Theoretische Ergänzungen zu Physik 3

WS 2015-16

15 VL

1 Übg aller 2 Wochen, 1. Übg in Woche 2
1 Blatt: Ausgabe in Woche 2
Abgabe Anfang Woche 4
Bearbeitet in Übg. Woche 4

Klausur 1h als Teil der Physik 3 Klausur

Inhalt

1. Grenzen d. klass. Physik, Lorentztransformation (LT)
2. Gruppeneigenschaften der LT
3. Relativistische Dynamik
4. Elastische Stöße
5. Kovariante Formulierung der Elektrodynamik

Literatur

Nolting 4, Kap 1 & 2
Jackson "klass. Elektrodyn." Kap. 11, 12, ...
Landau / Lifshitz 2
Goldstein Kap. 7

TE 1 Grenzen der klass. Physik

(siehe Kap. 7 in Phy 1)

1.1. Wiederholung / Einleitung

Inertialsystem:

Bezugssystem in dem Bahnen von kräftefreien Massepunkten (MP) gerade Linien sind auf denen sich die MP mit konstanter Geschwindigkeit bewegen, d.h. in dem das Galileische Trägheitsgesetz gilt. (unbeschleunigte Bezugssysteme)

Galilei Transformation (GT)

Raum $\vec{r}\,' = \underline{R} \cdot \vec{r} + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$

Rotation; gleichf. Geschw. änderung (Boost); Translation

Zeit $t' = t + t_0$

Parameter der GT: $3 + 3 + 3 + 1 = 10$

($\widehat{=}$ Anzahl der Erhaltungsgrößen eines Systems ohne äußere Kräfte)

! Raum und Zeit transformieren verschieden

Struktur der Drehungen

Drehung um einen Winkel β um y-Achse

$$R_{\vec{e}_y}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \ldots \end{pmatrix}$$

um y-Achse

$$R_{\vec{e}_y}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & -\sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

<u>Gruppeneigenschaften</u>

Elemente $g = g(\vec{r}_0, \underline{R}, t, \vec{v}_0)$ bilden die Galilei Gruppe (nicht abelsch)

Einzelne Teilelemente der GT führen auf Untergruppen

1.2. Math: Gruppentheorie

für Definitionen siehe Mathe VL u. Scan

Physikalische Anwendungen:

- GT, LT und andere Transformationen
- Teilchenphysik
- Kristallographie (Einordnung von Kristallstrukturen in 220 mgl. Raumgruppen)
- Molekülphysik (Molekülsymmetrien, Vibrationsmoden)
- Bifurkionstheorie (Musterbildung)

1.3. Michelson-Morley Experiment

- Ausbreitung von Lichtwellen, Existenz des Äthers als Trägermedium
- drehbares Interferometer, ändert sich Interferenzmuster je nach Ausrichtung der Arme des Gerätes bzgl. der Richtg. der Erdbewegung

Ergebnis: Lichtgeschw. konstant

Widerspruch zu Galilei: Geschw. müßten sich addieren

Beobachtung, dass Maxwell Gleichungen nicht invariant unter GT sind

1.4. Einsteins Postulate (T 7.2, Phy 1)

① Äquivalenzprinzip: Es gibt kein bevorzugtes Inertialsystem, Naturgesetze nehmen in allen Inertialsystemen dieselbe Form an (Kovarianz)

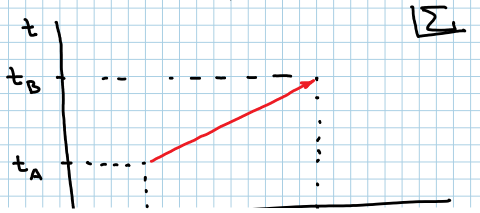
② Licht breitet sich bzgl. jedes Inertialsystems mit der universellen Geschwindigkeit c aus.

