Ausgewählte Mathematische Hilfsmittel

Formelsammlung zu Physik I

Uwe Thiele

Institut für Theoretische Physik
Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Version vom 5. April 2015

Inhaltsverzeichnis

Dies ist eine Zusammenstellung einiger mathematischer Hilfsmittel, wie sie in Physik I eingeführt worden sind. Sie ist als Merkhilfe gedacht und kann das regelmäßige Konsultieren von Formelsammlungen wie [Bronstein] oder [Gradstein] nicht ersetzen. Auch haben die meisten Lehrbücher der theoretischen Physik ausführliche Einführungen zu mathematischen Hilfsmitteln, die auf jeden Fall konsultiert werden sollten, um die jeweils verwendeten Konventionen und Notationen zu verstehen.

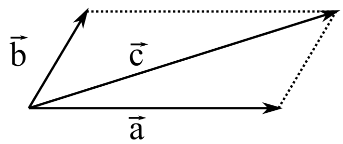
1 Grundlagen der Vektoralgebra

1.1 Vektoren und ihre Produkte

Vektor $\vec{a}$ ist geometrisch bestimmt durch Richtung und Betrag ($a = |\vec{a}|$).

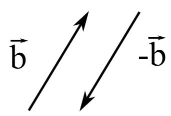
Einheitsvektor $\vec{e}, \hat{e}$ mit $|\vec{e}| = 1 \rightarrow \; \vec{e}_a = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ hat Betrag $\dfrac{|\vec{a}|}{|\vec{a}|} = 1$.

Addition von Vektoren



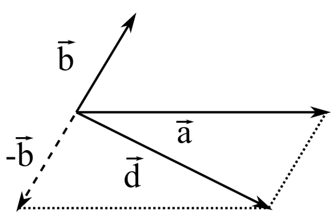
$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} = \vec{c}$

Nullvektor, inverser Vektor



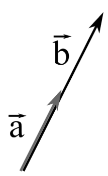
$\vec{b} + (-\vec{b}) = \vec{0}$

Subtraktion von Vektoren



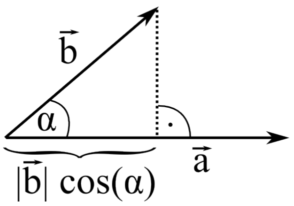
$\vec{a} + (-\vec{b}) = \vec{a} - \vec{b} = \vec{d}$

Skalare Multiplikation



$\vec{b} = \lambda\vec{a}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda = \dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

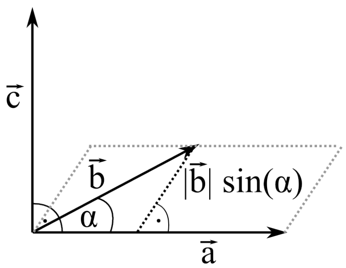
Skalarprodukt (inneres Produkt)



$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b}) &= \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\\ &= |\vec{a}||\vec{b}|\cos(\alpha)\end{aligned}$$

→ Kosinussatz $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\alpha)$ für Projektionen

Vektorprodukt (Kreuzprodukt)



$$\begin{aligned}\vec{a}\times\vec{b} &= -\vec{b}\times\vec{a} = \vec{c}\\ \vec{c} &\perp \vec{a},\vec{b}\end{aligned}$$

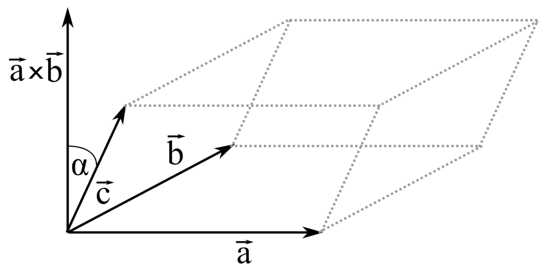
→ Rechte-Hand-Regel ($\vec{a} \mathrel{\widehat{=}}$ Daumen)

