

T. 4 Elektromagnetische Wellen in Medien

T 4.1 Wellen in einem Medium (Wdhlg)

- Maxwellgl. in Medium (dielektrisch)

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0 & (1) \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & (2) \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & (3) \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & (4) \end{aligned}$$

Wellen werden außerhalb erzeugt
d.h. $S=0, \vec{j}=0$

- Lineare Zusammenhang -

$$\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H}$$

oft wird Näherung $\mu_r = 1$ benutzt

- Wellengleichung, z.B. für \vec{E} -feld

$$\Delta \vec{E}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = \vec{0}$$

Ausbreitungsgeschw. $c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} = \frac{c_0}{n}$

Lsg.: ebene Welle

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

→ in Wellengleichung einsetzen gibt Dispersionsrelation $\omega(k)$

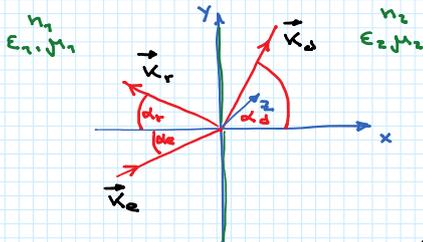
$$\omega = c k = \frac{c_0}{n} k \quad k = |\vec{k}|$$

- Magnetfeld: aus Induktionsgesetz (YW (3))

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{k} \times \vec{E}_0}{\omega} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\vec{B} \perp \vec{E}, \vec{k}$$

T 4.2. Grenzflächeneffekte - Reflexion, Brechung



e... einfallende Welle
r... reflektierte ~
d... durchgelassene Welle

ebene Wellen

e: $\vec{E}_e e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)}$

r: $\vec{E}_r e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)}$

d: $\vec{E}_d e^{i(\vec{k}_d \cdot \vec{r} - \omega t)}$

- an Grenzflächen B_n, D_n, H_t, E_t stetig (vgl. Phy 2, Kap T 8.8.7 T 10.4)
d.h. hier bei $x=0$

- E_t stetig:

$$(\vec{E}_e)_t e^{i(\vec{k}_e \cdot \vec{r} - \omega t)} + (\vec{E}_r)_t e^{i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)} = (\vec{E}_d)_t e^{i(\vec{k}_d \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

$$\forall t \text{ und } \forall \vec{r} = (0, y, z)$$

- betrachte Phase $\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t$

alle t : gleiche Zeitabhängigkeit. $\rightarrow \boxed{\omega_e = \omega_r = \omega_d}$

alle \vec{r} : $\vec{k} \cdot \vec{r} = k_y y + k_z z$

gleiche Abhängigkeit von y, z

$$\boxed{(\vec{k}_d)_y = (\vec{k}_e)_y = (\vec{k}_r)_y} \quad (*)$$

analog $(\vec{k})_z$, hier Wahl des Koord. systems, so dass $= 0$

- Geschw. $\omega = \frac{c}{n} k$ $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} c_0$ da $n = \sqrt{\epsilon_r \mu_r}$

$$\frac{\omega}{c_0} = \boxed{\frac{k_e}{n_1} = \frac{k_r}{n_1} = \frac{k_d}{n_2}} \rightarrow k_e = k_r \quad k_i = |\vec{k}_i| \quad (**)$$

$$(*) : (\vec{k}_e)_y = (\vec{k}_r)_y$$

$$k_e \sin \alpha_e = k_r \sin \alpha_r$$

$$(**) \rightarrow \boxed{\alpha_e = \alpha_r} \quad \text{Reflexionsgesetz}$$

Einfallswinkel = Ausfallswinkel

$$(*) : (\vec{k}_d)_y = (\vec{k}_e)_y$$

$$k_d \sin \alpha_d = k_e \sin \alpha_e$$

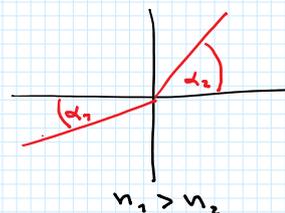
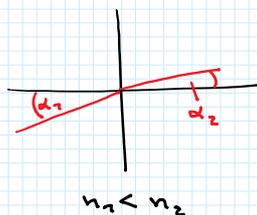
$$\frac{\sin \alpha_d}{\sin \alpha_e} = \frac{k_e}{k_d} \stackrel{(**)}{=} \frac{n_1}{n_2}$$

Notation $\alpha_e = \alpha_r = \alpha_1$
 $\alpha_d = \alpha_2$

$$\boxed{n_1 \sin \alpha_1 = n_2 \sin \alpha_2}$$

Brechungsgesetz (nach Snellius)

\rightarrow damit sind die Richtungen, Frequenzen bestimmt



Wie ist die relative Stärke von reflektiertem und durchgelassenem Strahl?

- Berechnung der Feldamplituden

- Stetigkeitsbedingungen

$$(1) D_n \text{ stetig: } (\epsilon_1 \vec{E}_e + \epsilon_1 \vec{E}_r) \cdot \vec{e}_x = \epsilon_2 \vec{E}_d \cdot \vec{e}_x$$

$$(2) B_n \text{ stetig: } \left(\frac{\vec{K}_e \times \vec{E}_e}{\omega} + \frac{\vec{K}_r \times \vec{E}_r}{\omega} \right) \cdot \vec{e}_x = \frac{\vec{K}_d \times \vec{E}_d}{\omega} \cdot \vec{e}_x$$

$$(3) E_t \text{ stetig: } (\vec{E}_e + \vec{E}_r) \times \vec{e}_x = \vec{E}_d \times \vec{e}_x$$

$$(4) H_t \text{ stetig: } \left(\frac{\vec{K}_e \times \vec{E}_e}{\mu_1} + \frac{\vec{K}_r \times \vec{E}_r}{\mu_1} \right) \times \vec{e}_x = \frac{1}{\mu_2} (\vec{K}_d \times \vec{E}_d) \times \vec{e}_x$$

• Annahme senkrechten Einfalles $\vec{K}_e \parallel \vec{K}_r \parallel \vec{K}_d \parallel \vec{e}_x$

$$\vec{K}_e = -\vec{K}_r = \kappa_1 \vec{e}_x$$

$$\vec{K}_d = \kappa_2 \vec{e}_x$$

→ gesamte Vektoren \vec{E}_i tangential zur Grenzfläche

$$(3) \rightarrow \vec{E}_e + \vec{E}_r = \vec{E}_d$$

$$(4) \rightarrow \frac{\kappa_1}{\mu_1} (\vec{E}_e - \vec{E}_r) = \frac{\kappa_2}{\mu_2} \vec{E}_d$$

erfüllen lineare Beziehungen (3)' (4)'

$$\text{d.h. } \vec{E}_r = a_r \vec{E}_e$$

$$\vec{E}_d = a_d \vec{E}_e$$

$$(3)', (4)' \rightarrow \left. \begin{aligned} 1 + a_r &= a_d \\ 1 - a_r &= \frac{\mu_1 \kappa_2}{\mu_2 \kappa_1} a_d \equiv v a_d \end{aligned} \right\} (*)$$