TE 2 Lorentztransformation (LT)

Notationskorrekturen in ROT

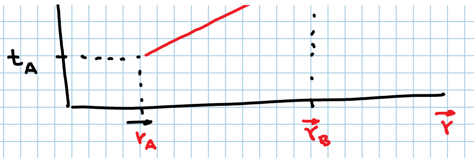
2.1. Motivation

Gedankenexp.: Lichtblitz



Lichtblitz ausgesandt zur Zeit t_A am Ort $\vec{r}_A$, beobachtet bei $(t_B, \vec{r}_B)$

Ausbreitung mit Lichtgeschw. c



Ausbreitung mit Lichtgeschw. c

$$|\vec{r}_A - \vec{r}_B| = c\,(t_B - t_A) \quad \text{oder}$$

$$(\vec{r}_A - \vec{r}_B)^2 - c^2 (t_B - t_A)^2 = 0$$

Beschreibung in Bezugssystem Σ' das sich gleichförmig gegenüber Σ bewegt

$$(\vec{r}_B{}' - \vec{r}_A{}')^2 - c^2 (t_B' - t_A')^2 = 0$$

D.h. wir suchen eine Transformation die

$$(\Delta \vec{r})^2 - c^2 (\Delta t)^2 \quad \text{invariant läßt} \qquad (*)$$

2.2. Weltpunkte und Vierervektoren

Vierervektor

$$x = x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$$

"+" Wahl bzgl. der Kombination von $\vec{r}$ und t

$\mu = 0,1,2,3$ griechisch
$i = 1,2,3$ römisch

Achtung x^μ steht für Vektor ODER seine Komponente → Kontext!

Parametrisierung – Parameter λ

$$x^\mu(\lambda) \;\hat{=}\; \text{Weltlinie}$$

Vektorraum : Minkowski Raum
mit Skalarprodukt und Norm (s.u.)

Zwei verschiedene Darstellungen der Vierervektoren

$$x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \qquad \text{"Kontravariant"}$$

$$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^0 \\ -x^1 \\ -x^2 \\ -x^3 \end{pmatrix} \qquad \text{"Kovariant"}$$

Überführung $x^\mu \leftrightarrow x_\mu$ mit metrischem Tensor

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$x_\mu = \sum_{\nu=0}^{3} g_{\mu\nu} x^\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\nu$$

Abkürzung $\hat{=}$ Einsteinsche Summenkonvention
(summiere über doppelte Indizes, hier einer kontra- und der andere kovariant)

"Herunterziehen von Indizes"

$$x^\mu = g^\mu{}_\nu x^\nu$$

$$g^\mu{}_\nu = g_\mu{}^\nu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

check

$$g^\mu{}_\nu = \sum_{\kappa=0}^{3} g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} \equiv g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu}$$

$$g^{\mu}{}_{\nu} = g_{\mu}{}^{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

check

$$g^{\mu}{}_{\nu} = \sum_{\kappa=0}^{3} g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu} \equiv g^{\mu\kappa} g_{\kappa\nu}$$

Skalarprodukt 2 Vierervektoren x, y

$$x \cdot y = x_\mu y^\mu = x_0 y^0 + x_1 y^1 + x_2 y^2 + x_3 y^3$$
$$= x_0 y_0 - x_1 y_1 - x_2 y_2 - x_3 y_3$$
$$= x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3$$

Norm : Skalarprodukt eines Vierervektors mit sich selbst
$\hat{=}$ Quadrat der Norm

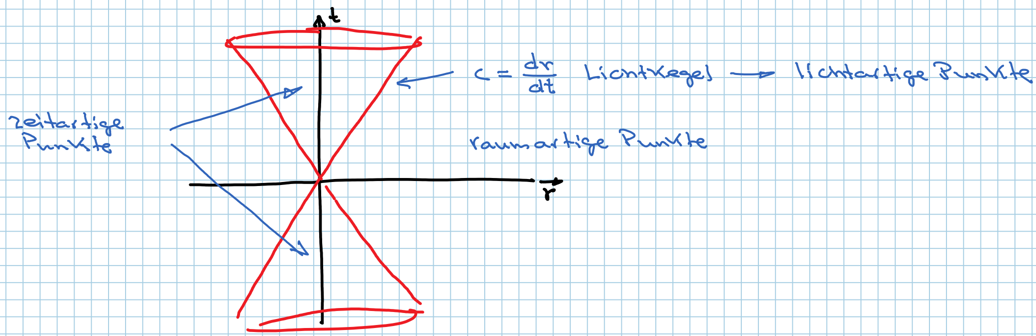
$$x^2 = x_\mu x^\mu = c^2 t^2 - \vec{r}^{\,2}$$

