufzubauen, d.h. die Ladungen von ∞ zu vorgeg. Ort zu bringen

T 8.7.1. Systeme aus Punktladungen

- Arbeit, um Ladg. q_i nach \vec{r}_i zu bringen in Gegenwart von $q_1(\vec{r}_1)$ bis $q_{i-1}(\vec{r}_{i-1})$

$$W_i = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{s} = -q_i \int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_i \int_C (\vec{\nabla} \varphi) \cdot d\vec{r} = q_i (\varphi(\vec{r}_i) - \varphi(\infty))$$

belibige
Kurve

$$= \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0} \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

- Gesamte Arbeit $W = \sum_{i=2}^N W_i = \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^{i-1} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

T 8.7.2. Kontinuierliche Ladungsverteilung -

mit $q_i = \rho(\vec{r}_i) \Delta V_i$ und Übergang zum Integral

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int d^3r \int d^3r' \frac{\rho(\vec{r}) \rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (*)$$

andere Formen

- mit (Kap. T 8.3) $\varphi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{4\pi\epsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$

$\xrightarrow{\text{in } (*)}$ $W = \frac{1}{2} \int d^3r \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) \stackrel{MW}{=} \frac{1}{2} \epsilon_0 \int d^3r \rho(\vec{r}) \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$

$\epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$

$\stackrel{\text{part. Int.}}{=} \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r \left(\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) - \underbrace{(\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{E}}_{-\vec{E}} \right)$

1. Term mit Gaußschem Satz $\rightarrow \oint \vec{E} \varphi \cdot d\vec{A}$

\rightarrow in großer Entfernung von der Ladungsverteilung

$$E \sim \frac{1}{r^2}, \quad \varphi \sim \frac{1}{r}$$

Oberfläche $\sim r^2$, d.h. Beitrag dieses Integrals $\sim \frac{1}{r}$

und geht gegen Null für $r \rightarrow \infty$

\rightarrow d.h. Energie einer begrenzten Ladungsverteilung

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3r |\vec{E}(\vec{r})|^2 = \int w(\vec{r}) d^3r \quad (**)$$

mit der Energiedichte des elektr. Feldes

$$w(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} |\vec{E}(\vec{r})|^2$$

- offensichtlich ist $W \geq 0$ nach (**), dagegen kann für Punktladungen W aus T 8.7.1 sowohl positiv als auch negativ sein \rightarrow ???

- mit $S(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N q_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ in (*) ergibt sich

$$W = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \sum_{i,j=1}^N \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

- Term mit $i=j$ ist nicht ausgenommen, dort wird Nenner Null
- unendlicher Beitrag der "Selbstenergie" der Punktladungen

* Energie die aufgewandt wird um eine Punktladung aus einer ∞ -dünnen Ladungswolke zusammenzuziehen

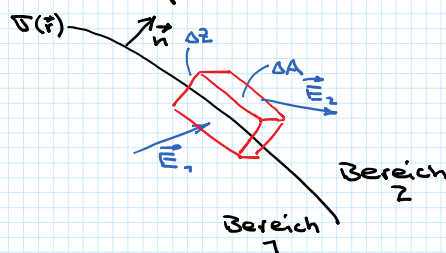
- Selbstenergie muss beim Übergang zu Punktladungen weggelassen werden

[Problem der klass. E-dynamik das in der Quantenelektrodynamik gelöst wird]

T 8.8 Randbedingungen

T 8.8.1. Anschlussbedingungen für das elektrische Feld

- Normalkomponente



$\sigma(\vec{r})$ Flächenladung

"Gaußsches Kästchen"
Quader mit Grundfläche ΔA
und Höhe Δz

→ $\Delta V = \Delta A \Delta z$
mit Ladungsdichte $S(\vec{r})$

Maxwell Gl.

$$\int_{\Delta V} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3r = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Delta V} S(\vec{r}) d^3r \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon_0} \sigma \Delta A$$

Gauss

$$\text{mit } \sigma = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} S(\vec{r}) \Delta z$$

$$\oint_{A(\Delta V)} \vec{E} \cdot d\vec{A} \xrightarrow{\Delta z \rightarrow 0} (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} \Delta A$$

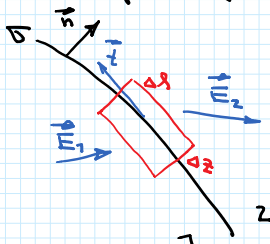
A(ΔV)
Ausseifläche
des Vol.

