Blatt 10

Aufgabe 1: Eindimensionale Wellengleichung

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine eindimensionale Wellengleichung:

$$u_{tt} = 4\,u_{xx} \quad \text{auf} \quad x \in [0,\, L]\,, \qquad t \in [0, T] \tag{1}$$

mit

$$u(0,\, t) = 0 \qquad u(L,\, t) = 0\,,$$

und

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(\pi x)\,, \quad \text{and} \quad u_t(x, 0) = g(x) = 0\,.$$

a) Lösen Sie Gl. (1) numerisch mit Hilfe der expliziten Methode. Führen Sie erst die von Neumann'sche Stabilitätsanalyse durch.

Space interval	L=10
Space discretization step	$\triangle x = 0.1$
Time discretization step	$\triangle t = 0.05$
Amount of time steps	$T = 20$

b) Lösen Sie nun Gl. (1) mit Anfangsbedingung

$$u(x, 0) = f(x) = 0 \quad \text{and} \quad u_t(x, 0) = g(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,\, x_1], \\ g_0, & x \in [x_1,\, x_2], \\ 0, & x \in [x_2,\, L]\,. \end{cases}$$

Initial velocity	g_0=0.5
Initial space intervals	$x_1 = L/4,\ x_2 = 3L/4$
Space interval	L=10
Space discretization step	$\triangle x = 0.1$
Time discretization step	$\triangle t = 0.05$
Amount of time steps	$T = 400$

Aufgabe 2: Eindimensionale Wellengleichung für die schwingende Saite

Lösen Sie Gl. (1) für $c = 1$ mit Hilfe der expliziten Methode mit

$$u(0,\, t) = 0 \qquad u(L,\, t) = 0\,,$$

und

$$u(x, 0) = f(x) = \sin(n\pi x/L)\,, \quad \text{and} \quad u_t(x, 0) = g(x) = 0\,, \quad n = 1,\, 2,\, \ldots\,, 6\,.$$

Space interval	L=1
Space discretization step	$\triangle x = 0.01$
Time discretization step	$\triangle t = 0.0025$
Amount of time steps	$T = 2000$

Aufgabe 3: Zweidimensionale Wellengleichung

Lösen Sie nun eine zweidimensionale Wellengleichung

$$u_{tt} = c^2(u_{xx} + u_{yy}), \quad u = u(x, y, t)$$

auf dem Gebiet $\Omega = [0, L] \times [0, L]$ mit Dirichlet Randbedingungen mit dem expliziten Verfahren.

`Space interval`	L=1
`Space discretization step`	$\triangle x = \triangle y = 0.01$
`Time discretization step`	$\triangle t = 0.0025$
`Amount of time steps`	$T = 2000$
`Initial condition`	$u(x, y, 0) = 4\, x^2\, y\, (1 - x)\, (1 - y)$