→ Parallelogrammfläche $|\vec{c}| = |\vec{a}||\vec{b}|\sin(\alpha)$

→ Berechnung des Drehmoments

(manchmal auch $\vec{a}\wedge\vec{b}$ oder anderes → careful)

Spatprodukt (gemischtes Produkt – zyklisch vertauschbar)



$$\begin{aligned}(\vec{a},\vec{b},\vec{c}) &= (\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c} = (\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a} = (\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}\\ &= |\vec{a}\times\vec{b}||\vec{c}|\cos(\alpha)\end{aligned}$$

→ Volumen des von $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ aufgespannten Parallelepipeds (Grundfläche · Höhe)

Tensorprodukt

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\otimes\vec{b} \neq \vec{b}\otimes\vec{a}$$

→ ergibt aus zwei Vektoren einen Tensor 2. Stufe (siehe später)

1.2 Einige Identitäten

Graßmann Identität	$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ Beweis: Komponentenweise $\rightarrow$ siehe später
Lagrange Identität	$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c})$ Beweis: Graßmann und Definition des Spatprodukts
Zerlegung von $\vec{a}$ in Komponenten parallel und senkrecht zu $\vec{e}$	$\vec{a} = (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e} - \vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{a})$ wobei $\vec{a}_{\parallel} = (\vec{a} \cdot \vec{e})\vec{e}$ und $\vec{a}_{\perp} = -\vec{e} \times (\vec{e} \times \vec{a})$ (oder auch $\vec{a}_{\perp} = \vec{a} - \vec{a}_{\parallel} = (\mathbb{1} - \vec{e}\vec{e}) \cdot \vec{a}$) Beweis: Graßmann

2 Koordinatensysteme

2.1 Orthonormierte Basis

Lineare Unabhängigkeit und Basis

N Vektoren $\vec{a}_i$ sind linear unabhängig, wenn $\sum_{i=1}^{N} \lambda_i \vec{a}_i = 0$ nur die Lösung $\lambda_i = 0 \;\; \forall \; \lambda_i$ hat. Die Menge $\{\vec{a}_i\}$ ist vollständig, falls es keinen weiteren linear unabhängigen Vektor gibt. Dann ist $\{\vec{a}_i\}$ eine Basis.

Komponentendarstellung

Es sei $\{\vec{e}_i\}$ eine Basis aus Einheitsvektoren. Dann ist jeder Vektor als

$$\vec{a} = \sum_{i=1}^{N} a_i \vec{e}_i \quad \overset{3d \rightarrow N=3}{=} \quad \sum_{i=1}^{3} a_i \vec{e}_i = a_1 \vec{e}_1 + a_2 \vec{e}_2 + a_3 \vec{e}_3$$

darstellbar. a_i sind Komponenten. Kurz: $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ und $\vec{a}^{\mathrm{T}} = (a_1, a_2, a_3)$.
$\rightarrow$ Komponentendarstellung ist basisabhängig!

Orthonormierte Basis

$$\text{Kronecker Delta:} \;\; \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$\text{Betrag:} \qquad |\vec{e}_i| = 1$$

$$\rightarrow \quad \vec{a} \cdot \vec{e}_j = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i \right) \cdot \vec{e}_j = \sum_i a_i \delta_{ij} = a_j$$

! nicht orthonormale Basen möglich.
Beschreibung von Mustern, Gittern, ...

Zerlegung von $\vec{a}$ in Komponenten bezüglich einer Basis $\{\vec{e}_i\}$ ist eindeutig.
Beweis: Annahme, es gibt zwei Zerlegungen

$$\vec{a} = \sum_i a_i \vec{e}_i \qquad\qquad \vec{a} = \sum_i \tilde{a}_i \vec{e}_i$$

dann

$$\vec{a} - \vec{a} = \sum_i (a_i - \tilde{a}_i)\vec{e}_i = 0.$$

Da $\{\vec{e}_i\}$ linear unabhängig ist, muss $a_i - \tilde{a}_i = 0$ sein.