Damit ergibt sich die Anschlussbedingung

$$(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Die Normalkomponente von \vec{E} macht Sprung $\sim \sigma$ (Flächenladungsdichte)

- Tangentialkomponente



"Stokesche Fläche"
Rechteck mit Seiten $\Delta l, \Delta z$
Fläche $\Delta A = \Delta l \Delta z$

Δl sei parallel zu \vec{t} (Tangensvektor)

→ betrachten Grenzfall $\Delta z \rightarrow 0$

MW Gl + Stokeschen Satz

$$0 = \int_{\Delta A} (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} \stackrel{\Delta z \rightarrow 0}{=} \oint_{S(\Delta A)} \vec{E} \cdot d\vec{s} \rightarrow (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} \Delta l$$

$S(\Delta A)$
 Grenzlinie
 der Fläche ΔA

→ Anschlussbedingung $(\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \cdot \vec{t} = 0$

Tangentialkomponente des \vec{E} -feldes ist stetig

T 8.8.2. Leiter im elektrostatischen Feld

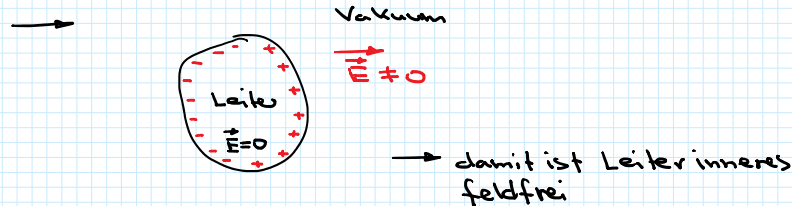
- bisher: fixierte Ladungen im Vakuum
- jetzt: \sim + Leiter, die nicht stromdurchflossen sind, d.h. $\vec{j} = \vec{0}$
- Leiter: e^- frei beweglich $\rightarrow \vec{j} \sim \vec{E}$
- kein Ströme $\vec{j} = 0 \Rightarrow \vec{E} = 0$ im Leiter
- damit Potential im Leiter $\phi = \text{const.}$ und $\mathcal{B} = 0$ im Leiter
→ Leiteroberfläche ist Äquipotentialfläche
- $\nabla \cdot \mathcal{B} \neq 0$ an Leiteroberfläche möglich
→ Flächenladung σ

- T 8.8.1. - Tangentialkomp. \vec{E} kontinuierlich
→ $\vec{t} \cdot \vec{E} = 0$ an Grenzfläche
 $\vec{E} \perp$ Grenzfläche (außerhalb des Leiters)
 $\vec{E} = E_n \vec{n}$

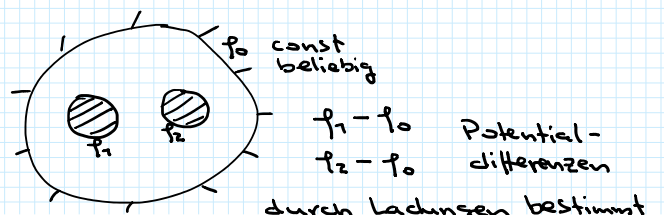
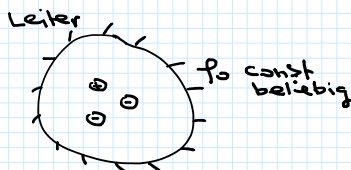
- Normalkomponente

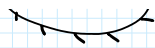
$$E_n = \vec{n} \cdot \vec{E} = -\vec{n} \cdot \vec{\nabla} \phi = -\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

- falls $E_n \neq 0$ außerhalb des Leiters
→ Flächenladungsdichte $\sigma = \epsilon_0 E_n$ an Leiteroberfläche (influenziert durch das äußere Feld)



- Geometrien





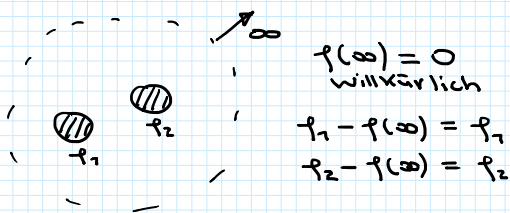
Leiter



$\phi_1 - \phi_0$ Potential-
 $\phi_2 - \phi_0$ differenzen
durch Ladungen bestimmt

Spannungen $U_1 = \phi_1 - \phi_0$
 $U_2 = \phi_2 - \phi_0$

speziell:



- Elektrostatistische Energie einer Leiteranordnung im Volumen $S=0$, nur Oberflächenbdg. ϕ const auf Leiter

$$W = \frac{1}{2} \int_V d^3r \rho \phi = \frac{1}{2} \int_A \sigma \phi dA = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i \int_{A_i} \sigma dA = \frac{1}{2} \sum_i \phi_i Q_i \quad (*)$$

