Aufgabe 1: Zweidimensionale Wirbeltransportgleichung und Wirbeldynamik

Lösen Sie die zweidimensionale Wirbeltransportgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\boldsymbol{x},t) = \nabla \times \left[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \times \omega(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_z\right] + \nu\Delta\omega(\boldsymbol{x},t)$$

für die Vortizität ω auf einem Grundgebiet der Seitenlänge 2π mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens. Im Fourierraum lautet die Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\omega}(\boldsymbol{k},t) = i\boldsymbol{k} \times \mathcal{F}\left[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \times \omega(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_z\right] - \nu k^2\omega(\boldsymbol{k},t),$$

die Nichtlinearität lässt sich im Ortsraum behandeln. Die Bestimmungsgleichung für das Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{u}$ nimmt die Gestalt einer inhomogenen Poissongleichung an,

$$\nabla \times \omega(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_z = \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = -\Delta\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t),$$

welche sich im Fourierraum leicht invertieren lässt:

$$\tilde{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{k},t) = \frac{i\boldsymbol{k} \times \tilde{\omega}(\boldsymbol{k},t)\boldsymbol{e}_z}{k^2}.$$

Gehen Sie insgesamt wie folgt vor:

a) Machen Sie sich die Struktur der Nichtlinearität deutlich. Wie berechnet man die einzelnen Geschwindigkeitskomponenten? Wie viele skalare oder vektorielle Felder und Fouriertransformationen benötigt man, um diese zu berechnen?

b) Als Zeitschrittverfahren bieten sich mehrere Möglichkeiten an, ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung hat sich aufgrund seiner hohen Genauigkeit und großen Stabilität bewährt. Implementieren Sie zunächst die Gleichung ohne die Nichtlinearität, es handelt sich also dann um eine einfache Wärmeleitungsgleichung. Überprüfen Sie anhand einer graphischen Ausgabe mit Dislin, ob die Ergebnisse Ihren Erwartungen entsprechen.

c) Implementieren Sie nun zusätzlich die Nichtlinearität. Beachten Sie ein korrektes Dealiasing mit Hilfe von Orszags $\frac{2}{3}$-Regel, um Aliasing-Fehler zu unterdrücken.

d) Um das Ergebnis zu testen, simulieren Sie zunächst einen einzelnen Lamb-Oseen-Wirbel (d.h. eine Gaußförmige Anfangsverteilung der Vortizität) mit einem kleinen Zeitschritt (d.h. $\mathcal{O}(10^{-3})$) und einer kleinen Viskosität (d.h. $\mathcal{O}(10^{-2})$) auf einem mit 256 Punkten aufgelösten Gitter. Der Wirbel sollte mit der Zeit diffundieren. Wählen Sie als Anfangsbedingung nun zwei Wirbel. Testen Sie verschiedene Parameter (Amplitude, Vorzeichen der Amplitude, verschiedene Zeitschritte, Viskositäten etc.).