2.2 Komponentendarstellung der Produkte

(allg. orthonormale Basen)

Skalarprodukt

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(\sum_i a_i \vec{e}_i\right) \cdot \left(\sum_j b_j \vec{e}_j\right) = \sum_i a_i b_i$$

$$\text{nutze } \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$$

Vektorprodukt

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} \\ &= \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} a_i b_j \vec{e}_k \\ \varepsilon_{ijk} &= \begin{cases} +1 & ijk = 123 \text{ oder zyklische Vertauschung} \\ -1 & ijk = 213 \text{ oder zyklische Vertauschung} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

Epsilon-Tensor oder Levi-Civita-Symbol: total antisymmetrischer Tensor 3. Stufe.
Nutze $\vec{e}_i \times \vec{e}_j = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \vec{e}_k$.
Nützliche Beziehung: $\sum_j \varepsilon_{ikj}\varepsilon_{jlm} = \delta_{il}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{kl}$

Matrixrepräsentation Vektorprodukt

$$\vec{a} \times \vec{b} = \underline{A} \cdot \vec{b}$$

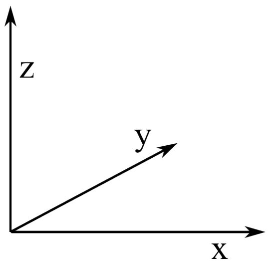
$$\text{mit} \quad \underline{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{antisymmetrische Matrix}}$$

Spatprodukt

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \det \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

2.3 Auswahl orthonormaler Koordinatensysteme

2.3.1 Kartesische Koordinaten



$$\begin{aligned} \vec{a} &= a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z && \text{(allg.)} \\ \vec{r} &= x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z && \text{(Position)} \\ a_x &= \vec{a} \cdot \vec{e}_x && \text{etc.} \end{aligned}$$

→ gebräuchlichstes Koordinatensystem

→ orts- und zeitfeste Basisvektoren

→ einschränkbar/erweiterbar auf beliebige Zahl von Dimensionen

→ Basisvektoren $\vec{e}_x = \frac{\frac{\partial}{\partial x}\vec{r}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial x}|} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial x}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial}{\partial x} \ldots$ partielle Ableitung, siehe später

Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\text{cart}}$$

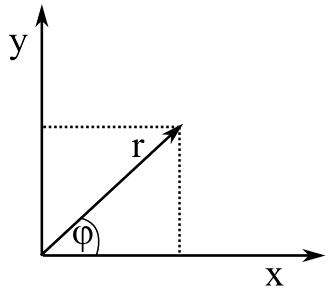
Laplace-Operator

differenzierbares Skalarfeld f

$$\Delta f = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} f) = \vec{\nabla}^2 f = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)_{\text{cart}} f$$

2.3.2 Polarkoordinaten

in zwei Dimensionen



Radius $r \in [0, \infty)$

Winkel $\varphi \in [0, 2\pi]$ immer in Radiant

Transformation

$$x = r\cos(\varphi) \qquad \text{und} \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$y = r\sin(\varphi) \qquad\qquad \varphi = \arctan(\tfrac{y}{x})$$

Funktionaldeterminante

$$\begin{aligned}\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{vmatrix} \\ &= r(\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{=1}) = r\end{aligned}$$

Flächenelement

$$dS = dx\,dy = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} dr\,d\varphi = r\,dr\,d\varphi$$

Basisvektoren

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial r}|} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} = \cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial r} &= \frac{\partial}{\partial r}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix} \\ \vec{e}_\varphi &= \frac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}}{|\frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi}|} = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix} = -\sin(\varphi)\vec{e}_x + \cos(\varphi)\vec{e}_y \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial \varphi} &= \frac{\partial}{\partial \varphi}\begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Nabla-Operator