↑
Summe über Leiter

Q_i
Gesamt ladv. auf Leiter i

$$\left[\begin{array}{l} \text{speziell 2 Leiter } Q_1 = -Q_2 = Q \\ W = \frac{1}{2} Q (\phi_1 - \phi_2) = \frac{QU}{2} = \frac{CU^2}{2} \\ C = \frac{Q}{U} \text{ Kapazität} \end{array} \right]$$

$$Q_i = \sum_k C_{ik} \phi_k \quad \rightarrow \quad \phi_i = \sum_k \tilde{C}_{ik} Q_k$$

$$(*) \Rightarrow W = \frac{1}{2} \sum_{i,k} \phi_i C_{ik} \phi_k = \frac{1}{2} \sum_{i,k} Q_i \tilde{C}_{ik} Q_k$$

$$\text{da } W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d^3r \geq 0 \quad \rightarrow \quad \text{positiv definite } C_{ik}, \tilde{C}_{ik}$$

C_{ik}, \tilde{C}_{ik} sind auch symm.

8.9. Randwertprobleme der Elektrostatik

Grundaufgabe: Gegeben sei Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$ in einem Raumbereich V und Randbedingungen auf dem Rand von V . Gesucht ist das Potential $\phi(\vec{r})$ und damit das elektr. Feld $\vec{E}(\vec{r})$ in V .

Löse $\Delta\phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ mit typischen Randbedingungen (RB) (*)

Leiteroberfläche: $\phi = \text{const}$
geladene Fläche $E_z^{(n)} - E_z^{(i)} = -\frac{\partial\phi}{\partial n} + \frac{\partial\phi}{\partial n} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

Mathematische Klassifikation

$\phi(\vec{r})$ auf $A(V)$ [Randfläche A des Volumens V] : Dirichlet RB

$\frac{\partial\phi}{\partial n} = -\vec{n} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ auf $A(V)$ gegeben : Neumann RB

gemischte RB möglich

Eindeutigkeit der Lösung bei gegebenem $S(\vec{r}) + RB$
 → Nolting 3, Kap 2.3.2.

8.3.2. Integralgleichung für das Potential

benutze 2. Greensche Identität (T 6.3.4) für
 $\Phi \rightarrow \varphi(\vec{r})$ und $\Psi \rightarrow \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \sim G(\vec{r}, \vec{r}')$

$$\int_V \left[\varphi(\vec{r}') \underbrace{\Delta_{r'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{-4\pi S(\vec{r}-\vec{r}')} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \underbrace{\Delta_{r'} \varphi(\vec{r}')}_{\textcircled{\ast} \rightarrow -\frac{S(\vec{r}')}{\epsilon_0}} \right] d^3r' =$$

$$= \oint_A \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} \right] dA'$$

$$\frac{\partial}{\partial n} = \vec{n} \cdot \vec{\nabla}$$

$$\Rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{S(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r' + \frac{1}{4\pi} \oint_A \left[\varphi(\vec{r}') \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \frac{\partial \varphi(\vec{r}')}{\partial n'} \right] dA'$$

Umformulierung in Form einer Integralgleichung

$\varphi(\vec{r})$ ist durch Quellen in V und RB eindeutig bestimmt

Falls V der ganze Raum ist und $S(\vec{r})$ räumlich begrenzt ist, dann verschwinden die Oberflächenintegrale da

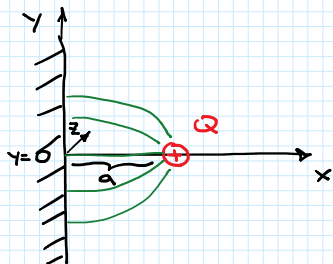
$$\varphi \sim \frac{1}{r} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} \sim \frac{1}{r^2} \quad \rightarrow [\dots] \sim \frac{1}{r^3} \quad dA \sim r^2$$

$$\rightarrow \text{Gesamtintegral} \int dA \sim \frac{1}{r}$$

Anwendung der Integralgleichung → siehe Nolting 3, Kap 2.3.3.
 (mit Anwendung der Greenschen Funktion)

8.3.2. Spiegelladungsmethode am Beispiel - Punktladung vor leitenden Ebene

(Nolting 3, Kap 2.3.4)



Poisson Gl.

$$-\epsilon_0 \Delta \varphi = Q \delta(\vec{r} - a\vec{e}_x)$$

für $x \geq 0$

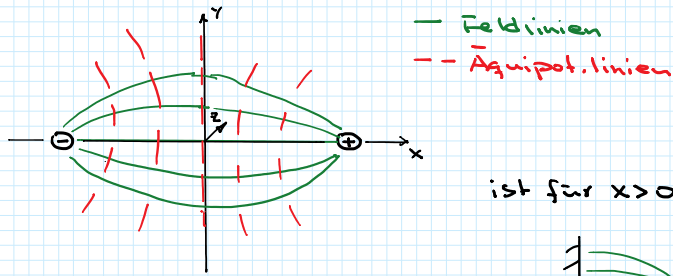
$$RB: \varphi(x=0, y, z) = 0$$

Allgemeine Regel der Elektrostatik

E-feld steht überall senkrecht auf Äquipotentialflächen $\varphi = \text{const}$

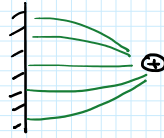
d.h. Äquipotentialflächen können mit Leiter belegt werden ohne dass das elektr. Feld sich ändert **und umgekehrt**