$\hat{=}$ Intervall (*), das invariant unter LT sein soll

Norm ist nicht positiv definit

$$x^2 \begin{cases} > 0 & c^2t^2 > \vec{r}^{\,2} \quad \text{zeitartig} \\ = 0 & c^2t^2 = \vec{r}^{\,2} \quad \text{lichtartig} \\ < 0 & c^2t^2 < \vec{r}^{\,2} \quad \text{raumartig} \end{cases}$$

Klassifikation mit Lichtkegel



2.3. Die Lorentztransformation (LT)

Gesucht Transf. $\Sigma \longrightarrow \Sigma'$

$$\begin{pmatrix} ct' \\ \vec{r}\,' \end{pmatrix} = \underline{\Lambda} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ \vec{r} \end{pmatrix} \iff \boxed{x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu} \quad (*)$$

x ... Vierervektoren $\longrightarrow$ $\underline{\Lambda}$ 4x4 Matrix

Start: Die LT soll Intervall / Norm erhalten

$$\boxed{x'^\mu x'_\mu = x^\mu x_\mu} \quad (**)$$

(*) in (**)

$$(\Lambda^\mu{}_\beta x^\beta)\,(\Lambda_\mu{}^\alpha \underbrace{g_{\alpha\nu} x^\nu}_{x_\alpha}) = x^\mu x_\mu \leftarrow x^\mu g_{\mu\nu} x^\nu$$

$$\Lambda^\mu{}_\beta \, g_{\alpha\nu} \, \Lambda_\mu{}^\alpha \, x^\beta x^\nu = g_{\beta\nu} x^\beta x^\nu$$

$$(\Lambda^\mu{}_\beta \, g_{\alpha\nu} \, \Lambda_\mu{}^\alpha - g_{\beta\nu})\, x^\beta x^\nu = 0$$

$$(\Lambda^\mu{}_\beta \, g_{\alpha\nu} \, \Lambda_\mu{}^\alpha - g_{\beta\nu}) \, x^\beta x^\nu = 0$$

$$((\Lambda^T)_\beta{}^\mu \, \Lambda_\mu{}^\alpha \, g_{\alpha\nu} - g_{\beta\nu}) \, x^\beta x^\nu = 0$$

$$((\Lambda^T)_\beta{}^\mu \, g_{\mu\kappa} \, \Lambda^\kappa{}_\nu - g_{\beta\nu}) \, x^\beta x^\nu = 0$$

$$\Lambda_\mu{}^\alpha = g_{\mu\kappa}\Lambda^{\kappa\alpha} = g_{\mu\kappa}\Lambda^\kappa{}_\beta \, g^{\beta\alpha}$$

$$g^{\beta\alpha} g_{\alpha\nu} = g^\beta{}_\nu \mathrel{\hat=} \mathbb{1}$$

$$\to \quad \boxed{\underline{\Lambda}^T \cdot \underline{g} \cdot \underline{\Lambda} = \underline{g}} \quad (*) \qquad \text{definiert LT}$$

daraus folgt $\boxed{\det \underline{\Lambda} = \pm 1}$

Beweis $\quad \det(\underline{\Lambda}^T \cdot \underline{g} \cdot \underline{\Lambda}) = (\det \underline{\Lambda}^T)(\det \underline{g})(\det \underline{\Lambda})$

$$= (\det \underline{\Lambda})^2 (\det \underline{g}) \overset{(*)}{=} \det \underline{g}$$

$$\hookrightarrow \quad (\det \underline{\Lambda})^2 = 1$$

- da $\det \underline{\Lambda} \neq 0$ existiert $\underline{\Lambda}^{-1}$

Allg. Form von $\underline{\Lambda}$

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left(\begin{array}{c|ccc} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_1 & \Lambda^0{}_2 & \Lambda^0{}_3 \\ \hline \Lambda^1{}_0 & \Lambda^1{}_1 & \cdots & \cdots \\ \Lambda^2{}_0 & \cdots & \Lambda^2{}_2 & \vdots \\ \Lambda^3{}_0 & \cdots & \cdots & \Lambda^3{}_3 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \Lambda^0{}_0 & \Lambda^0{}_i \\ \hline \Lambda^k{}_0 & \Lambda^k{}_i \end{array}\right)$$