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}_{\text{cart}} &= \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} \\ &= \vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{\text{polar}}\end{aligned}$$

erhält man durch

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} &= \vec{e}_r(\vec{e}_r \cdot \vec{\nabla}) + \vec{e}_\varphi(\vec{e}_\varphi \cdot \vec{\nabla}) \\ &= \vec{e}_r \underbrace{\left(\cos\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \sin\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)}_{=\frac{\partial}{\partial r}} + \vec{e}_\varphi \underbrace{\left(-\sin\varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos\varphi \frac{\partial}{\partial y}\right)}_{=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}}\end{aligned}$$

mit

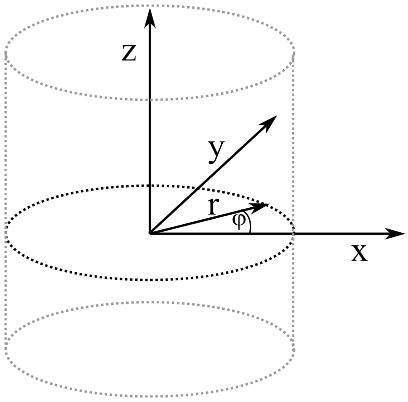
$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\frac{\partial}{\partial \varphi} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial}{\partial y}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right)_{\text{polar}}$$

2.3.3 Zylinderkoordinaten

= Polarkoordinaten (2d) + Höhenkoordinate



Transformation

$$x = r\cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2}$$
$$y = r\sin(\varphi) \qquad \varphi = \arctan\left(\tfrac{y}{x}\right)$$
$$z = z \qquad z = z$$

Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\varphi) & -r\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= r(\underbrace{\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)}_{=1}) = r$$

Volumenelement

$$dV = dx\,dy\,dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\varphi,z)}\,dr\,d\varphi\,dz = r\,dr\,d\varphi\,dz$$

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator

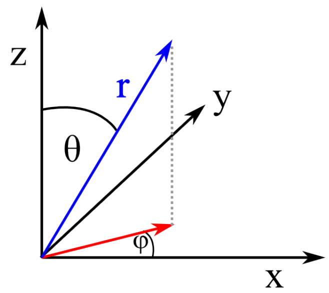
$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}_{\text{zylinder}}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)_{\text{zylinder}}$$

2.3.4 Kugelkoordinaten

in 3d



Radius	$r \in [0, \infty)$
Polarwinkel	$\theta \in [0, \pi]$
Azimutalwinkel	$\varphi \in [0, 2\pi]$

Transformation

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi) \qquad r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi) \qquad \theta = \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$
$$z = r\cos(\theta) \qquad \varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) & r\cos(\theta)\cos(\varphi) & -r\sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) & r\cos(\theta)\sin(\varphi) & r\sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} = r\sin^2(\theta)$$

Volumenelement

$$dV = dx\,dy\,dz = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\,dr\,d\theta\,d\varphi = r\sin^2(\theta)\,dr\,d\theta\,d\varphi$$

Einheitsvektoren

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} \sin(\theta)\cos(\varphi) \\ \sin(\theta)\sin(\varphi) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta)\cos(\varphi) \\ \cos(\theta)\sin(\varphi) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix}, \qquad \vec{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin(\varphi) \\ \cos(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}_{\text{kugel}}$$

Laplace-Operator

$$\Delta = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin(\theta)}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)_{\text{kugel}}$$

3 Beschreibung von Bahnkurven

3.1 Parametrisierung von Raumkurven

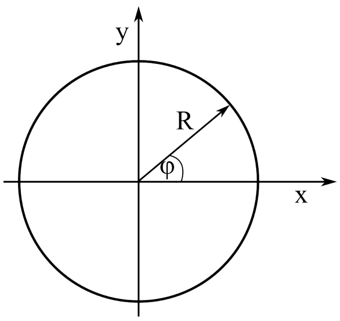
Vektorwertige Funktion $\vec{r}(t) \in \mathbb{R}^3$ mit $t \in \mathbb{R}$. Raumkurven (Trajektorien) beschreiben die Position eines Punktteilchens in Abhängigkeit der Zeit t.
Wahl einer **zeitunabhängigen Basis** $\{\vec{e}_i\}$ gibt die Komponentendarstellung für die Position:

$$\vec{r}(t) = \sum_{i=1}^{3} r_i(t)\vec{e}_i = \begin{pmatrix} r_1(t) \\ r_2(t) \\ r_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Man sagt, die skalare Größe t parametrisiert die Raumkurve $\vec{r}(t)$.

