

Blatt 11**Aufgabe 1: Sine-Gordon-Gleichung**

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die sine-Gordon-Gleichung:

$$u_{tt} - u_{xx} + \sin u = 0, \quad (1)$$

auf $x \in [-L, L]$ mit

$$u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad (2)$$

und

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=\pm L} = 0.$$

Space interval	$L=20$
Space discretization step	$\Delta x = 0.1$
Time discretization step	$\Delta t = 0.05$
Amount of time steps	$T = 1800$
Velocity of the kink	$c = 0.2$

Lösen Sie Gl. (1) numerisch mit Hilfe der expliziten Methode.

a) Kink-Soliton

$$f(x) = 4 \arctan\left(\exp\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right),$$

$$g(x) = -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right).$$

b) Antikink-Soliton

$$f(x) = 4 \arctan\left(\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right),$$

$$g(x) = -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x}{\sqrt{1-c^2}}\right).$$

c) Kink-Kink-Kollision

$$f(x) = 4 \arctan\left(\exp\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right) + 4 \arctan\left(\exp\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right),$$

$$g(x) = -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right) + 2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right),$$

d) Kink-Antikink-Kollision

$$f(x) = 4 \arctan\left(\exp\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right) + 4 \arctan\left(\exp\left(-\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right)\right),$$

$$g(x) = -2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x+L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right) - 2 \frac{c}{\sqrt{1-c^2}} \operatorname{sech}\left(\frac{x-L/2}{\sqrt{1-c^2}}\right).$$

e) Breather

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \\ g(x) &= 4\sqrt{1-c^2} \operatorname{sech}\left(x\sqrt{1-c^2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 2: Korteweg-de Vries Gleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für die KdV-Gleichung:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 6u \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}, \quad (3)$$

auf $x \in [-L, L]$ mit

$$u(x, 0) = -6 \operatorname{sech}^2(x),$$

und

$$u(-L, t) = u(L, t).$$

a) Untersuchen Sie die Gleichung

$$u_t = -u_{xxx}.$$

Die hier benutzte Diskretisierung ergibt ($u_i^j := u(x_i, t_j)$)

$$u_i^{j+1} = u_i^{j-1} - \frac{\Delta t}{\Delta x^3} \left(u_{i+2}^j - 2u_{i+1}^j + 2u_{i-1}^j - u_{i-2}^j \right).$$

Führen Sie für diesen Algorithmus die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch. Zeigen Sie, dass die folgende Stabilitätsbedingung gilt:

$$\Delta t \leq \frac{1}{m} \Delta x^3, \quad m = \max |\sin(2k \Delta x) - 2 \sin(k, \Delta x)| \approx 2.6.$$

b) Lösen Sie nun die Gl. (3) mit

Space interval	$L = 22$
Space discretization step	$\Delta x = 0.11$
Time discretization step	$\Delta t = 0.0005$
Amount of time steps	$T = 10$