Es gilt $\quad |\Lambda^0{}_0| = |\Lambda_{00}| \geq 1$

Beweis $\quad 1 = g_{00} \overset{(*)}{=} (\Lambda^T)_{0\mu} \, g^{\mu\nu} \, \Lambda_{\nu 0}$

$$= (\Lambda^T)_{00}\Lambda_{00} + (\Lambda^T)_{0i}(-1)\Lambda_{i0}$$

$$= \Lambda_{00}^2 - (\Lambda_{i0})^2$$

$$\to \quad \Lambda_{00}^2 = 1 + (\Lambda_{i0})^2 \geq 1$$

Bem: Jedes Skalarprodukt 2er Vierervektoren ist invariant unter LT (Das ist die Definition der LT)

allgemeiner: Jeder Skalar ist invariant unter LT

(Zeit t ist kein Skalar, sondern Komponente eines Vierervektors)

Klassifizierung der LT

$$\underbrace{\det \underline{\Lambda} = \pm 1 \qquad \Lambda^0{}_0 \; \begin{matrix} \geq +1 \\ \leq -1 \end{matrix}}_{\text{4 Fälle}}$$

1. $\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \det \underline{\Lambda} = +1 \quad$ Eigentliche, orthochrone LT
2. $\Lambda^0{}_0 \leq -1 \quad \det \underline{\Lambda} = -1 \quad$ mit Zeitumkehr
3. $\Lambda^0{}_0 \geq 1 \quad \det \underline{\Lambda} = -1 \quad$ mit Raumspiegelung
4. $\Lambda^0{}_0 \leq -1 \quad \det \underline{\Lambda} = +1 \quad$ mit Zeitumkehr und Raumspiegelung

2.4. Gruppeneigenschaften der LT

Wie die Galilei Transf. bilden auch die Lorentz Transf. eine Gruppe

$$\underline{\Lambda}_3 = \underline{\Lambda}_2 \underline{\Lambda}_1$$

$$\underline{\Lambda}_3^T \, \underline{g} \, \underline{\Lambda}_3 = (\underline{\Lambda}_2 \underline{\Lambda}_1)^T \underline{g} \, \underline{\Lambda}_2 \underline{\Lambda}_1 = \underline{\Lambda}_1^T \underbrace{\underline{\Lambda}_2^T \underline{g} \, \underline{\Lambda}_2}_{\substack{\underline{g} \\ (\text{da } \underline{\Lambda}_2 \text{ LT})}} \underline{\Lambda}_1 = \underline{\Lambda}_1^T \underline{g} \, \underline{\Lambda}_1 \underset{\text{da } \underline{\Lambda}_1 \text{ LT}}{=} \underline{g}$$

→ d.h. $\underline{\Lambda}_3$ LT

Diskrete LT

$$\underline{T} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{Zeitumkehr}$$

$$\underline{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{Raumspiegelung (Parität)} \; (\text{Inversion am Ursprung})$$

mit $\underline{T}$, $\underline{P}$ sowie den eigentlichen orthochronen LT (Drehungen, Boosts → s.u.) lassen sich alle Elemente der Lorentzgruppe erzeugen

2.5. Einträge von Λ

Übergang von Inertialsyst Σ zu einem anderen Σ'

[Rotation siehe Galilei T. ?

$$\underline{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \vec{0} \\ \hline \vec{0} & \underline{R} \end{array}\right) \;\hat{=}\; \hat{\underline{R}}$$

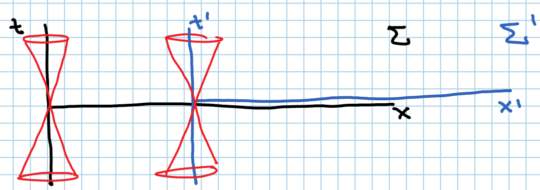
$\underline{R}$ Drehmatritzen]

hier nur achsenparallele Verschiebung, z.B. x-Achse

$t \rightarrow t'$
$x \rightarrow x'$
$y = y'$
$z = z'$

$$x'^\mu = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^\mu$$

$$\vec{v}_{rel} = \begin{pmatrix} v_x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



d.h. es genügt das Betrachten einer 2×2 Matrix

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix}$$

wir haben aber die Einschränkung $\underline{\Lambda}^T \underline{g} \, \underline{\Lambda} = \underline{g}$ $(*)$
(Verallg. von $\underline{R}^T \underline{R} = \mathbb{1}$ in 3d)

$$\overset{\Lambda^T}{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a^2 - c^2 & ab - cd \\ ab - cd & b^2 - d^2 \end{pmatrix} \underset{(*)}{\overset{!}{=}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}_{\underline{g}}$$

