Blatt 12

Aufgabe 1: Wärmeleitungsgleichung in 1D mit der FTCS-Methode

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = u_{xx}\,, \tag{1}$$

auf dem Intervall $x \in [0,\, L]$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ und Dirichlet-Randbedingungen $u(0,\, t) = T_l$, $u(L,\, t) = T_r$. Lösen Sie Gl. (1) mit dem expliziten FTCS-Verfahren.

Space interval	$L = 1$
Amount of space points	$M = 10$
Amount of time steps	$T = 30$
Boundary conditions	$T_l = T_r = 0$
Initial heat distribution	$f(x) = 4x(1-x)$

Aufgabe 2: Diffusionsgleichung in 1D mit der BTCS-Methode

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die Diffusionsgleichung

$$u_t = u_{xx}\,,$$

auf dem Intervall $x \in [-L,\, L]$ mit der Anfangsbedingung $u(x,\, 0) = \exp(-x^2)$ und Randbedingungen $u_x(-L,\, t) = u_x(L,\, t) = 0$. Lösen Sie das Problem mit dem impliziten BTCS-Verfahren.

Space interval	$L = 5$
Space discretization step	$\triangle x = 0.1$
Time discretization step	$\triangle t = 0.05$
Amount of time steps	$T = 200$

Aufgabe 3: Wärmeleitungsgleichung in 1D mit der Crank-Nicolson-Methode

Betrachten Sie nun das Anfangswertproblem für die Wärmeleitungsgleichung

$$u_t = 1.44\, u_{xx}\,, \tag{2}$$

auf dem Intervall $x \in [0,\, L]$ mit der Anfangsbedingung $u(x,0) = f(x)$ und Dirichlet-Randbedingungen $u(0,\, t) = T_l$, $u(L,\, t) = T_r$. Lösen Sie Gl. (2) mit dem Crank-Nicolson-Verfahren.

Space interval	L=1
Space discretization step	$\triangle x = 0.1$
Time discretization step	$\triangle t = 0.05$
Amount of time steps	$T = 15$
Boundary conditions	$T_l = 2$, $T_r = 0.5$
Initial heat distribution	$f(x) = 2 - 1.5x + \sin(\pi x)$

Aufgabe 4: Diffusionsgleichung in 2D mit der ADI-Methode

Betrachten Sie die Diffusionsgleichung

$$\partial_t u(\mathbf{r},\, t) = \triangle u(\mathbf{r},\, t)\,, \tag{3}$$

wobei $u = u(\mathbf{r},\, t)$, $\mathbf{r} \subseteq \mathbb{R}^2$ auf dem Intervall $r \in [0,\, L] \times [0,\, L]$. Die Anfangsverteilung ist gegeben durch

$$u(x, 0) = \exp\left(-20\left((x - L/2)^2 + (y - L/2)^2\right)\right),$$

und die Randbedingungen sind

$$\partial_r u(0,\, t) = \partial_r u(L,\, t) = 0\,.$$

Lösen Sie die Gl. (3) mit Hilfe des ADI-Verfahrens.

`Space interval`	$L = 1$
`Amount of points`	$M = 100$, $(\triangle x = \triangle y)$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.001$
`Amount of time steps`	$T = 40$