TE 3 Relativistische Dynamik

Postulat der speziellen Relativität

Die Naturgesetze sind bzgl. der Gruppe der inhomogenen Lorentztransformationen (Poincarétransf.) kovariant. Damit sind auch die messbaren Größen unabhängig vom Bezugssystem.

TE 3.1 Eigenzeit

- In klass. Mechanik wurde Zeit t benutzt, um Raumkurven $\vec{r}(t)$ zu parametrisieren
- Zeit t ist keine Invariante mehr, sondern Komponente eines Vierervektors
- Benötigen eine andere Invariante wenn wir Bewegungen relativistisch / kovariant beschreiben wollen
- Die einzige Möglichkeit ist die Norm von Vierervektoren

$$ds^2 = dx^\mu\, dx_\mu = c^2 dt^2 - (d\vec{x})^2 = \left[c^2 - \left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2\right] dt^2$$

$$ds = c \underbrace{\sqrt{1-\beta^2}}_{1/\gamma}\, dt$$

$$dt = \frac{\gamma}{c}\, ds$$

- Zur Parametrisierung geeignet ist also die Invariante "Eigenzeit" $\quad d\tau = \frac{ds}{c} \quad \frac{\text{Bogenlänge der Weltlinie}}{c}$

- Zusammenhang mit normaler Zeitvariablen

$$\boxed{d\tau = \frac{1}{\gamma}\, dt}$$

für $v \to 0 \Rightarrow \gamma \to 1$
$\Rightarrow d\tau \to dt$

Mit Hilfe dieser neuen Zeit wollen wir jetzt die wichtigsten Größen und Gesetze der Punktmechanik relativistisch korrekt formulieren.

3.2 Vierergeschwindigkeit

- 3er-Geschwindigkeit $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt}$ transformiert unter LT nicht wie die Ortskoordinaten eines Vierervektors, weil t kein invarianter Skalar ist

$\longrightarrow$ Definiere Geschw. als Ableitung bzgl. invarianten "Zeit"
$\longrightarrow$ bzgl. Eigenzeit

Vierergeschw.

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} c\,\frac{dt}{d\tau} \\ \cdots \\ \frac{d\vec{x}}{d\tau} \end{pmatrix} \underset{\frac{d}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt}}{=} \gamma \begin{pmatrix} c \\ \cdots \\ \frac{d\vec{x}}{dt} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix}$$

Norm der Vierergeschw.

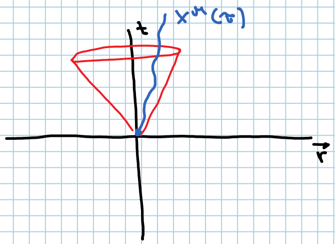
$$u^2 = u^\mu u_\mu = (u^0)^2 - (u^1)^2 - (u^2)^2 - (u^3)^2$$
$$= \gamma^2 (c^2 - v^2) = \gamma^2 c^2 \underbrace{\left(1 - \left(\tfrac{v}{c}\right)^2\right)}_{1/\gamma^2}$$
$$= c^2 > 0$$

d.h. $\boxed{u^2 = c^2}$ $\forall v$

u^μ ist ein zeitartiger Vektor

Geometrische Interpretation

- $x^\mu(\tau)$ ist eine Bahnkurve im Minkowskiraum



- also ist $\frac{dx^\mu}{d\tau}$ ist Tangente der Bahnkurve (s. Phy 1, Kap. T2.5.3)
- wir wissen, dass dieser Vektor stets zeitartig ist, also muß auch die Bahnkurve immer innerhalb des Lichtkegels bleiben (falls es bei t=0 drin war)
  ($\Leftrightarrow$ c ist Grenzgeschwindigkeit)

3.3. Der Viererimpuls

– grundlegender Vektor der Teilchendynamik

Masse im Folgenden: Ruhemasse des Teilchens

Viererimpuls

$$p^\mu = m u^\mu \underset{\text{Kap 3.2.}}{=} \gamma m \begin{pmatrix} c \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E/c \\ \vec{p} \end{pmatrix}$$

↳ siehe Kap. 3.4

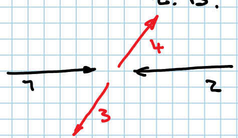
Nichtrelativ. Grenzfall: $\gamma \to 1 \Rightarrow \vec{p} \to m\vec{v}$

