Aufgabe 1: Dipol-Wand-Kollision

Lösen Sie die zweidimensionale Wirbeltransportgleichung in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega(\boldsymbol{x},t) = \nabla \times \left[\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \times \omega(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{e}_z - \frac{1}{\epsilon}H(\boldsymbol{x})\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\right] + \nu\Delta\omega(\boldsymbol{x},t)$$

für die Vortizität ω auf einem Grundgebiet der Seitenlänge 2π mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens. Hierbei ist ϵ die Permeabilität und H die Maskenfunktion, für die gilt

$$H(\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 1 & \text{für } \boldsymbol{x} \text{ innerhalb der Ränder,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Im Limes verschwindender Permeabilität konvergiert die Lösung gegen *no-slip*-Randbedingungen für die Geschwindigkeit.

a) Implementieren Sie die Randbedingungen. Als Zeitschrittverfahren empfiehlt sich ein adaptives, semi-implizites Adams-Bashforth-Schema, in dem der lineare Teil der Gleichung analytisch behandelt wird. Im Fourierraum lautet der Algorithmus dann

$$\begin{aligned}\tilde{\omega}(t_{n+1}) = \tilde{\omega}(t_n)\exp(-\nu\Delta t_{n+1}k^2) + \\ \left(\alpha\tilde{N}[\tilde{\omega}(t_n)] + \beta\tilde{N}[\tilde{\omega}(t_{n-1})]\exp(-\nu\Delta t_n k^2)\right)\exp(-\nu\Delta t_{n+1}k^2)\end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $\tilde{N}$ den nichtlinearen Teil der Gleichung. Die Koeffizienten berechnen sich gemäß

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{1}{2}\frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n}(\Delta t_{n+1} + 2\Delta t_n) \\ \beta &= -\frac{1}{2}\frac{\Delta t_{n+1}^2}{\Delta t_n}\end{aligned}$$

b) Simulieren Sie nun die Kollision eines Wirbeldipols (zwei benachbarte Lambwirbel unterschiedlichen Vorzeichens) mit einer Wand, um den Algorithmus zu testen. Wählen Sie als Randbedingung eine *box* mit einer Dicke von ca. 10-20 Gitterpunkten. Wie verhält sich die Lösung innerhalb des Randes? Welchen physikalischen Einfluß haben die Ränder auf die Vortizität?