Bem: $(*)_1 \cdot (*)_2$:

$$(1 + a_r)(1 - a_r) = v a_d^2 \quad (+)$$

$$\rightarrow \boxed{a_d = \frac{2}{1+v} \quad a_r = \frac{1-v}{1+v}} \quad \text{senkrechter Einfall} \quad (**)$$

$$v = \frac{\mu_1 \kappa_2}{\mu_2 \kappa_1} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 \mu_2}}$$

Grenzfall: $\mu_1 = \mu_2, \epsilon_1 = \epsilon_2 \Rightarrow v = 1$

$$a_d = 1$$

$$a_r = 0$$

- Energiestromdichte (Poynting vektor)

$$|\vec{S}_p| = \frac{1}{\mu} |\vec{E} \times \vec{B}| = \frac{n}{c_0 \mu} E^2$$

$$\left(\begin{aligned} \vec{K} \times \vec{E} &= \omega \vec{B} \\ \vec{B} &= \frac{\kappa}{\omega} \vec{E} = \frac{n}{\omega} \vec{E} \end{aligned} \right)$$

$$S_p^e = \frac{n_1}{c_0 \mu_1} E_e^2$$

$$S_p^r = \frac{n_1}{c_0 \mu_1} E_r^2 = \frac{n_1}{c_0 \mu_1} a_r^2 E_e^2 = a_r^2 S_p^e$$

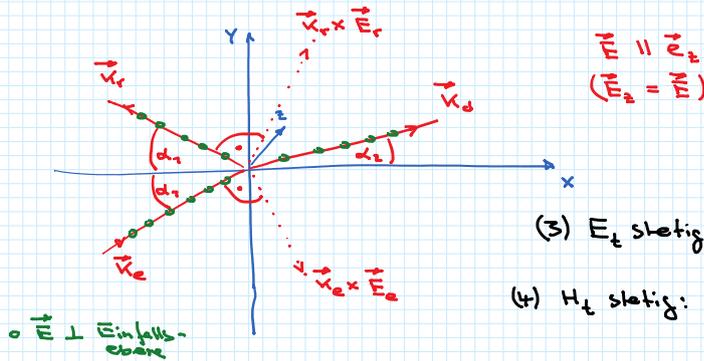
$$S_p^d = \frac{n_2}{c_0 \mu_2} a_d^2 E_e^2 = \underbrace{\frac{n_2 \mu_1}{\mu_2 n_1}}_v a_d^2 S_p^e = v a_d^2 S_p^e = \frac{v a_d^2}{a_r^2} S_p^e \stackrel{(*)}{=} (1 + a_r)(1 - a_r) S_p^e$$

$$\boxed{cd - (1 - 2) ce - ce - cr}$$

$$\stackrel{(*)}{=} (1+a_r)(1-a_r) S_p^e$$

$$S_p^d = (1-a_r^2) S_p^e = S_p^e - S_p^r \quad \text{Energieerhaltung}$$

- Schräger Einfall - es sei $\vec{E} \perp$ zu Einfallsebene



$$(3) E_t \text{ stetig: } E_e + E_r = E_d$$

$$(4) H_t \text{ stetig: } \frac{\mu_1}{\mu_2} (E_e - E_r) \cos \alpha_1 = \frac{\mu_2}{\mu_1} E_d \cos \alpha_2 \quad (+)$$

$$\mu_1 = |\vec{k}_r| = |\vec{k}_e|$$

Bem: E "Betrag" $\hat{=}$ Länge des Vektors aber Vorzeichen behält

$$E_r = a_r E_e \quad E_d = a_d E_e$$

$$\begin{aligned} \stackrel{(+)}{\rightarrow} \quad 1 + a_r &= a_d \\ 1 - a_r &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} a_d \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_d^{\perp} &= \frac{2}{1 + \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} \\ a_r^{\perp} &= \frac{1 - \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}}{1 + \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}} \end{aligned}$$

Fresnelsche Formeln
(wie (**)) mit $v \rightarrow \frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1}$

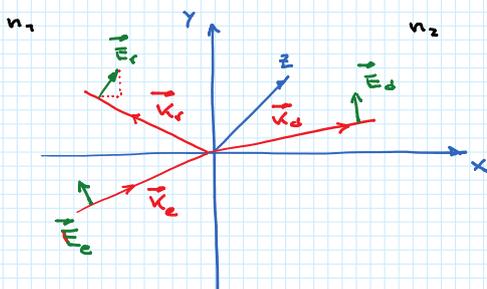
" \perp " zur Einfallsebene

- Speziell $\mu_1 = \mu_2 \quad v = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$

$$a_d^{\perp} = \frac{2}{1 + \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1}} = 2 \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2}$$

$$\begin{aligned} a_d^{\perp} &= 2 \frac{\sin \alpha_2 \cos \alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \\ a_r^{\perp} &= \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)} \end{aligned}$$

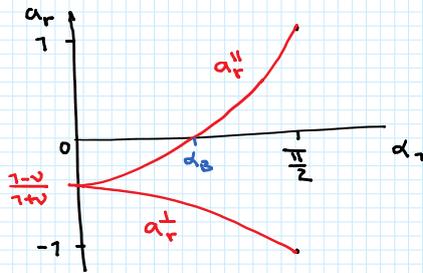
- Schräger Einfall - es sei \vec{E} in Einfallsebene (" \parallel ")



$$a_d^{\parallel} = \frac{2}{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} + v} \xrightarrow{\mu_1 = \mu_2} \frac{2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\cos(\alpha_2 - \alpha_1) \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$a_r^{\parallel} = \frac{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} - v}{\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} + v} \xrightarrow{\mu_1 = \mu_2} \frac{\tan(\alpha_2 - \alpha_1)}{\tan(\alpha_2 + \alpha_1)}$$

- Polarisation - es sei $\mu_1 = \mu_2 \Rightarrow v = \frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} > 1$
 (für $n_2 > n_1$)
 vgl. Kap E 30.7
 d.h. $\alpha_1 > \alpha_2$