$$\text{Einheiten}: \quad [\vec{r}] = \text{m} \quad \text{und} \quad [t] = \text{s}$$

Kreisbewegung in der (xy)-Ebene



Parametrisierungen

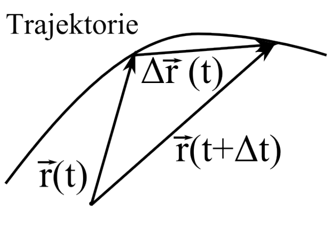
$$\vec{r}(\varphi) = R\begin{pmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad \varphi \in [0, 2\pi]$$

$$\text{oder} \qquad \vec{r}(x) = \begin{pmatrix} x \\ \pm\sqrt{R^2 - x^2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x \in [-R, R]$$

$+/-$ gilt für obere/untere Halbebene

Bahnkurven stetig $\Leftrightarrow$ Komponentenfunktion stetig (siehe [Bronstein]).
Hier: Falls nicht anders eingeführt, sind **alle** Funktionen stetig und beliebig oft differenzierbar.

3.2 Differentiation vektorwertiger Funktionen



Differenzvektor

$$\Delta\vec{r}(t) = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$$
$$\text{für} \quad \Delta t \to 0 \quad \text{ist} \quad \Delta\vec{r} \to \vec{0}$$

Richtung ändert sich $\to$ wird tangential
Ableitung

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(r + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t}$$
$$\Downarrow$$
$$\vec{v} \parallel \Delta\vec{r}$$

- in zeitunabhängigen Koordinaten entspricht die Ableitung des Vektors der Ableitung seiner Komponenten:

$$\frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix}$$

- analog für höhere Ableitungen oder Integrale
- Wiederholung des Mittelwertsatzes (siehe [Bronstein])

Ableitungsregeln

$$\begin{array}{rl} \vec{a}(t), \vec{b}(t) & \text{vektorwertige Funktionen} \\ f(t) & \text{skalare Funktion} \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) + \vec{b}(t)] &= \dot{\vec{a}}(t) + \dot{\vec{b}}(t) \\
\frac{d}{dt}[f(t)\vec{a}(t)] &= \dot{f}(t)\vec{a}(t) + f(t)\dot{\vec{a}}(t) \\
\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \cdot \vec{b}(t)] &= \dot{\vec{a}}(t) \cdot \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \cdot \dot{\vec{b}}(t) \\
\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] &= \dot{\vec{a}}(t) \times \vec{b}(t) + \vec{a}(t) \times \dot{\vec{b}}(t)
\end{aligned}$$

Geschwindigkeit	$\vec{v}(t) = \frac{d}{dt}\vec{r}(t) = \dot{\vec{r}}(t)$	$[\vec{v}] = \frac{[\vec{r}]}{[t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$
Beschleunigung	$\vec{a}(t) = \frac{d}{dt}\vec{v}(t) = \frac{d^2}{dt^2}\vec{r}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$	$[\vec{a}] = \frac{[\vec{v}]}{[t]} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$
Einheitsvektor	$\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$ impliziert $\frac{d}{dt}(\vec{e} \cdot \vec{e}) = 2\vec{e} \cdot \dot{\vec{e}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\vec{e}(t) \perp \vec{e}(t)$	

(bzw. $\dot{\vec{e}} = \vec{0}$ für zeitunabhängige Basis)

4 Ableitungen von Feldern

4.1 Skalares Feld

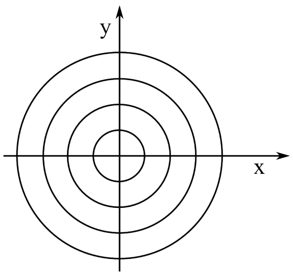
Menge der Zahlenwerte $\Phi(\vec{r})$ einer physikalischen Größe, die den Punkten eines Gebiets zugeordnet wird.