→ Gleichungssystem f. Unbekannte a, b, c, d

→ da 2 Gl. identisch, haben wir 3 Gl. für vier Unbekannte

→ 1 freier Parameter bleibt

Lsg. $\Lambda = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{a^2-1} \\ -\sqrt{a^2-1} & a \end{pmatrix}$ (*)

→ Zusammenhang des Parameters a mit Relativgeschwindigkeit

Startpunkt: Invarianz der Norm

$$x^\mu x_\mu = (x^0)^2 - (x^1)^2 = (x'^0)^2 - (x'^1)^2 = x'^\mu x'_\mu$$
(in 2d)

Einführung einer Hilfsfunktion $f(v_{rel})$
(& binom. Formel)

$$(x^0 + x^1)(x^0 - x^1) = f(v)(x'^0 + x'^1) \quad \frac{1}{f(v)}(x'^0 - x'^1)$$

$\overset{2 Gl}{\Longrightarrow}$
$$\boxed{\begin{aligned} x^0 + x^1 &= f(v)(x'^0 + x'^1) \\ x^0 - x^1 &= \frac{1}{f(v)}(x'^0 - x'^1) \end{aligned}} \quad \begin{matrix} (+\mathrm{I}) \\ (+\mathrm{II}) \end{matrix} \qquad (+)$$

wobei $f(v) > 0$ ($= 0$ keine Transf.
$\gtrless 0$ willkürlich)

und $\lim_{v \to 0} f(v) = 1$

(+) sind 2 Gl. → z.B. nach x'^1 auflösen
$[-(+\mathrm{I}) : 2f + (+\mathrm{II}) \cdot f/2]$

$$x'^1 = \frac{1}{2}\left(f - \frac{1}{f}\right) x^0 + \frac{1}{2}\left(f + \frac{1}{f}\right) x^1 \qquad (++)$$

- Für Ursprung von Σ': $x'^1 = 0$
- Bewegung Urspr. Σ' im originalen Syst Σ: $x^1 = \frac{v_x}{c} x^0$
- Eliminieren von x^0, x^1 in (++), Auflösen nach f gibt:

$$f(v_x) = \sqrt{\frac{1 - v_x/c}{1 + v_x/c}} \qquad \text{(check)}$$

- Def neuer Größen

$$\beta_x = \frac{v_x}{c} \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta_x^2}} \qquad \left(\beta_x^2 = 1 - 1/\gamma^2\right)$$

$$\rightarrow f(v_x) = \frac{\sqrt{1-\beta_x}}{\sqrt{1+\beta_x}} = \frac{1-\beta_x}{\sqrt{(1+\beta_x)(1-\beta_x)}} = \frac{1-\beta_x}{\sqrt{1-\beta_x^2}}$$
$$= \gamma(1-\beta_x)$$

- Vergleich von (*) und (++)

$$\Lambda = \begin{pmatrix} a & -\sqrt{a^2-1} \\ -\sqrt{a^2-1} & a \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} x'^0 \\ x'^1 \end{pmatrix} = \underbrace{\gamma \begin{pmatrix} 1 & -\beta_x \\ -\beta_x & 1 \end{pmatrix}}_{\Lambda} \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ man erhält $a \equiv \gamma$

- Rapidität

  $\rightarrow$ Umparametrisierung von $\underline{\Lambda}$

  mit $\gamma = \cosh u$ erhalten wir

$$\underline{\Lambda} = \begin{pmatrix} \cosh u & -\sinh u \\ -\sinh u & \cosh u \end{pmatrix}$$

[Ähnlichkeit mit Dreh-matrizen in 2d]

$$\left.\begin{aligned} \cosh u &= \gamma \\ \sinh u &= \gamma\beta \end{aligned}\right\} \tanh u = \beta$$

Abbildung $-1 \leq \beta = \frac{v}{c} \leq 1 \iff -\infty < u < \infty$

Interpretation von u:

Imaginäre Drehwinkel, beschreibt Drehungen in der x-t Ebene, genannt Rapidität oder Boost Parameter