- Wenn $\alpha_1 = 0 \rightarrow \alpha_2 = 0$

$$a_r^{\parallel} = a_r^{\perp} = \frac{1-v}{1+v}$$

- Wenn $\alpha_1 = \frac{\pi}{2}, \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$

$$\frac{\cos \alpha_2}{\cos \alpha_1} \rightarrow 0$$

$$a_r^{\parallel} \rightarrow 1 \quad a_r^{\perp} \rightarrow -1$$

Reflexion verändert Polarisation

Bem: $a_r < 0 \equiv$ Phasensprung um π der reflektierten Welle

$$a_r^{\parallel} = 0 \text{ für } \tan(\alpha_1 + \alpha_2) = \infty \text{ d.h. } \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\pi}{2}$$

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\cos \alpha_1} = \tan \alpha_1$$

$$\boxed{\tan \alpha_B = \frac{n_2}{n_1}}$$

Brewsterscher Winkel

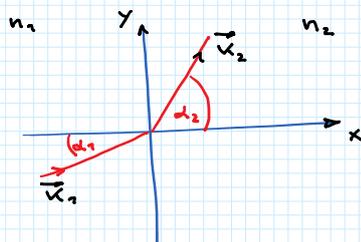
(keine Reflexion von E_{\parallel})

für beliebige Einfallswinkel

$$|a_r^{\perp}| > |a_r^{\parallel}|$$

\rightarrow Polarisationsfilter

T 4.3. Grenzflächeneffekte - Totalreflexion



$n_1 > n_2$ ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$)

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{n_2}{n_1} < 1$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin \alpha_2 \leq \frac{n_2}{n_1} < 1$$

Bedingung für mögliche Brechung

$$\sin \alpha_1 < \sin \alpha_G \equiv \frac{n_2}{n_1}$$

$$\sin \alpha_2 = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_G} \quad (*)$$

$$\alpha_1 < \alpha_G \Rightarrow \alpha_2 \text{ existiert}$$

$$\alpha_1 > \alpha_G \Rightarrow \alpha_2 \text{ existiert nicht (Totalreflexion)}$$

Was passiert mit \vec{E}, \vec{B} in Medium 2 für $\alpha_1 > \alpha_G$?

$$v_{2x} = v_2 \cos \alpha_2 = v_2 \sqrt{1 - \sin^2 \alpha_2}$$

$$\stackrel{(*)}{=} v_2 \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha_1}{\sin^2 \alpha_G}}$$

für $\alpha_1 > \alpha_G$
 v kleines Null

$$k_{2x} = i k_2 \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\sin^2 d_1 - \sin^2 d_0} \equiv k_x^d$$

$$\vec{E} = \vec{E}_d e^{i(k_y^d y - \omega t)} e^{i k_x^d x}$$

$$k_x^d = i k_1 \sqrt{\sin^2 d_1 - \sin^2 d_0} \quad \text{da } k_1 = k_2 \frac{n_1}{n_2}$$

$$k_y^d = k_y^e = k_1 \sin d_1$$

[*] in T 4.2

$$\vec{E} = \vec{E}_d e^{i(k_1 y \sin d_1 - \omega t)} e^{-k_x^d x \sqrt{\sin^2 d_1 - \sin^2 d_0}}$$

normale ebene Welle in y-Richtung.

exponentieller Abfall in Medium 2 (keine ebene Welle)

Abfall nicht dissipativ

Wellenausbreitung parallel zur Grenzfläche

T 4.4. Variationsrechnung - Fermatsches Prinzip

(vgl. Phy 1: T 3.5.1, T 3.5.2)

Ziel: Ausdrücken von Gesetzmäßigkeiten durch Extremalprinzipien

- Hamiltonsches Prinzip (Kleinste Wirkung → Euler-Lagrange Gl.)
Phy 1 T 3.5.2
- Fermatsches Prinzip (Weg eines Lichtstrahls minimiert die "optische Weglänge")

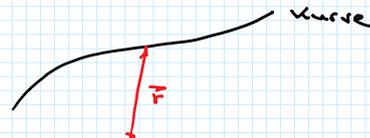
- Parametrisieren von Bahnkurven

Parameter d : $\vec{r}(d)$

Bogenlänge
 $d\vec{s} = \frac{d\vec{r}}{dd} dd$

$$|d\vec{s}| = ds = \left| \frac{d\vec{r}}{dd} \right| dd$$

vgl. Phy 1, T 2.5.3.1



Beispiele

1) $d = t$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \quad (\text{Geschwindigkeit})$$

$$ds = v dt$$

2) d sei eine der 3 Koordinaten x, y, z
z.B. z

$$x = x(z) \quad y = y(z) \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(z) \\ y(z) \\ z \end{pmatrix}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dz} = \begin{pmatrix} dx/dz \\ dy/dz \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$ds = \sqrt{1 + x'^2 + y'^2} dz \quad \text{in 3D}$$

3) Kurve in (x, y) Ebene - 2D

$$d = x \quad \rightarrow \quad y = y(x)$$

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad \frac{d\vec{r}}{dx} = \begin{pmatrix} 1 \\ y' \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

• Definition des Variationsproblems

Gegeben sei ein math. Ausdruck ("Funktional"), das von einer Funktion abhängt. Gesucht ist die Funktion, für die das Funktional extremal wird. Hier: Funktionale sind Integrale $I[f]$

Beispiele 1) Kürzeste Weglänge in 2D



Gesamtlänge

$$I = \int_a^b ds = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2} dx$$

I muss minimiert werden

2) Fermatsches Prinzip, Lichtweg in (x,y) Ebene

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y(x) \\ 0 \end{pmatrix} \quad ds = \sqrt{1 + y'^2} dx$$

Ortsabhängiger Brechungsindex $n(\vec{r})$

Optische Weglänge
$$I = \int \underbrace{n(\vec{r}) \sqrt{1 + y'^2}}_{f(y, y', x)} dx \sim \int \frac{ds}{c} = \int dt$$

Gesucht ist die Funktion $f(y, y', x)$ für die I extremal (minimal) wird.

