Aufgabe 1: Ableiten mit der zweidimensionalen FFT

Um in einer Dimension ein Feld einmal abzuleiten, genügte es, die Fourierkoeffizienten des Feldes mit der imaginären Einheit und der entsprechenden Wellenzahl zu multiplizieren. Im Falle eines zweidimensionalen Feldes $f(\boldsymbol{x})$ muß ein zweidimensionales, vektorwertiges Feld von Wellenvektoren $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y)$ betrachtet werden. Die Fourierkoeffizienten des Feldes $\tilde{f}$ sind derart angeordnet, dass die Wellenvektoren gemäß

$$k_x(i,j) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L} i & \text{falls} \quad i = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ \frac{2\pi}{L}(-N+i) & \text{falls} \quad i = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

$$k_y(i,j) = \begin{cases} \frac{2\pi}{L} j & \text{falls} \quad j = 0, \dots, \frac{N}{2} \\ \frac{2\pi}{L}(-N+j) & \text{falls} \quad j = \frac{N}{2}+1, \dots, N-1 \end{cases}$$

zu initialisieren sind. L bezeichnet dabei die physikalische Länge des Systems. Falls es sich bei f um ein reelles Feld handelt, muss analog zum eindimensionalen Fall der *array* für die Wellenvektoren nur etwa halb so groß sein, und der Index i läuft nur von $i = 0, \dots, \frac{N}{2}$. Um nun das Feld z.B. nach x abzuleiten, werden die Fourierkoeffizienten mit der imaginären Einheit und dem entsprechenden k_x multipliziert.

a) Initialisieren Sie ein zweidimensionales Feld und versichern Sie sich durch Hin- und Rücktransformation, dass die FFT korrekt arbeitet.

b) Leiten Sie nun ein Feld nach x und y ab. Wenden Sie darüber hinaus den Laplace-Operator auf das Feld an. Vergleichen Sie die Ergebnisse (z.B. mit Hilfe von gnuplot) mit analytischen Vorhersagen.

Aufgabe 2: Swift-Hohenberg-Gleichung

Lösen Sie die zweidimensionale Swift-Hohenberg-Gleichung

$$\partial_t \psi = \epsilon\psi - (\nabla^2 + 1)^2\psi + g\psi^2 - \psi^3,$$

$\psi = \psi(x, y, t)$ mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens auf dem Grundgebiet $[0, 32] \times [0, 32]$. Die Anfangsbedingung ist durch die homogene Lösung $\psi = 0$ zuzüglich Rauschen kleiner Amplitude gegben. Betrachten Sie die Fälle:

a) Streifen: $\epsilon = 0.3$, $g = 0$;

b) Hexagone: $\epsilon = 0.1$, $g = 1$.