An welche Stichwörter von der letzten Vorlesung können Sie sich noch erinnern?

Die elektromagnetische Strahlung ist quantisiert und existiert nur in Vielfachen des Lichtquantums - Photonen.

Der Photoeffekt: Das Photon einer Lichtwelle der Frequenz f hat die Energie: $E = hf = \hbar\omega$

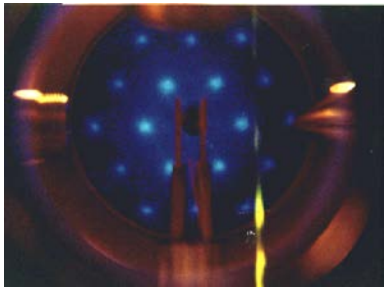
$$V_{\text{stop}} = \frac{h}{e} f - \frac{\Phi}{e}$$

Der Compton-Effekt:
Ein Photon hat auch ein Impulses: $p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\phi)$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Photon an einem gegebenen Punkt in einer Lichtwelle nachgewiesen wird, ist proportional zum Quadrat der Amplitude des elektrischen Feldvektors der Welle an diesem Punkt.
Bei der Emission eines Photons von einem Molekül aus breitet sich eine Wahrscheinlichkeitswelle in alle Richtungen aus.

Jedes einzelne Elektron breitet sich als Materiewelle: $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{2\pi\hbar}{p}$



35.6 Die Schrödinger-Gleichung

Lichtwellen wird durch die elektrische Feldstärke der Welle beschrieben.
Materiewellen – durch die komplexe Wellenfunktion $\Psi(x,y,z,t)$.
Wir nehmen an: $\Psi(x,y,z,t)=\psi(x,y,z)\exp(-i\omega t)$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Teilchen in einem bestimmten Zeitintervall von einem Detektor nachgewiesen wird, ist proportional zu $\psi\psi^* = |\psi|^2$

Die Wahrscheinlichkeit (pro Zeiteinheit), ein Teilchen in einem kleinen Volumen um einen gegebenen Punkt in einer Materiewelle nachzuweisen, ist proportional zu dem Wert von $|\psi|^2$ an diesem Punkt.

Analogie zur Maxwell-Gleichung? Für die Wellenfunktion ψ gilt die stationäre **Schrödinger-Gleichung:**

$$\boxed{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U(x)\psi=E\psi}$$

$$(K+U=E)$$

Für ein freies Teilchen U=0,

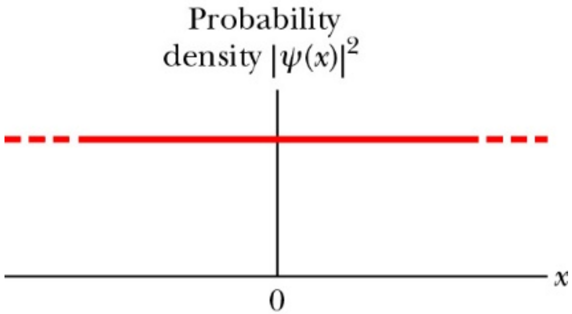
$$E\psi+\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \Rightarrow \frac{d^2\psi}{dx^2}+k^2\psi=0$$

Die Lösung: $\psi = A\exp(-ikx)+\cancel{B\exp(+ikx)}$ $\qquad k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$

de Broglie: $\lambda=\frac{2\pi\hbar}{p}\Rightarrow k=\frac{2\pi}{\lambda}=\frac{p}{\hbar}$ $\qquad \Leftrightarrow \qquad$ $E=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow p=\sqrt{2mE}\Rightarrow k=\frac{p}{\hbar}$

35.7 Die Heisenbergsche Unschärferelation

$$\psi = A\exp\left(-i\frac{\boxed{p}}{h}x\right) \qquad \psi\psi^* = |\psi|^2 = |A|^2 = const$$



Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist für alle x-Werte dieselbe, das Teilchen kann also mit *derselben* Wahrscheinlichkeit an *jedem* Punkt der x-Achse beobachtet werden.

Die **Heisenbergsche Unschärferelation**: man kann *nicht* einem Teilchen *gleichzeitig* mit beliebiger Genauigkeit einen *Ort* r und einen *Impuls* p zuschreiben.