Lit: Nolting 2, Kap. 2.3, 2.3.3

Feynmann 1, Kap. 26

Herleitung der Extremalbedingung

Annahme $y(x)$ sei die gesuchte Lsg., sie wird variiert

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \epsilon \eta(x)$$

Feste Anfangs- und Endpunkte $\Rightarrow \eta(a) = \eta(b) = 0$ (*)
 $x = a, b$

$$\tilde{y}'(x) = y'(x) + \epsilon \eta'(x)$$

Funktional
$$I[\tilde{y}(x; \epsilon)] = I(\epsilon) = \int_a^b f(\tilde{y}, \tilde{y}', x; \epsilon) dx$$

$$= \int_a^b f(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) dx$$

Notwendige Bedingung für Extremum
$$\left. \frac{dI(\epsilon)}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0 \quad \forall \eta(x)$$

Ausrechnen
$$\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = \int_a^b \frac{d}{d\epsilon} f(y + \epsilon \eta, y' + \epsilon \eta', x) dx \Big|_{\epsilon=0}$$

$$= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial \tilde{y}} \tilde{\eta} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{y}'} \tilde{\eta}' + \frac{\partial f}{\partial x} \tilde{x} \right) dx \Big|_{\epsilon=0}$$

$$\int_a^b ds = \int_a^b \underbrace{\sqrt{1+y'^2}}_{f(y')} dx \quad \text{soll extremal werden (minimal)}$$

Euler'sche D.f.g.l. $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$$\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{d}{dx} \frac{\partial}{\partial y'} \sqrt{1+y'^2} = \frac{d}{dx} \frac{1 \cdot 2y'}{2\sqrt{1+y'^2}} \stackrel{(*)}{=} 0$$

integrieren

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \text{const} = C \quad | \cdot \sqrt{\quad} \quad |^2$$

$$y'^2 = C(1+y'^2)$$

$$y'^2 = \frac{C^2}{1-C^2} \equiv A^2 \quad | \sqrt{\quad}$$

$$y' = A \rightarrow \boxed{y = Ax + B} \quad \text{Gleichung einer Geraden}$$

2) Lichtstrahl in Medium mit ortsabhängigem Brechungsindex

$$n(y) = n_0/y$$

Funktional (optische Weglänge)

$$I = \int_a^b n(y) \sqrt{1+y'^2} dx = \int_a^b \underbrace{\frac{n_0}{y} \sqrt{1+y'^2}}_{f(y,y')} dx$$

Ausnutzen des 2. Spezialfalles (***)

$$h = y' \frac{\partial f}{\partial y'} - f = \text{const}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{n_0}{y} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$h = \frac{y' n_0}{y} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} - \frac{n_0}{y} \sqrt{1+y'^2} \quad | \cdot \frac{y}{n_0} \cdot \sqrt{1+y'^2}$$

$$\frac{h y}{n_0} \sqrt{1+y'^2} = \cancel{y'^2} - (1 + \cancel{y'^2}) = -1 \quad |^2$$

$$\frac{h^2 y^2}{n_0^2} (1+y'^2) = 1$$

$$\frac{h^2 y^2}{n_0^2} = 1 + y'^2 \rightarrow y' = \pm \sqrt{\frac{1}{y^2} \frac{n_0^2}{h^2} - 1}$$

nenne $\frac{n_0}{h} = A$

$$\frac{dy}{dx} = \pm \sqrt{\frac{A^2 - y^2}{y^2}}$$

Trennung der Variablen

$$\int \frac{y}{\sqrt{A^2 - y^2}} dy = \pm \int dx$$

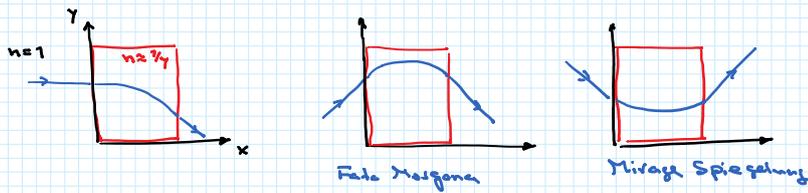
$$-\sqrt{A^2 - y^2} = \pm x + B \quad |^2$$

$$A^2 - y^2 = (x \pm B)^2$$

$$\boxed{A^2 = y^2 + (x \pm B)^2}$$

Kreislinie





Verallgemeinerung auf mehrere Variablen

Betrachte n Funktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$
 Gesucht sind n Funktionen die

$$I[f] = \int_a^b f(y_1, y_2, \dots, y_n, y_1', y_2', \dots, y_n', x) dx \text{ extremal machen.}$$

Mit Hilfe der Variationen $\tilde{y}_j(x) = y_j(x) + \epsilon \eta_j(x) \quad j = 1, \dots, n$

Bedingung für Minimum $\left. \frac{dI}{d\epsilon} \right|_{\epsilon=0} = 0$

führt zu n Eulerschen Gleichungen

$$\boxed{\frac{d}{dx} \frac{\partial f}{\partial y_j'} - \frac{\partial f}{\partial y_j} = 0} \quad \text{für } j = 1, \dots, n$$

n Dgl für n unbekannte $y_j(x)$

Beispiel Fermatsches Prinzip (in 3D)

$$I = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} n(\vec{r}) ds = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \underbrace{n(x, y, z)}_{f(x, y, x', y', z)} \underbrace{\sqrt{1+x'^2+y'^2}}_{ds} dz$$

gesucht sind $x(z), y(z)$

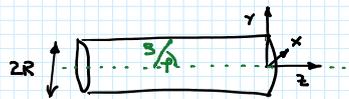
→ 2 Eulersche Gl.

$$\frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad \frac{d}{dz} \frac{\partial f}{\partial y'} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

→ Einsetzen von f

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d}{dz} \left[n(x, y, z) \frac{x'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} \right] - \frac{\partial n}{\partial x} \sqrt{1+x'^2+y'^2} &= 0 \\ \frac{d}{dz} \left[n(x, y, z) \frac{y'}{\sqrt{1+x'^2+y'^2}} \right] - \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1+x'^2+y'^2} &= 0 \end{aligned}} \quad (*)$$

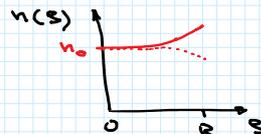
Speziell: Medium mit Zylindersymmetrie



Anwendungsbeispiel:

Glasfaserkabel ("graded index fiber")

(s, φ, z) Zylinderkoordin.
 $s = \sqrt{x^2 + y^2}$



- Annahmen

- (1) $n(s, z)$ hängt nur schwach von s ab insbes. kein "Knick" bei $s=0$

\Rightarrow Taylorentw. um $s=0$

$$n(s, z) = \underbrace{n(0, z)}_{n^{(0)}(z)} + \cancel{\frac{\partial n}{\partial s} \Big|_{s=0} s} + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 n}{\partial s^2} \Big|_{s=0}}_{n^{(2)}(z)} s^2 + O(s^4)$$

\rightarrow Brechungsindex

$$n(s, z) \approx n^{(0)}(z) + n^{(2)}(z) s^2$$

(2) Änderungen des Lichtweges x', y' klein gegen 1 (kleine Winkel)

$$\Rightarrow \sqrt{1+x'^2+y'^2} \rightarrow 1$$

Einsetzen in Eulerschen Differentialgl. (**)

$$\frac{d}{dz} [(n^{(0)}(z) + n^{(2)}(z) s^2) x'] - \frac{\partial}{\partial x} [\cancel{n^{(0)}(z)} + n^{(2)}(z) s^2] = 0$$

$$\frac{d}{dz} [(n^{(0)}(z) + n^{(2)}(z) s^2) y'] - \frac{\partial}{\partial y} [\cancel{n^{(0)}(z)} + n^{(2)}(z) s^2] = 0$$