Norm
$$p^2 = p^\mu p_\mu = m^2 u^2 = m^2 c^2 \geq 0 \qquad (*)$$

→ d.h. auch der Viererimpuls ist zeitartig, außer für Teilchen mit Ruhemasse 0. Diese sind lichtartig (Photonen haben m=0)

Viererimpuls Erhaltungssatz

z. B. Streuexperimente



$$p_1^\mu + p_2^\mu = p_3^\mu + p_4^\mu$$

in jedem beliebigen Bezugssystem

3.4 Die Einstein Energie

Klass. nicht-relativistische Energie eines freien Teilchens

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \qquad \text{(kinet. Energie)}$$

Relativistische Formulierung:

- Ausgangspunkt

(*): $p^2 = (p^0)^2 - (\vec{p})^2 = m^2c^2$

$$(p^0)^2 = m^2c^2 + (\vec{p})^2 \qquad |\sqrt{\cdot}$$

$$p^0 = \sqrt{m^2c^2 + \vec{p}^2} \qquad |\cdot c$$

$$c\,p^0 = mc^2\sqrt{1 + \vec{p}^2/m^2c^2}$$

$$= mc^2\sqrt{1 + \frac{\gamma^2 \cancel{m^2} v^2}{\cancel{m^2} c^2}}$$

$$= mc^2\gamma \qquad (+)$$

$$mc^2\sqrt{1 + \vec{p}^2/m^2c^2} = E_E$$

definiert als Einstein Energie

$$\boxed{E_E = \sqrt{m^2c^4 + \vec{p}^2c^2}}$$

$$\xrightarrow{(+)} \frac{E_E}{mc^2} = \gamma$$

Nicht-relativist. Grenzfall

Taylor Entw. der $\sqrt{\ }$ für kleine Impulse $\vec{p}^2$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

$$E_E = mc^2 + mc^2\left(\frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m^2c^2}\right) - mc^2\frac{1}{8}\frac{\vec{p}^4}{m^4c^4} + \mathcal{O}(\vec{p}^6)$$

$$E_E = \underbrace{mc^2}_{\text{Ruheenergie (von Ruhemasse)}} + \underbrace{\frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2}{m}}_{\text{klass. kinet. Energie d. freien Teilchens}} - \underbrace{\frac{1}{8}\frac{\vec{p}^4}{m^3c^2}}_{\text{1. relativist. Korrektur}} + \mathcal{O}(\vec{p}^6)$$

Ruhemasse $\hat{=}$ genuin rein relativistischer Effekt

Äquivalenz Masse - Energie

Folge: Energieformen können ineinander umgewandelt werden, so können durch Teilchen (Strahlen) mit hohem Impuls neue, schwere Teilchen erzeugt werden

☞ Higgs Boson aus 2 Protonen bei 8 TeV

Lorentztransf. für Relativbewegung mit v in x-Richtg. (vgl Kap 2.5)

$$\boxed{p'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, p^\nu}$$

$$\begin{pmatrix} E_E'/c \\ p_x' \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta \\ -\beta & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_E/c \\ p_x \end{pmatrix} \qquad \beta = \frac{v}{c}$$

$$p_y' = p_y \qquad p_z' = p_z$$

$$p_x' = \gamma\left(p_x - \frac{vE_E}{c^2}\right)$$

$$E_E' = \gamma\left(E_E - v p_x\right)$$

Erinnerung TE 2.5

$$\Lambda(\vec{v}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma \, \vec{v}^T/c \\ \hline -\gamma \frac{\vec{v}}{c} & \underline{\underline{I}} + \frac{\gamma^2}{c^2} \frac{\vec{v}\vec{v}}{1+\gamma} \end{array}\right)$$