Matematische Formulierung der Heisenbergschen Relation:

$$\langle \Delta x^2 \rangle \cdot \langle \Delta p_x^2 \rangle \geq \frac{1}{4}\hbar^2$$

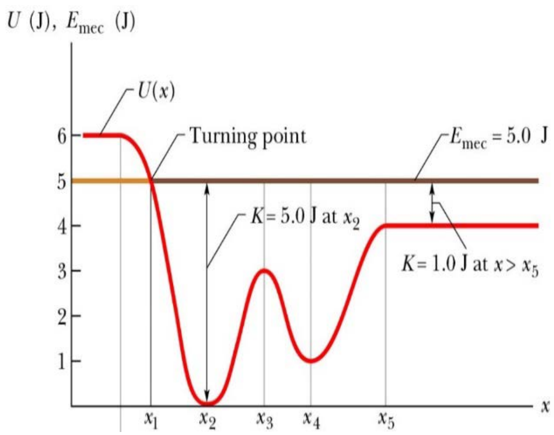
$$\boxed{\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar}$$

Eine ähnliche Relation gibt es auch für Energie und Zeit:

$$\Delta E \cdot \Delta t > \hbar$$

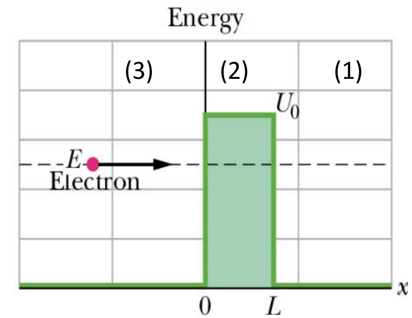
In der klassischen kinetischen Theorie haben wir angenommen, dass sich das Teilchen in Wirklichkeit an einem wohldefinierten Ort befindet, der uns aber verborgen ist.
QM: Wenn der Impuls eines Teilchens mit absoluter Sicherheit angegeben werden kann, verlieren die Worte „Ort des Teilchens“ jegliche Bedeutung. Das Teilchen kann mit gleicher Wahrscheinlichkeit überall auf der x-Achse gefunden werden.

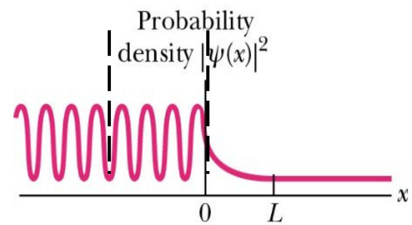
35.8 Der Tunneleffekt



Physik I: wenn E < U, wird ein klassisches Teilchen von der Potenzialschwelle (Barrier) reflektiert und wieder in die Richtung zurücklaufen, aus der es gekommen ist.

QM: für ein Elektron (Materiewelle!) besteht eine gewisse Wahrscheinlichkeit, dass es durch die Barriere „durchtunnelt“ und auf der anderen Seite auftaucht.





Die Wellenfunktion $\psi(x)$ für das Elektron erhält man, indem man die Schrödinger-Gleichung für die drei Bereiche getrennt löst:

(1) rechts von der Barrier. (2) innerhalb der Barrier (3) auf der linken Seite der Barrier;

(1) $x>L$: $U=0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \qquad \psi = A\exp\left(-i\frac{p}{h}x\right); \qquad p=\sqrt{2mE}$$

(2) $0<x<L$: $U=U_0>E$

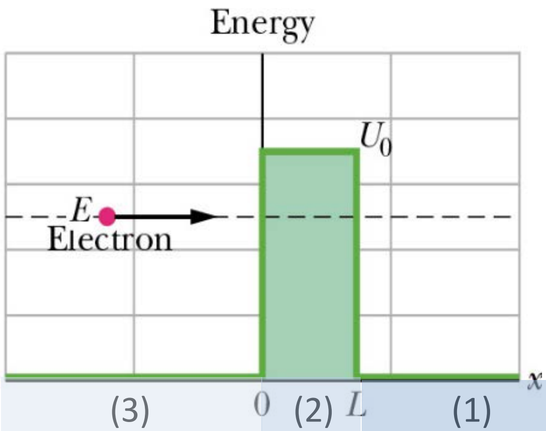
$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2m(E-U_0)}{\hbar^2}\psi=0 \Rightarrow \psi = C\exp\left(-i\frac{\sqrt{2m(E-U_0)}}{h}x\right)=C\exp\left(-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{h}x\right)$$

reeller Exponent!!!