Mit $\frac{\partial}{\partial x} (n^{(2)}(z) (x^2 + y^2)) = 2x n^{(2)}(z)$ erhält man

$$\frac{d}{dz} [(n^{(0)}(z) + n^{(2)}(z) s^2) x'] = 2x n^{(2)}(z)$$

↑
Dieser Term ist häufig klein gegen $n^{(0)}(z)$ und wird vernachlässigt

Ergebnis

$$\begin{cases} \frac{d}{dz} (n^{(0)}(z) x') = 2x n^{(2)}(z) \\ \frac{d}{dz} (n^{(0)}(z) y') = 2y n^{(2)}(z) \end{cases}$$

Gaußsche Beugleichungen für $x(z)$ u. $y(z)$
"Gaußsche Dioptrik" (**)

Beispiele

1) $n(z, s) = \text{const} = n_0 \Rightarrow n^{(0)} = n_0 \quad n^{(2)} = 0$

(**) $\Rightarrow n_0 \frac{d}{dz} x' = 0$

$\rightarrow x(z) = Az + B$

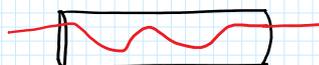
2) Medium mit $n^{(0)}(z) = n_0$

$$n^{(2)}(z) = -\frac{n_0 \kappa^2}{2} = \text{const} < 0$$

(**) $\Rightarrow \cancel{n_0} \frac{d}{dz} x'(z) = \cancel{2} x(z) \left(-\frac{\cancel{n_0} \kappa^2}{\cancel{2}} \right)$

$\Rightarrow x''(z) + \kappa^2 x(z) = 0$

Lösungen: $x(z) = A \cos(\kappa z) + B \sin(\kappa z)$
 $= \tilde{A} \cos(\kappa z + \varphi)$



Anwendungen:
Fokussierung von Lichtstrahlen

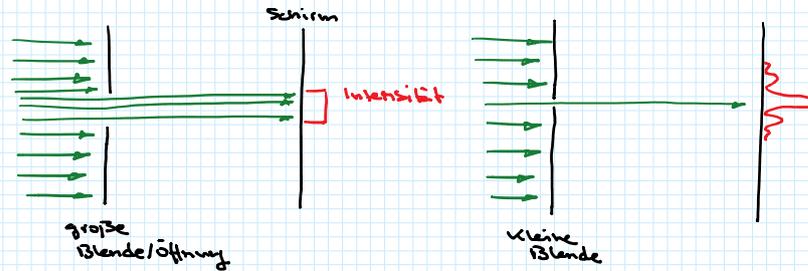
T 4.5 Beugungstheorie

T 4.5.1. Huygens'sches Prinzip

Problemstellung:

- viele optische Phänomene \rightarrow geometrische Optik
- nicht mehr möglich, wenn Abmessungen (z.B. Blendenöffnung) \approx Wellenlänge des Lichts \rightarrow Welleneigenschaften des Lichtes werden relevant

Beispiel



Beschreibung mit Huygens'schen Prinzip

Jeder Punkt einer Wellenfläche kann als Ausgangspunkt einer neuen Kugelwelle angesehen werden.

Kugelwelle (T 3.3.2) mit harmon. Zeitabhängigkeit

Vektorpotential

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Quelle}}}{\vec{j}(\vec{r}')} \frac{e^{i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} e^{-i\omega t} d^3r'$$

\uparrow Kugelwelle
 \uparrow harm. Zeitabh.

Elektr. Feld

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}(\vec{r}) e^{-i\omega t}$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad \text{und} \quad \vec{E} = \frac{i\kappa}{\kappa} \vec{\nabla} \times \vec{B} = -\frac{i\kappa}{\kappa} \Delta \vec{A}$$

Idee von Huygens

Alle Kugelwellen, die von der Blendenöffnung ausgehen überlagern sich und ergeben am Ort \vec{r} das Beugungsbild der Öffnung

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int \frac{e^{i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \vec{E}_{\text{ein}}(\vec{r}') da'$$

\uparrow Fläche der Öffnung
 \uparrow Amplitude der einfallenden Welle

Verallgemeinerung

- Superpositionsprinzip / Greensche Methode anwendbar auf
 - elektr. Feld \vec{E} , magn. Feld \vec{B}
 - skalare Potential φ , Vektorpotential \vec{A}
- \rightarrow oft wird Lsg. für skalare Komp. φ angegeben

Annahme: Weit entfernte Quelle \rightarrow Wellenfronten haben sehr kleine Krümmung

→ einlaufende Welle wird als ebene Welle angenommen

→ \vec{E}_{ein} kann aus Integral gezogen werden

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{ein}} \int_{\text{Fläche der Öffng.}} \frac{e^{i\kappa|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} da' \quad (*)$$

→ (1) Einlaufrichtung senkrecht zur Blende
Fraunhofer'sche Beugung → T. 4.S.2.

(2) Einlaufrichtung nicht senkrecht zur Blende
Kirchhoff'sche Beugung → T. 4.S.3.

T 4.S.2. Fraunhofer'sche Beugung

Annahme: betrachte Fernfeld $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$
(Kleine Öffnung vgl. mit Schirmabstand)

Taylor entw.: $|\vec{r}-\vec{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}' + r'^2}$
 $= r \sqrt{1 - \frac{2\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + \frac{r'^2}{r^2}}$
«klein gegen 1»

Taylor: $r \left(1 - \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r^2} + O\left(\left(\frac{r'}{r}\right)^2\right) \right)$

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

Elektr. Feld:

(*) → $\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{ein}} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \int_{\text{Öffng.}} e^{-i\kappa \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}} da'$

Transmissions- / Blendenfunktion

(codiert die Geometrie der Blende)

$$T(\vec{r}') = \begin{cases} 1 & \text{für } \vec{r}' \text{ innerhalb Öffnung} \\ 0 & \text{für } \vec{r}' \text{ außerhalb } \sim \end{cases}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{ein}} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \int_{\mathbb{R}^2} T(\vec{r}') e^{-i\kappa \frac{\vec{r}\cdot\vec{r}'}{r}} d^2 r'$$

setze $\vec{\kappa} = \kappa \frac{\vec{r}}{r} = \kappa \vec{e}_r$

→ gibt Fraunhofer'sche Beugungsformel

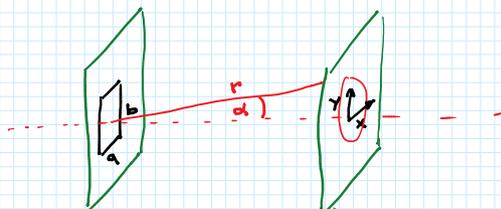
$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_{\text{ein}} \frac{e^{i\kappa r}}{r} \int_{\mathbb{R}^2} T(\vec{r}') e^{-i\vec{\kappa}\cdot\vec{r}'} d^2 r'$$