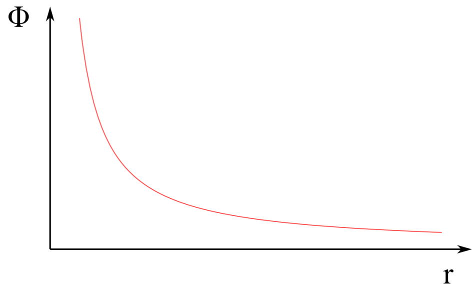
$$\text{Abbildung/Funktion} \quad \Phi: \ \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \ \rightarrow \ \Phi(\vec{r}) \in \mathbb{R}$$

Darstellung:

- Projektion von Konturlinien auf Ebene $\Phi = \text{const.}$
- 1d Schnitt, z.B. für radialsymmetrische Felder $\Phi(r)$

Beispiel: Coulomb-Potential einer Punktladung am Ursprung $\Phi_{\text{Cou}}(\vec{r}) = \frac{\alpha}{r}$





4.2 Vektorfeld

Menge der durch Betrag und Richtung gekennzeichneten Vektoren $\vec{E}(\vec{r})$, die den Punkten eines bestimmten Gebiets zugeordnet sind.

$$\vec{E}: \quad \vec{r} \in \mathbb{R}^3 \quad \rightarrow \quad \vec{E}(\vec{r}) \in \mathbb{R}^3$$

Beispiel: Elektrisches Feld einer Punktladung $\qquad \vec{E} = -\alpha \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}$

4.3 Partielle Ableitung

Sei f eine Funktion mehrerer Variablen $x_1, x_2, \ldots$ Dann ist

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x_1, x_2, \ldots) - f(x_1, x_2, \ldots)}{\Delta x_1}$$

die partielle Ableitung nach x_1. Analog für $x_2, x_3, \ldots$
Beispiel:

$$f(x,y) = 3x^2y + y^4 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 6xy \quad \text{und} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2 + 4y^3$$

4.4 Diverse Ableitungen

Totale Ableitung (Kettenregel)

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d}{dt}\Phi(r_1(t), r_2(t), r_3(t)) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \Phi}{\partial r_i}\frac{dr_i}{dt}$$

Gradient (Stärke und Richtung der Änderung eines Skalarfeldes)

$$\vec{\nabla}\Phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r_1} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_2} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial r_3} \end{pmatrix} \qquad \text{(für obiges Beispiel:} \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi)$$

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r_1} \\ \frac{\partial}{\partial r_2} \\ \frac{\partial}{\partial r_3} \end{pmatrix} \qquad \text{Nabla} - \text{Operator}$$

Divergenz (Quellstärke eines Vektorfeldes)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial r_i} E_i$$

Rotation (Wirbelstärke eines Vektorfeldes)

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \sum_{i,j,k} \varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial E_j}{\partial r_i} \right) \vec{e}_k$$

Danksagung

Mein Dank gilt Gabi Wenzel für das sorgfältige Erstellen dieser Version nach meinen handschriftlichen Notizen.

Literatur

[Bronstein] Bronstein, I. N., Mühlig, H., Musiol, G. und Semendjajew, K. A. (2013): *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Europa-Lehrmittel, 9. Auflage, ISBN 978-3-8085-5671-9

[Gradstein] Gradstein, I. S., Ryshik, I. W. (1981): *Summen-, Produkt- und Integraltafeln*, Harri Deutsch Verlag, 5. Auflage, ISBN 978-3-87144-350-3

[Nolting] Nolting, W. (2012): *Grundkurs Theoretische Physik 1: Klassische Mechanik*, Springer Verlag, 10. Auflage, ISBN 978-3-64229-936-0