(3) $x<0$: $U=0$

$$\frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \qquad \psi = D\exp\left(-i\frac{p}{h}x\right)+B\exp\left(+i\frac{p}{h}x\right)$$

stehende Welle



$$D\exp\left(-i\frac{p}{h}x\right)+ +B\exp\left(+i\frac{p}{h}x\right)$$

$$A\exp\left(-i\frac{p}{h}x\right)$$

$$C\exp\left(-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{h}x\right)$$

Die freien Konstanten in der Lösung können so gewählt werden, dass die Werte von ψ(x) (und ihrer ersten Ableitung nach x) an den Stellen x = 0 und x = L glatt ineinander übergehen. Das Absolutquadrat von ψ(x) liefert dann die Wahrscheinlichkeitsdichte.

$$C\exp\left(-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}L\right)=A\exp\left(-i\frac{p}{\hbar}L\right)$$

$$\left|C\exp\left(-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}L\right)\right|=\left|A\exp\left(-i\frac{p}{\hbar}L\right)\right|=|A|$$

$$|A|\propto\exp\left(-\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}L\right)$$

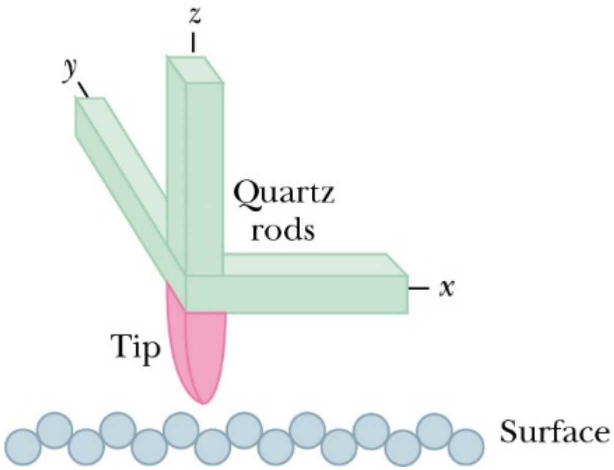
Die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Elektron durch die Barriere hindurchtritt, ist der *Transmissionskoeffizient* T $\propto |A|^2$

$$\boxed{T\propto\exp\left(-2\frac{\sqrt{2m(U_0-E)}}{\hbar}L\right)}$$

Anwendungen des Tunneleffekts: Tunneldiode, Josephson-Kontakte in Supraleitern.

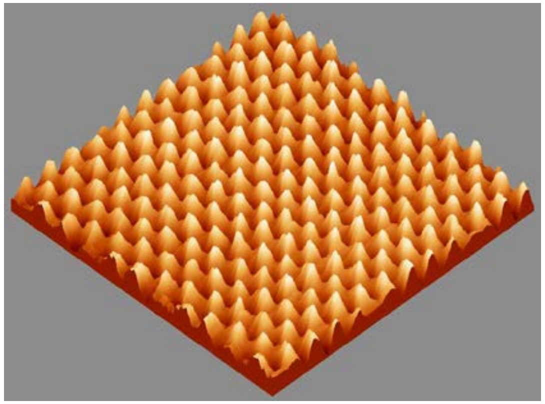
Gerd Binning und Heinrich Rohrer, der Nobelpreis 1986 : das Raster-Tunnelmikroskop - Scanning Tunneling Microscope (STM).

Das *Raster-Tunnelmikroskop*



Auflösung eine optischen Mikroskops $\lambda/2$=250 nm. Besser?

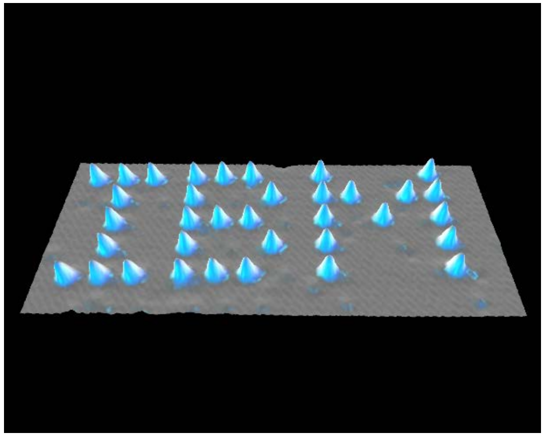
Kristallquarz ist ein piezoelektrisches Medium : legt man eine elektrische Spannung an, verändern sich die Abmessungen der Probe. Damit kann man eine Metallspitze über die Oberfläche gleiten (in x- und y-Richtung) und gleichzeitig ihren Abstand zur Oberfläche verändern (in z-Richtung).



Der schmale Spalt zwischen der Oberfläche und der Metallspitze bildet eine Barriere. Ist die Spitze nahe genug an der Oberfläche, können Elektronen aus der Probe durch diese Barriere auf die Metallspitze tunneln und so einen Tunnelstrom erzeugen.

Über eine elektronische Rückkopplung wird die vertikale Position der Spitze so eingestellt, dass der Tunnelstrom konstant bleibt, während die Spitze die Oberfläche abtastet.