Kugelwelle

Fouriertransformation (FT)
der Blendenfunktion: $\vec{T}(\vec{\kappa})$

Interpretation: Beugungsbild ist gegeben durch die Fouriertransformierte der Blendenöffnung

1. Beugung am rechteckigen Spalt



FT der Blendenfunktion

$$\int T(x, y) e^{-i\mathbf{k} \cdot \vec{r}} d^2r' = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{-i\mathbf{k} \cdot \vec{r}} dy' dx'$$

$$\vec{r} \cdot \vec{r}' = xx' + yy'$$

$$= \left(\int_{-a/2}^{a/2} e^{-i\frac{k_x}{r} xx'} dx' \right) \left(\int_{-b/2}^{b/2} e^{-i\frac{k_y}{r} yy'} dy' \right)$$

$$= \left(-\frac{r}{ik_x} \right) \left(e^{-i\frac{k_x}{r} x \frac{a}{2}} - e^{i\frac{k_x}{r} x \frac{a}{2}} \right) \left(-\frac{r}{ik_y} \right) \left(e^{-i\frac{k_y}{r} y \frac{b}{2}} - e^{i\frac{k_y}{r} y \frac{b}{2}} \right)$$

$$= \frac{2 \sin\left(\frac{k_x}{r} \frac{a}{2}\right)}{\frac{k_x}{r}} \frac{2 \sin\left(\frac{k_y}{r} \frac{b}{2}\right)}{\frac{k_y}{r}}$$

Intensität des Lichtstrahls

- Poyntingvektor

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} \frac{k}{k} \vec{E} \frac{E}{c} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E^2 \frac{k}{k}$$

→ quadrieren

$$I = |\vec{S}| \sim 16 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \left[\frac{\sin\left(\frac{k_x}{r} \frac{a}{2}\right)}{\frac{k_x}{r}} \right]^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{k_y}{r} \frac{b}{2}\right)}{\frac{k_y}{r}} \right]^2$$

oft wird $\frac{x}{r}$ durch Winkel α ersetzt (analog $\frac{y}{r} \rightarrow \beta$)

Beugungsbild des rechteckigen Spalts

Minima: $\sin\left(\frac{k_x}{r} \frac{a}{2}\right) = 0 \Rightarrow \frac{k_x}{r} \frac{a}{2} = n_x \pi$
 $n_x \in \mathbb{Z}$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_{min} = \frac{2\pi}{k} \frac{r}{a} n_x = \frac{\lambda}{a} r n_x \\ y_{min} = \dots = \frac{\lambda}{b} r n_y \end{cases}$$

Bem: Minima sind weiter voneinander entfernt für langwelliges (rotes) Licht als für kurzwelliges (blau)

Winkelabhängigkeit

$$d_{min} \approx \sin d_{min} = \frac{x_{min}}{r} = \frac{\lambda}{a} n_x \quad n_x = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

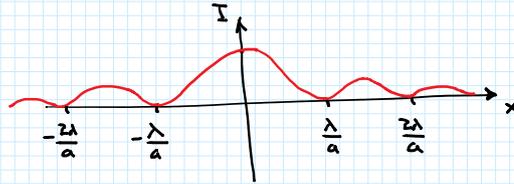
Diskussion für $n_x, n_y = 0$

- FT hat Form $\frac{\sin(Ax)}{x}$

- Grenzfall $x \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(Ax)}{x} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{A \cos(Ax)}{1} = A$$

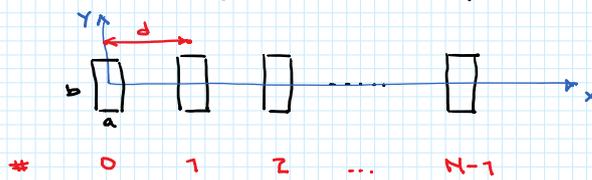
→ keine Auslöschung bei $x, y = 0$ (bzw. $n_x, n_y = 0$)



$$I \sim \frac{1}{h_x^2} \frac{1}{h_y^2} \quad (\text{für } n_x, n_y \neq 0)$$

2. Beugung am Vielfachspalt

- betrachte N identische Spalte



- Beugungsintegral (FT der Blendenfunktion)

$$\tilde{T}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} T(x', y') e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}'} d^2 r'$$

$$T(x', y') = \begin{cases} 1 & \text{für } \begin{cases} -\frac{a}{2} + ld \leq x' \leq \frac{a}{2} + ld \\ -\frac{b}{2} \leq y' \leq \frac{b}{2} \end{cases} \text{ mit } l = 0, \dots, N-1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{l=0}^{N-1} \int_{-\frac{a}{2} + ld}^{\frac{a}{2} + ld} e^{-i\frac{k_x}{r} x'} dx' \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} e^{-i\frac{k_y}{r} y'} dy'$$

- substitution $x'' = x' - ld$

$$\tilde{T}(x, y) = \sum_{l=0}^{N-1} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\frac{k_x}{r} (x'' + ld)} dx'' \frac{2 \sin\left(\frac{k_y}{r} \frac{b}{2}\right)}{\frac{k_y}{r}}$$

$$= \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i\frac{k_x}{r} ld} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-i\frac{k_x}{r} x''} dx'' \frac{2 \sin\left(\frac{k_y}{r} \frac{b}{2}\right)}{\frac{k_y}{r}}$$

$$\tilde{T}(x, y) = \left[\sum_{l=0}^{N-1} \left(e^{-i\frac{k_x}{r} ld} \right)^l \right] \frac{2 \sin\left(\frac{k_x}{r} \frac{a}{2}\right)}{\frac{k_x}{r}} \frac{2 \sin\left(\frac{k_y}{r} \frac{b}{2}\right)}{\frac{k_y}{r}} \quad (*)$$

Strukturfaktor
Spaltfunktion
Formfaktor

- Teilsumme der ges. Reihe

Behauptg.: $\sum_{l=0}^{N-1} z^l = \frac{1-z^N}{1-z} \quad | \cdot (1-z)$

Beweis: $\sum_{l=0}^{N-1} z^l (1-z) = \sum_{l=0}^{N-1} z^l - \sum_{l=1}^N z^l = 1 - z^N$