<u>allg. Relativbewegung mit $\vec{v}$</u>

$$\vec{p}\,' = \vec{p} + \frac{\gamma \vec{v}}{c^2}\left(\frac{\gamma \, \vec{v}\cdot\vec{p}}{\gamma+1} - E_E\right)$$

$$E_E' = \gamma\,(E_E - \vec{v}\cdot\vec{p})$$

<u>Invarianten</u>

jedes Skalarprodukt $\quad p_i \cdot p_j = \frac{E_i E_j}{c^2} - \vec{p}_i \cdot \vec{p}_j$

diese Indizes sind Teilchenzahlen

oft benutzt quadrierte 2-Teilchen invariante Masse

$$s_{12} = \frac{(p_1+p_2)^2}{c^2} = m_1^2 + m_2^2 + 2\, p_1 \cdot p_2 / c^2$$

(überprüfen)

p_1, p_2 ... 4er Impulse von Teilchen 1 u. 2

3.5. Vierer Kraft (Minkowski Kraft)

2. Newtonsches Gesetz – Anpassung an Indexschreibweise

$$K^\mu := \frac{dp^\mu}{d\tau} = \begin{pmatrix} K^0 \\ \vec{K} \end{pmatrix}$$

<u>Komponenten</u>

$$K^0 = \frac{dp^0}{d\tau} = \frac{1}{c}\frac{dE_E}{d\tau} \overset{\text{TE 3.1}}{=} \frac{\gamma}{c}\frac{dE_E}{dt} = \frac{\gamma}{c} P \qquad \left(\underset{P}{\text{Leistung}}\right)$$

$$\vec{K} = \frac{d\vec{p}}{d\tau} = \gamma \frac{d\vec{p}}{dt} = \gamma \vec{F}$$

<u>Damit</u>

$$K^\mu = \gamma \begin{pmatrix} P/c \\ \vec{F} \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} \frac{\vec{F}\cdot\vec{v}}{c} \\ \vec{F} \end{pmatrix}$$

- Lorentzkraft $\quad$ klassisch: $\vec{F} = q\,(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

Für die Raumkomponenten der Vierer Kraft – Multiplik. mit γ

0te bzw. Zeitkomponente der 4er Kraft

$$K^0 = \gamma\, P/c = \frac{\gamma}{c}\, q\, \vec{E}\cdot\vec{v} = \gamma q\, \vec{E}\cdot\vec{\beta}$$

$$K^\mu = \gamma q \begin{pmatrix} \vec{E}\cdot\vec{\beta} \\ \vec{E} + \vec{v}\times\vec{B} \end{pmatrix} = ?^{\mu\nu} \quad u_\nu$$

Erinnerg.: $u^\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ \vec v \end{pmatrix}$ $\quad u_\mu = \gamma \begin{pmatrix} c \\ -\vec v \end{pmatrix}$

Indexschreibw.: $K^0 = \gamma q\, E_k v_k / c$

$K^i = \gamma q\, (E_i + \varepsilon_{ijk} v_j B_k)$

für 1 Komponente : $i = 1$

$\gamma q\, (E_1 + \underbrace{\varepsilon_{1jk} v_j B_k}_{\neq 0 \text{ für } \varepsilon_{123}\,:\, v_2 B_3,\ \varepsilon_{132}\,:\, -v_3 B_2})$

d.h. Zeile 2 von $?^{\mu\nu}$ ist :

$$\frac{q}{c}\,(E_1,\, 0,\, -cB_3,\, cB_2)$$

$$\Rightarrow \quad ?^{\mu\nu} \text{ ist } F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_2 \\ E_1 & 0 & -cB_3 & cB_2 \\ E_2 & cB_3 & 0 & -cB_1 \\ E_3 & -cB_2 & cB_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Feldstärke-tenso

Damit $\boxed{K^\mu = \frac{q}{c} F^{\mu\nu} u_\nu}$

3.6. Drehimpuls, Drehmoment u. Schwerpunkt

- Drehimpuls $\vec L = \vec r \times \vec p \quad (L_i = \varepsilon_{ijk} r_j p_k)$

  in klass. Mech. ist Pseudovektor (axialer Vektor)

  – bei Drehungen verhält er sich wie gewöhnl. Vektor

  – bei Spiegelung Übergang in sich selbst

  $\hat{=}$ Tensor 2. Stufe, d.h. kann als solcher dargestellt werden und transformiert sich als solcher