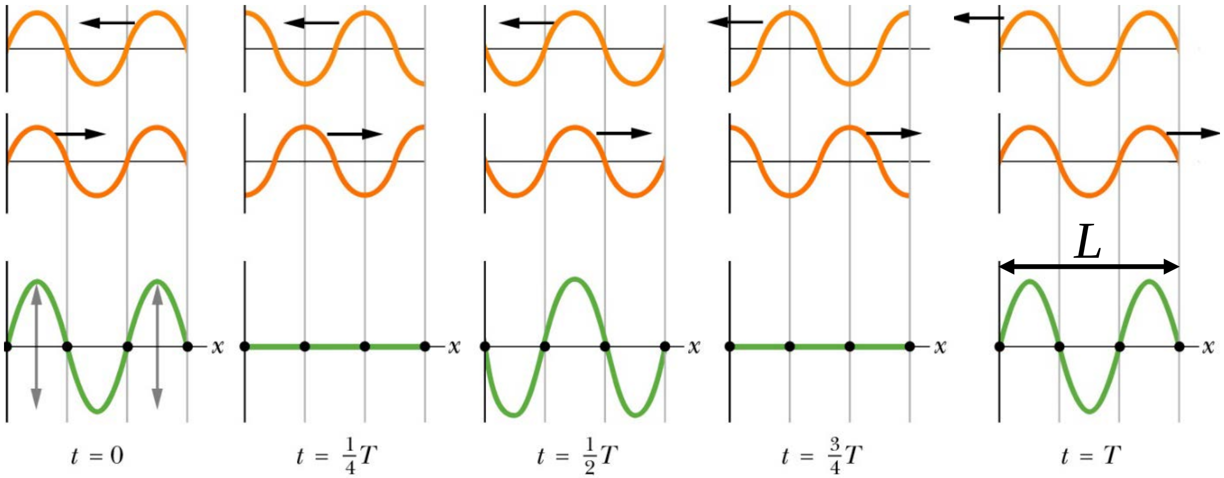
$$I \propto T \propto \exp\left(-2\frac{\sqrt{2m\left(U_0 - E\right)}}{h}L\right)$$



Damit bleibt aber auch der Abstand Spitze-Oberfläche konstant. Das Ergebnis ist eine Karte der unterschiedlichen vertikalen Positionen der Spitze und damit von der Kontur der Oberfläche als Funktion des Orts in der xy-Ebene.

35.9 Die Energie eines Elektrons in einer Elektronenfalle

Eine Welle in einem endlichen Raumgebiet ist quantisiert, d. h., es gibt einen diskreten Satz von Zuständen mit diskreten Energien. Die Welle kann nur diese Energien haben.



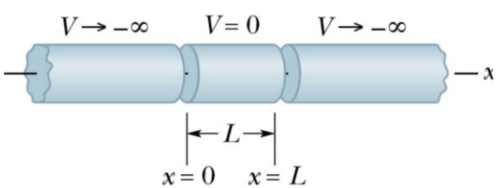
Physik I: stehende Wellen

$$y(x,t) = A\sin kx \cos \omega t$$

$$\sin kL = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L}; \lambda_n = \frac{2L}{n}$$

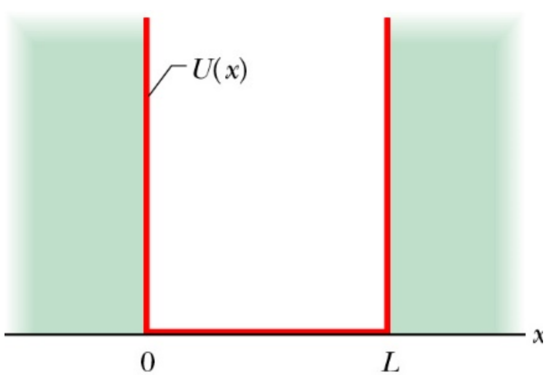
n ist die Quantenzahl.

$$y_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$



Eindimensionale Elektronenfalle: entsprich einem unendlich hohen Kastenpotenzial (oder auch unendlich hohen -oder tiefen – Potenzialtopf). Die Wellenfunktion eines Elektrons ist im Potenzialtopf begrenzt.

$$\psi_n(x) = A\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$



$$\sqrt{2mE_n} = p_n = \hbar k_n = \hbar\frac{n\pi}{L} \Rightarrow \boxed{E_n = \frac{1}{2m}\left(\hbar\frac{n\pi}{L}\right)^2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2}$$

Da das Elektron in der Falle lokalisiert ist, kann es nur bestimmte Energien haben.