∇ Gilt auch für $z=1$ ($\Leftrightarrow x=0$)

Bew: $\sum_{l=0}^{N-1} 1^l = N$

$\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1-z^N}{1-z} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \frac{-N}{-1} = N$

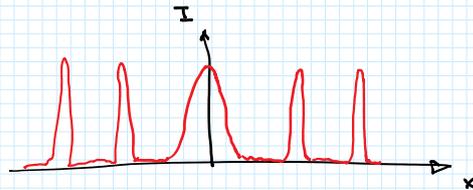
- Einsetzen in Transmissionsfunktion (*)

$\tilde{T}(x,y) = ab \frac{1 - e^{-i\frac{kx}{r}d}}{1 - e^{-i\frac{kx}{r}d}} \frac{\sin\left(\frac{kx}{r}\frac{a}{2}\right)}{\frac{kx}{r}\frac{a}{2}} \frac{\sin\left(\frac{ky}{r}\frac{b}{2}\right)}{\frac{ky}{r}\frac{b}{2}}$

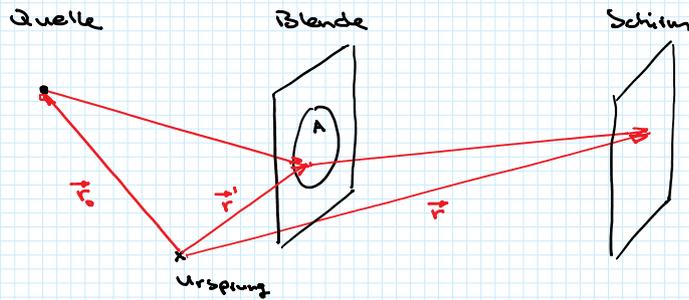
check ∇

- Intensität

$I = I_0 \tilde{T}^2 = I_0 a^2 b^2 \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{kx}{2r}d\right)}{\sin^2\left(\frac{kx}{2r}d\right)}}_{\text{Interferenz d. Spalte}} \underbrace{\frac{\sin^2\left(\frac{kx}{r}\frac{a}{2}\right) \sin^2\left(\frac{ky}{r}\frac{b}{2}\right)}{\left(\frac{kx}{r}\frac{a}{2}\right)^2 \left(\frac{ky}{r}\frac{b}{2}\right)^2}}_{\text{Beugungsbild (eines Spalts)}}$



T 4.5.3. Kirchhoff'sche Beugungstheorie



• Ausgangspunkt

Wellengleichung $\Delta E(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0$

[nur eine Komponente betrachtet]

harmonische Zeitabhängigkeit

$E(\vec{r}, t) = E(\vec{r}) e^{i\omega t}$

[nur eine Frequenz]

→ Helmholtzgleichung $\boxed{(\Delta + \kappa^2) E(\vec{r}) = 0}$ $\kappa = \frac{\omega}{c}$

Kirchhoffs Idee

- Berechnung des Feldes $E(\vec{r})$ am Ort des Schirms aus dem Feld der Blendenöffnung $E(\vec{r}')$

damit: Integration über Volumen
 → Integration über Fläche

(Unterschied zu Fraunhofer: hier beliebige \vec{r} , nicht nur Fernfeld)

• Greensche Funktion

- Lsg. des folgenden Helmholtzgl.

$$(\Delta_{\vec{r}} + \kappa^2) G(\vec{r} - \vec{r}') = -\delta(\vec{r} - \vec{r}')$$

- Greensche Fkt. - Kugelwelle

$$G(\vec{r} - \vec{r}') = \frac{e^{i\kappa|\vec{r} - \vec{r}'|}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

- Vertauschung $\vec{r} \leftrightarrow \vec{r}'$

$$(\Delta_{\vec{r}'} + \kappa^2) G(\vec{r}' - \vec{r}) = -\delta(\vec{r}' - \vec{r})$$

- Greenscher Satz

Spezielle Form des Gaußschen Satzes:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) d^3r = \oint \vec{B}(\vec{r}) \cdot d\vec{a} \quad (*)$$

$d\vec{a} = \vec{n} da$

Wähle hier $\vec{B}(\vec{r}) = g(\vec{r}) \vec{\nabla} h(\vec{r})$

Produktregel $\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = \vec{\nabla} \cdot (g(\vec{r}) \vec{\nabla} h(\vec{r}))$
 $= (\vec{\nabla} g) \cdot (\vec{\nabla} h) + g \Delta h(\vec{r})$

$$\left. \begin{aligned} &\sum_i \partial_i (g \partial_i h) \\ &= \sum_i [\partial_i g (\partial_i h) + g \partial_i^2 h] \end{aligned} \right\}$$

in Gauß (*)

$$\boxed{\int_V [(\vec{\nabla} g) \cdot (\vec{\nabla} h) + g \Delta h] d^3r = \oint_A g(\vec{\nabla} h) \cdot d\vec{a}} \quad (**)$$

1. Greensche Identität

- Spezialfall $g(\vec{r}) = 1$

$$\int_V \Delta h d^3r = \oint_A \vec{\nabla} h \cdot d\vec{a}$$

- Vertausche in (**) $g(\vec{r})$ und $h(\vec{r})$

$$\int_V [(\vec{\nabla} h) \cdot (\vec{\nabla} g) + h \Delta g] d^3r = \oint_A h(\vec{\nabla} g) \cdot d\vec{a} \quad (***)$$

- Differenz (**) - (***)

$$\boxed{\int_V [g \Delta h - h \Delta g] d^3r = \oint (g \vec{\nabla} h - h \vec{\nabla} g) \cdot d\vec{a}} \quad (***)$$

$$\int_V [g \Delta h - h \Delta g] d^3 r = \oint_A (g \vec{\nabla} h - h \vec{\nabla} g) \cdot d\vec{a} \quad (***)$$

George Green
1828

2. Greensche Identität / Green'sches Satz

- Berechnung des elektr. Feldes

Verwende Green'schen Satz (***) , wähle

$$g(\vec{r}) = E(\vec{r}) \quad \text{und} \quad h(\vec{r}) = G(\vec{r} - \vec{r}')$$

$$\begin{aligned} & \int_V [E(\vec{r}) \Delta_{\vec{r}} G(\vec{r} - \vec{r}') - G(\vec{r} - \vec{r}') \Delta_{\vec{r}} E(\vec{r})] d^3 r \\ \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{Helmholtzgl.} \\ \text{für } E, G}}{=} & \int_V [E(\vec{r}) (-\delta(\vec{r} - \vec{r}') - \kappa^2 G(\vec{r} - \vec{r}')) - G(\vec{r} - \vec{r}') (-\kappa^2 E(\vec{r}))] d^3 r \\ = & - \int_V E(\vec{r}) \delta(\vec{r} - \vec{r}') d^3 r \\ = & -E(\vec{r}') \stackrel{\substack{(***) \\ \text{Green}}}{=} \oint_A [E(\vec{r}) \vec{\nabla}_{\vec{r}} G(\vec{r} - \vec{r}') - G(\vec{r} - \vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}} E(\vec{r})] \cdot d\vec{a} \end{aligned}$$

