

Blatt 3**Aufgabe 1:**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -(\sin(t^3) + 3t^3 \cos(t^3))x(t), \quad x(0) = 1$$

auf dem Intervall $t \in [0, 3]$. Finden Sie die Näherungslösungen mit

a) dem Runge-Kutta Verfahren Ordnung 2 (Heun's Methode) mit $h = \{1e-2, 1e-3, 1e-4\}$;

b) dem klassischen Runge-Kutta Verfahren Methode Ordnung 4 mit $h = \{1e-2, 1e-3, 1e-4\}$;

c) dem Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren 4(5) mit der kleinen Tolleranz ε_0 und $h = 1e-3$.

Berechnen Sie den globalen Diskretisierungsfehler am Endpunkt.

Aufgabe 2: Räuber-Beute-Modell

Betrachtet wird das System

$$\begin{aligned}\dot{x} &= ax - bxy, \\ \dot{y} &= cxy - dy.\end{aligned}$$

Hier x ist dimensionslose Anzahl der Beutetiere und y ist dimensionslose Anzahl der Räubertiere, $a, b, c, d > 0$, $b < 1$.

1) Lösen Sie das System mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren (4) auf dem Intervall $t \in [0, 50]$ mit

a) $x(0) = 5000$, $y(0) = 120$;

b) $x(0) = 3000$, $y(0) = 100$.

Interpretieren Sie das Ergebniss.

Konstanten: $a = 2$, $b = 0.02$, $c = 0.0002$, $d = 0.8$.

2) Nehmen Sie nun an, dass die Beutetiere sich periodisch in Zeit vermehren, d.h.,

$$a := a(1 + \epsilon \sin(\omega t)).$$

Sei $\omega = \pi$. Was passiert mit der Lösung des Systems, wenn man die Amplitude ϵ variiert? ($\epsilon \in [0, 1)$)