Blatt 3

Aufgabe 1:

Betrachten Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = -\big(\sin(t^3) + 3\,t^3\,\cos(t^3)\big)x(t)\,, \qquad x(0) = 1$$

auf dem Intervall $t \in [0,\,3]$. Finden Sie die Närungslösungen mit

a) dem Runge-Kutta Verfahren Ordnung 2 (Heun's Methode) mit
$h = \{1e-2,\;\; 1e-3,\;\; 1e-4\}$;

b) dem klassschen Runge-Kutta Verfahren Methode Ordnung 4 mit
$h = \{1e-2,\, 1e-3,\, 1e-4\}$;

c) dem Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren 4(5) mit der kleinen Tolleranz ε_0 und $h = 1e-3$.

Berechnen Sie den globalen Diskretisierungsfehler am Endpunkt.

Aufgabe 2: Räuber-Beute-Modell

Betrachtet wird das System

$$\begin{aligned} \dot{x} &= a\,x - b\,x\,y\,, \\ \dot{y} &= c\,x\,y - d\,y\,. \end{aligned}$$

Hier x ist dimensionslose Anzahl der Beutetiere und y ist dimensionslose Anzahl der Räubertiere, a, b, c, $d > 0$, $b < 1$.

1) Lösen Sie das System mit dem klassischen Runge-Kutta Verfahren (4) oder mit dem Runge-Kutta-Fehlberg Verfahren 4(5) auf dem Intervall $t \in [0,\,50]$ mit
a) $x(0) = 5000$, $y(0) = 120$;
b) $x(0) = 3000$, $y(0) = 100$.
Interpretieren Sie das Ergebniss.
Konstanten: $a = 2$, $b = 0.02$, $c = 0.002$, $d = 0.8$.

2) Nehmen Sie nun an, dass die Beutetiere sich periodisch in Zeit vermehren, d.h.,

$$a := a\,(1 + \epsilon\,\sin(\omega\,t))\,.$$

Sei $\omega = \pi$. Was passiert mit der Lösung des Systems, wenn man die Amplitude ϵ variiert? ($\epsilon \in [0,\,1)$)