- Vertausche \vec{r} und \vec{r}'

$$E(\vec{r}) = \oint_A [G(\vec{r}' - \vec{r}) \vec{\nabla}_{\vec{r}'} E(\vec{r}') - E(\vec{r}') \vec{\nabla}_{\vec{r}'} G(\vec{r}' - \vec{r})] \cdot d\vec{a}'$$

Kirchhoffsche Formel

- Diese Formel gibt das elektr. Feld an einem beliebigen Punkt des Volumens V an
- Entspricht einer genaueren Fassung des Huygens'schen Prinzips
- Allerdings, ist es nur eine Umformulierung des Problems, keine Lösung $\rightarrow \nabla$ Integralgleichung ∇

Kirchhoffsche Annahmen

- (1) Beim Oberflächenintegral tragen nur Werte von $E(\vec{r})$ in der Öffnung bei
- (2) In der Öffnung sei $E(\vec{r})$ so gegeben, als ob sich das Licht von der Punktquelle bei \vec{r}_0 als Kugelwelle ausbreiten würde

$$E(\vec{r}') = \frac{E_0}{4\pi} \frac{e^{i\kappa|\vec{r}' - \vec{r}_0|}}{|\vec{r}' - \vec{r}_0|}$$

Abstände

- Quelle - Blende / Öffng. $r_Q = |\vec{r}' - \vec{r}_0|$
- Blende - Schirm $r_S = |\vec{r} - \vec{r}'|$

Kirchhoffsche Formel:

Kirchhoffsche Formel:

$$E(\vec{r}) = \frac{E_0}{4\pi} \int \left[\underbrace{\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}}_{\text{Abstände}} \nabla'_{\vec{r}'} \left(\frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}'-\vec{r}_0|} \right) - \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} \nabla'_{\vec{r}'} \left(\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \right] \cdot d\vec{a}'$$

→ $E(\vec{r})$ vollständig bestimmt

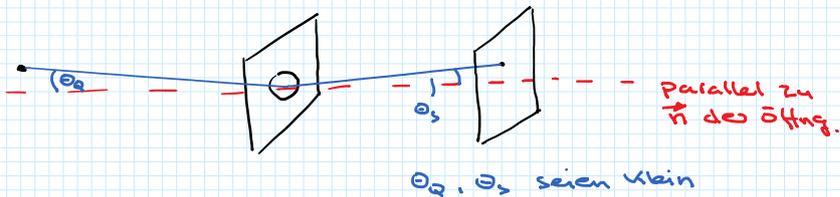
Bem: Kugelwelle ist Greensche Fkt. des Helmholtzgl. (T 3.3.2)

vgl. mit Fraunhofer (T 4.5.1)

Reziprozitätssatz der Beugungstheorie

Eine Vertauschung von Quelle (\vec{r}_0) und Schirm (\vec{r}) führt nur zu einem Vorzeichenwechsel.

Vereinfachung für Fernfeld und kleine Winkel



Fernfeld $|\vec{r}|, |\vec{r}_0| \gg |\vec{r}'|$ (Ursprung in Blendenöffnung.)

Kirchhoff:

$$\nabla'_{\vec{r}'} \frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}|}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} = \left(ik - \frac{1}{|\vec{r}'-\vec{r}|} \right) \frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}|}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} \frac{\vec{r}'-\vec{r}}{|\vec{r}'-\vec{r}|}$$

ähnlich für $|\vec{r}'-\vec{r}_0|$

Bem: verschiedene Näherungen, vgl. Jackson 10.5

hier $|\vec{r}'-\vec{r}| \gg \lambda$, damit wird aus Klamme: ik

$$\Rightarrow E(\vec{r}) \approx \frac{E_0}{4\pi} \int_{\text{Blende}} \frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}|}}{|\vec{r}'-\vec{r}|} \frac{e^{ik|\vec{r}'-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}'-\vec{r}_0|} (-ik) \left(\frac{\vec{r}_0-\vec{r}'}{|\vec{r}_0-\vec{r}'|} - \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \right) \cdot d\vec{a}$$

$$E(\vec{r}) \approx -ik \frac{E_0}{4\pi} \int_{\text{Blende}} \frac{e^{ikr_s}}{r_s} \frac{e^{ikr_Q}}{r_Q} \underbrace{\left(\frac{\vec{r}_0-\vec{n}}{r_Q} - \frac{\vec{r}_s-\vec{n}}{r_s} \right)}_{(++)} da$$

$d\vec{a} = \vec{n} da$

(berücksichtigt die verkleinerte Blendenöffnung bei schrägem Einfall)

betrachte $(++)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\vec{r}_0 \cdot \vec{n}}{r_Q} &= \cos \theta_Q \\ \frac{\vec{r}_s \cdot \vec{n}}{r_s} &= \cos(\pi - \theta_s) = -\cos \theta_s \end{aligned} \right\} \begin{aligned} (++) \text{ wird} \\ \cos \theta_Q + \cos \theta_s \\ \approx 2 \end{aligned}$$

(kleine Winkel $\cos \theta \approx 1$)

Damit entspricht die erhaltene Formel der leicht verbesserten

Fraunhofer'schen Näherung (Richtig, des Quelle geht ein)

Kirchhoff'sche Theorie:

- praktisch sehr oft benutzte Beugungstheorie
- hat mathematische Inkonsistenzen

→ vektorielle Beugungstheorie (Jackson)

Prinzip von Babinet

Lit: Jackson 10.8

Vertausche Blende mit Hindernis



$E(\vec{r})$



$E_{\text{Komp}}(\vec{r})$

Komplementäre
Beugungsausbreitungen

$$E_{\text{ein}}(\vec{r}) = E(\vec{r}) + E_{\text{Komp}}(\vec{r})$$

$$\boxed{E_{\text{Komp}}(\vec{r}) = E_{\text{ein}}(\vec{r}) - E(\vec{r})}$$

⚠ gilt i.A. für E-feld aber nicht für Intensitäten

■ Beugung an Tröpfchen

→ Höfe um Sonne und Mond (Nebel)

vgl. Sommerfeld Optik, Kap. 5 Einleitg.