- in 3d Raum $L_{ij} = r_i p_j - r_j p_i$

  $\underline{L} = \vec r \vec p - \vec p \vec r$

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} 0 & r_1p_2 - r_2p_1 & r_1p_3 - r_3p_1 \\ r_2p_1 - r_1p_2 & 0 & r_2p_3 - r_3p_2 \\ r_3p_1 - r_1p_3 & r_3p_2 - r_2p_3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & L_3 & -L_2 \\ -L_3 & 0 & L_1 \\ L_2 & -L_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{12} = -L_{21} = L_3$$
$$L_{13} = -L_{31} = -L_2$$
$$L_{23} = -L_{32} = L_1$$

$$\varepsilon_{ijk} L_{jk} = 2L_i$$

- analog: Drehimpulstensor im 4 dim. d.h in der relativist. Mechanik

$$\boxed{L^{\mu\nu} = x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu}$$

- Raumkomponenten können als Dreiervektor geschrieben werden

$$\begin{pmatrix} x^2 p^3 - x^3 p^2 \\ x^3 p^1 - x^1 p^3 \\ x^1 p^2 - x^2 p^1 \end{pmatrix} = \vec{r} \times \vec{p} = \gamma m \, \vec{r} \times \vec{v} = \vec{L}$$

- Raum-Zeit Komponente ergeben auch Dreiervektor

$$\begin{pmatrix} x^1 p^0 - x^0 p^1 \\ x^2 p^0 - x^0 p^2 \\ x^3 p^0 - x^0 p^3 \end{pmatrix} = \vec{r} p^0 - x^0 \vec{p}$$

$$= c \left(\frac{E_g}{c^2} \vec{r} - t \vec{p} \right)$$

$$= c \left(m \gamma \vec{r} - t \vec{p} \right)$$

- Drehimpulstensor erfüllt Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{d\tau} L^{\mu\nu} = \frac{d}{d\tau} \left(x^\mu p^\nu - x^\nu p^\mu \right)$$

$$= u^\mu \cancel{m} u^\nu + x^\mu K^\nu - u^\nu \cancel{m} u^\mu - x^\nu K^\mu$$

$$= M^{\mu\nu}$$

mit Viererdrehmomenttensor $\boxed{M^{\mu\nu} = x^\mu K^\nu - x^\nu K^\mu}$ (*)

und K^μ Minkowskikraft

- mit Newtonkraft $\vec{F} = \frac{1}{\gamma} (K^1, K^2, K^3)$ werden Raum-Raum Komponenten als 3er-Vektorgleichung geschrieben

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{d\tau} = \gamma \frac{d}{dt} \vec{L} = \gamma \frac{d}{dt} \left(\vec{r} \times \vec{p} \right) = \gamma \, \vec{r} \times \vec{F} = \gamma \vec{M}}$$

bzw. $\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}}$ relativist. Drehimpulssatz

- für Raum-Zeit Komponente gilt:

$$\gamma \frac{d}{dt} \left[c \left(\gamma m \vec{r} - t \vec{p} \right) \right] = \vec{r} K^0 - x^0 \gamma \vec{F}$$

$$= \gamma c \left(\vec{r} \, \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2} - t \vec{F} \right)$$

bzw. $\boxed{\frac{d}{dt} \left(\gamma m \vec{r} - t \vec{p} \right) = \vec{r} \, \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2} - t \vec{F}}$

relativistischer Schwerpunktsatz

$$\vec{r} \, \frac{d(m\gamma)}{dt} + m\gamma \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{p} - t \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \, \frac{\vec{F} \cdot \vec{v}}{c^2} - t \vec{F}$$

liefert für einzelnen Massenpunkt nichts Neues

3.7. Erhaltungssätze

- Erweiterung auf ein System von n Massenpunkten (MP)
  keine retardierten Wechselwirkungen
  $\longrightarrow$ nur lokale Wechselwirkungen über elastische Stoßprozesse

Kräfte zwischen 2 MP erfüllen: (i, j Teilchennummerierung)

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad \text{actio = reactio}$$

$$\vec{v}_i \cdot \vec{F}_{ij} = -v_j \cdot \vec{F}_{ji} \qquad \text{Energieerhaltung bei Stoß}$$

dann gelten wie in der nichtrelativistischen Mechanik bei Abwesenheit äußerer Kräfte die Erhaltungssätze:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i = \text{const} \qquad \text{Impulserhaltung}$$

$$\sum_{i=1}^{n} E_i = \text{const} \qquad \text{Energieerhaltung}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{L}_i = \text{const.} \qquad \text{Drehimpulserhaltung}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (\underbrace{m_i \gamma}_{(m_i)_{\text{effektiv}}} \vec{r}_i - t p_i) = \text{const} \qquad \text{relat. Schwerpunktsatz}$$