$\rightarrow$ führt oft zu einfachen Rechnungen

- Additionstheorem der Geschwindigkeiten

$$u_3 = u_2 + u_1 \qquad \text{(check)}$$

- inverse Beziehung

$$u = \log(\gamma + \gamma v) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+v}{1-v}\right)$$

- Bisher nur Boosts in x-Richtung betrachtet

  Verallgemeinerung $\beta_x = \frac{v_x}{c} \Rightarrow \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$

$$\underline{\Lambda}(\vec{\beta}) = \left(\begin{array}{c|c} \gamma & -\gamma\vec{\beta}^T \\ \hline -\gamma\vec{\beta} & \delta_{ij} + \frac{\gamma^2\beta_i\beta_j}{1+\gamma} \end{array}\right) \equiv \underline{L}(\vec{\beta}) \qquad \text{(Boosts)}$$

Verallgemeinerung auf Boosts u. Drehungen (im 3d Raum)

$$\underline{\Lambda} = \underline{L}(\vec{\beta}) \cdot \hat{\underline{R}}$$

Plausibel-machen der unteren rechten Teilmatrix von $\underline{L}(\vec{\beta})$

sei $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ v \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{\beta} = \frac{\vec{v}}{c}$

damit

$$L(\vec{\beta}) = \left(\begin{array}{c|ccc} \gamma & 0 & -\gamma v/c & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\gamma v/c & 0 & \Lambda^2{}_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Lambda^2{}_2 = \delta_{22} + \frac{\gamma^2\beta_2^2}{1+\gamma} = 1 + \frac{\gamma^2(1 - 1/\gamma^2)}{1+\gamma}$$

$$= 1 + \frac{\cancel{(\gamma+1)}(\gamma-1)}{\cancel{1+\gamma}} = \gamma$$

Grenzfälle der LT

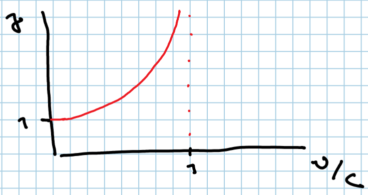
① Sehr kleine Relativgeschwindigkeiten $v/c \ll 1$

Erwartung LT $\rightarrow$ GT

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

LT in x-Richtg.

$$t' = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}x\right)$$
$$x' = \gamma(x - vt)$$



für kleine v/c

$$\gamma \underset{\substack{\text{um}\\ v=0}}{\overset{\text{Taylor}}{=}} 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^4\right)$$

$\frac{1}{\sqrt{1-x}}$

damit
$$\left.\begin{aligned} t' &\approx t \\ x' &\approx x - vt \end{aligned}\right\}$$
GT, wie erwartet (nächste Ordng ist $O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$)

② sehr grosse Geschw. $v \approx c$

2 LT mit jeweils $v \approx c$

$$\Lambda(v_2)\cdot\Lambda(v_1) = \gamma_2\begin{pmatrix} 1 & -\beta_2 \\ -\beta_2 & 1\end{pmatrix}\cdot\gamma_1\begin{pmatrix} 1 & -\beta_1 \\ -\beta_1 & 1\end{pmatrix}$$

$$= \gamma_1\gamma_2\begin{pmatrix} 1+\beta_1\beta_2 & -\beta_1-\beta_2 \\ -\beta_1-\beta_2 & 1+\beta_1\beta_2\end{pmatrix}$$

Vergleich mit $\Lambda(v_3) = \gamma_3\begin{pmatrix} 1 & -\beta_3 \\ -\beta_3 & 1\end{pmatrix}$

gibt $\gamma_3 = \gamma_1\gamma_2(1+\beta_1\beta_2)$ $\quad \beta_3 = \frac{\beta_1+\beta_2}{1+\beta_1\beta_2}$

also ist die Geschwindigkeit

$$v_3 = \underbrace{\frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1 v_2}{c^2}}}_{(*)} \xrightarrow{v_i \to c} c$$

genauer $\quad v_1 = (1-\epsilon)c \qquad \epsilon \ll 1$
$\qquad v_2 = (1-\alpha\epsilon)c \qquad \alpha = O(1)$

$$v_3 \underset{(*)}{\overset{\text{Taylor um } \epsilon=0}{=}} c\left\{(2-(1+\alpha)\epsilon)\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1+\alpha)\epsilon\right] + O(\epsilon^2)\right\}$$

$$\left[\frac{v_1 v_2}{c^2} = 1 - (1+\alpha)\epsilon + \alpha\epsilon^2\right]$$

$$\frac{1}{2+x} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}x + O(x^2)$$

$$v_3 = c\left(1 - \cancel{\frac{1+\alpha}{2}}\epsilon + \cancel{\frac{1+\alpha}{2}}\epsilon + O(\epsilon^2)\right)$$

$$\Rightarrow \quad v_3 = c\left(1 - O(\epsilon^2)\right)$$

Übg.: berechne $O(\epsilon^2)$ Korrektur!