Leiter können ersetzt werden durch entsprechende Situation ohne Leiter (normalerweise Anordnung von Punktladungen)

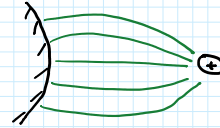


— Feldlinien
 - - Äquipot.linien

ist für $x > 0$ äquiv. zu



oder auch



hier wird die Ebene "ersetzt" durch Ladg $-Q$ bei $x = -a$ ($z, y = 0$)

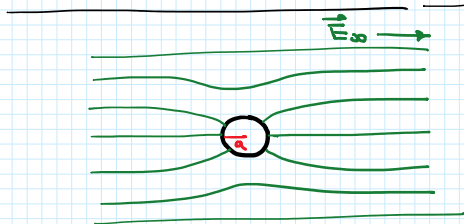
$$\rightarrow \varphi(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\vec{r} - a\vec{e}_x|} - \frac{1}{|\vec{r} + a\vec{e}_x|} \right)$$

$$\rightarrow \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \rightarrow E_n = \vec{n} \cdot \vec{E} \rightarrow \sigma = \epsilon_0 E_n$$

\rightarrow Kraft durch σ auf Q ausgeübt (Bildkraft)

- Superpositionsprinzip \rightarrow Erweiterung auf beliebig viele Ladungen

8.9.3. Beispiel: Kugelförmiger Leiter in asymptotisch homogenen Feld



ladungsfrei $\Delta\varphi = 0$ $r > a$

$$\text{RB: } \vec{E} = \vec{E}_0 \quad r \rightarrow \infty$$

$$\varphi = \varphi_0 = 0 \quad r = a$$

$$r \rightarrow \infty \quad \vec{E}_0 = -\vec{\nabla}\varphi_0$$

$$\rightarrow \varphi_0 = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r}$$

Erwartung: $\varphi = \varphi(\vec{E}_0, a, \vec{r})$

Produktansatz: $\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} g(r, a)$

$$\text{RB: } r \rightarrow \infty \quad g \rightarrow 1$$

$$r = a \quad g = 0$$

$$\text{in Laplace Gl. } \Delta\varphi = -\Delta[\vec{E}_0 \cdot \vec{r} g(r, a)] = 0$$

$$\rightarrow \text{Kugelkoordinaten } \vec{E}_0 \cdot \vec{r} = r E_0 \sin\theta \cos\phi$$

θ, ϕ Winkel des Kugelkoord.

Laplace in Kugelkoordinaten
 Separation der Abhängigkeiten

$$\rightarrow 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial r}$$

$$\text{Potenzansatz } g \sim \frac{1}{r^n} \quad \text{gibt } [n(n+1) - 4n] \frac{1}{r^{n+2}} = 0$$

$$\rightarrow n(n+1) - 4n = 0 \rightarrow n=0 \rightarrow g \sim 1$$

$$n(n-1) = 0 \rightarrow n=3 \rightarrow q \sim \frac{1}{r^3}$$

$$\rightarrow \text{Superposition} \quad q = C_1 + \frac{C_2}{r^3}$$

$$\begin{aligned} \text{RB für } q: \quad q(\infty) = 1 &\rightarrow C_1 = 1 \\ q(a) = 0 &\rightarrow 1 + \frac{C_2}{a^3} = 0 \\ C_2 &= -a^3 \end{aligned}$$

$$\rightarrow q = 1 - \frac{a^3}{r^3}$$

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \quad \text{Vergleich mit Multipolentw. Kap 7.6}$$

$$\varphi = -\vec{E}_0 \cdot \vec{r} + \frac{\vec{p} \cdot \vec{a}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad \text{mit } \vec{p} = 4\pi\epsilon_0 \vec{E}_0 a^3 \text{ Dipolmoment}$$

d.h. äußere Feld \vec{E}_0 induziert Dipol in der leitenden Kugel
(keine induzierte Gesamtladung, keine höheren Momente)

8.9.4. Mgl. weiteres Selbststudium (Nalg. 3, Kap 2.3.4. - 2.3.8)

- Bildladungsmethode f. Ladg. über Metallkugel
- Kugelflächenfunktionen, Legendre Polynome (Lsg. der Laplace Gl.)
- sphärische Multipolmomente

Für Fortgeschrittene: andere Lösungsmethoden

- mit Funktionentheorie in komplexer Ebene (Greiner Kap. IV)
- mit konformen Abbildungen (Skripte im Internet)