wahrsch. Antwort: $-\frac{\alpha}{2}\epsilon^2$

→ Man kann die Lichtgeschw. nicht überschreiten

2.6. Vierergradient und Vierertensoren

Kap. 2.2.: $x^\mu = \begin{pmatrix} x^0 \\ x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix}$ kontravariant

$x_\mu = \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ct \\ -r_1 \\ -r_2 \\ -r_3 \end{pmatrix}$ kovariant

Vierergradient

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x^0 \\ \partial/\partial x^1 \\ \partial/\partial x^2 \\ \partial/\partial x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\,\partial/\partial t \\ \partial/\partial r_1 \\ \partial/\partial r_2 \\ \partial/\partial r_3 \end{pmatrix}$$

Gesucht Transformationsverhalten

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\frac{\partial}{\partial x^\nu} = \Lambda_\mu{}^\nu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

weil $x^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu x'^\mu$

→ $dx^\nu = \Lambda^\nu{}_\mu dx'^\mu$

totales Differential also auch $dx^\nu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu} dx'^\mu$

Vergleich $\Lambda^\nu{}_\mu \overset{?}{=} \Lambda_\nu{}^\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}$

$$\Lambda^\nu{}_\mu = \underbrace{g^{\nu\alpha} \; g_{\mu\beta}}_{} \quad \Lambda_\alpha{}^\beta$$

1 für $\alpha = \nu$ und $\beta = \mu$
0 sonst

→ $\Lambda^\nu{}_\mu = \Lambda_\nu{}^\mu$

ausserdem ist $\underline{\Lambda}$ symmetrisch

$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ kovarianter Vierervektor

analog: $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x_0 \\ \partial/\partial x_1 \\ \partial/\partial x_2 \\ \partial/\partial x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \\ -\partial/\partial r_1 \\ -\partial/\partial r_2 \\ -\partial/\partial r_3 \end{pmatrix}$ kontravarianter Vierervektor

→ damit folgt: die Kombination

$\partial_\mu a^\mu = \frac{\partial}{\partial t}\frac{a_0}{c} + \vec\nabla \cdot \vec a$ ist Skalar, also invariant unter LT

a^μ beliebiger Vierervektor $a^\mu = \begin{pmatrix} a_0 \\ \vec a \end{pmatrix}$

→ ebenso $\partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ ist Skalar und damit invariant unter LT

Verallgemeinerung

$T^{\alpha\beta\gamma\ldots}$ heißt kontravarianter Tensor k-ter Stufe falls gilt

k Indizes

$$T'^{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Lambda^\alpha{}_\mu \, \Lambda^\beta{}_\nu \, \Lambda^\gamma{}_\sigma \ldots T^{\mu\nu\sigma\ldots}$$

entsprechend

$T_{\alpha\beta\gamma\ldots}$ heißt kovarianter Tensor, falls gilt

$$T'_{\alpha\beta\gamma\ldots} = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda_\beta{}^\nu \Lambda_\gamma{}^\sigma \ldots T_{\mu\nu\sigma\ldots}$$

$T_\alpha{}^\beta{}_\gamma{}_{\ldots}$ heißt gemischter Tensor, falls gilt

$$T'_\alpha{}^\beta{}_\gamma{}_{\ldots} = \Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda^\beta{}_\nu \Lambda_\gamma{}^\sigma \ldots T_\mu{}^\nu{}_\sigma{}_{\ldots}$$

- gesucht: kontravarianter metrischer Tensor

Def: $x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu$

$$x^\mu = \underbrace{g^{\mu\nu} g_{\nu\sigma}}_{\delta^\mu_\sigma} x^\sigma$$

$\Longrightarrow$ für Komponenten gilt $g^{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$

Grundregel: Es muss immer über einen oberen und einen unteren Index summiert werden

- $a_\mu b^\mu = a^\mu b_\mu$ $\qquad\qquad$ ~~$a_\mu b_\mu$ $\quad a^\mu b^\mu$~~

$T^\mu{}_\mu$ $\qquad\qquad$ ~~$T^{\mu\mu}$ $\quad T_{\mu\mu}$~~

nicht Lorentz invariant

Indices werden mit $g^{\mu\nu}$ gehoben und mit $g_{\mu\nu}$ gesenkt

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \qquad b_\alpha = g_{\alpha\beta} b^\beta$$

$$T^\mu{}_\nu = g^{\mu\sigma} T_{\sigma\nu} = g_{\nu\lambda} T^{\mu\lambda}$$

Unter einer kovarianten Formulierung eines phys. Gesetzes versteht man eine Formulierung ausschließlich über Vierertensoren (0. Stufe: Skalar, 1. Stufe: Vektor, ...

$\Longrightarrow$ Gesetz ist dann 'automatisch' invariant unter Lorentztransformation

2.7. Lorentzgruppe und Poincaré Gruppe

allgemein gilt: ist Σ ein Inertialsystem, dann ist auch ein dagegen

(i) um $\vec{a}$ verschobenes

(ii) um $\vec{\alpha}$ verdrehtes

(iii) mit konst. Geschw. $\vec{v}$ bewegtes

(iv) um t_0 in der Zeit verschobenes

Bezugssystem Σ' ein Inertialsystem

$\rightarrow$ eine allg. Transformation zwischen Σ und Σ' wird durch 10 Parameter festgelegt und hat die Form

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu$$

damit das Linienelement $dx^\mu dx_\mu$ invariant bleibt, muss gelten

$$g_{\mu\nu}\, dx'^\mu\, dx'^\nu = g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta\, dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha dx^\beta$$

und damit wie oben $\quad g_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta = g_{\alpha\beta}$

- diese Transf. heißen Poincaré Transf. (inhomogene LT)
- homogene Poincaré Transf. (d.h. solche mit $a^\mu = 0$) heißen LT

- Werden 2 Poincaré Transformationen nacheinander ausgeführt, ergibt sich wieder eine Poincaré Transf. $(\Sigma \to \Sigma' \to \Sigma'')$

$$x''^\mu = \Lambda'^\mu{}_\nu x'^\nu + a'^\mu = \Lambda'^\mu{}_\nu \left(\Lambda^\nu{}_\sigma x^\sigma + a^\nu\right) + a'^\mu$$

$$= \underbrace{\Lambda'^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\sigma}_{\Lambda''^\mu{}_\sigma} x^\sigma + \underbrace{\Lambda'^\mu{}_\nu a^\nu + a'^\mu}_{a''^\mu} = \underbrace{\Lambda''^\mu{}_\sigma x^\sigma + a''^\mu}_{\text{Poincaré Transf.}}$$

d.h. Poincaré Transf. bilden eine Gruppe

Lorentztransf. bilden eine Untergruppe der Poincaré Transf. (siehe TE 1.2)

2.8. Physikalische Effekte

2.8.1. Zeitdilatation

- Ruhesystem Σ, betrachte ortsfesten Punkt $x = 0$ zu Zeiten t_1 und t_2 mit $\Delta t = t_2 - t_1$
- Wechseln ins bewegte System Σ'
  Anwenden der LT (Kap. 2.5)

$$t'_{1,2} = \gamma\left(t_{1,2} - \frac{v}{c^2} \underset{=0}{x}\right)$$

$$\Delta t' = t'_2 - t'_1 = \gamma \Delta t \geq \Delta t$$

d.h. im bewegten System vergeht die Zeit langsamer
→ "Zeitdilatation"

- Zwillingsparadoxon
- Myonenzerfall

2.8.2. Längenkontraktion

- im Ruhesyst. Σ sei ein Stab der Länge ℓ ∥ x-Achse
- Beobachter bewegt sich in Σ' relativ zum Stab und misst seine Länge indem er gleichzeitig $(t'_1 = t'_2)$ die Orte x'_1 u. x'_2 der Enden bestimmt

→ erhält $\ell' = \frac{1}{\gamma} \ell$

d.h. Längen erscheinen in Σ' verkürzt

Rechnung siehe Phy 1 bzw. Scan Kap. 2.8.2