Aufgabe 1: Ableiten und Filtern mit der FFT

Mit Hilfe der schnellen Fouriertransformation ist es besonders einfach, Ableitungen von Funktionen zu berechnen oder Signale einer Hoch- oder Tiefpassfilterung zu unterziehen. Dazu ist es wichtig, die Anordnung der Fourierkoeffizienten im transformierten *array* zu beachten. Sei f eine L-periodische Funktion, welche an den Stützstellen $f_1, \ldots, f_N$ gegeben ist. Falls f komplex ist, liegen im transformierten *array* die Fourierkoeffizienten in der Reihenfolge

$$\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{\frac{N}{2}}, \tilde{f}_{-\frac{N}{2}+1}, \tilde{f}_{-\frac{N}{2}+2}, \ldots, \tilde{f}_{-1}$$

vor. Ist f eine reelle Funktion, so haben die Fourierkoeffizienten die Symmetrie $\tilde{f}_{-j} = \tilde{f}_j^*$. Dadurch benötigt man im Fourierraum nur einen nahezu halb so großen *array*, in dem die Fourierkoeffizienten in der Reihenfolge

$$\tilde{f}_0, \tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_{\frac{N}{2}}$$

vorliegen.

a) Machen Sie sich klar: Um eine Ableitung zu berechnen, ist im Fourierraum jeder Fourierkoeffizient mit der entsprechenden Wellenzahl $k(j) = \frac{2\pi}{L} j$ und der imaginären Einheit zu multiplizieren. Schreiben Sie nun ein kurzes Programm, welches eine periodische Funktion im Ortsraum initialisiert, diese fouriertransformiert und im Fourierraum die Ableitung berechnet. Prüfen Sie an einfachen Beispielen, ob sich nach der Rücktransformation in den Ortsraum das richtige Ergebnis ergibt.

b) Um ein Signal einer Hoch- oder Tiefpassfilterung zu unterziehen, kann man im einfachsten Fall einen Filter verwenden, der die Fourierkoeffizienten unter- oder oberhalb einer bestimmten Wellenzahl k_{Filter} auf Null setzt. Schreiben Sie ein kurzes Programm, welches ein aus einer Überlagerung vieler Sinus- und Kosinusfunktionen bestehendes Signal initialisiert, dieses fouriertransformiert und einer Hoch- und Tiefpassfilterung unterzieht. Überprüfen Sie nach der Rücktransformation, ob die Summe der beiden gefilterten Signale das ursprüngliche Signal ergibt. Welchen Nachteil hat solch ein "scharfer" Filter?

Aufgabe 2: Advektionsgleichung in 1D

Betrachten Sie das Anfangswertproblem für eine eindimensionale Advektionsgleichung

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + c\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = 0,$$
$$u(x,0) = u_0(x)$$

mit der Geschwindigkeit $c > 0$, $x \in [0,\, 2\pi]$ und periodischen Randbedingungen. Die analytische Lösung ist $u(x,t) = u_0(x - ct)$.
Lösen Sie die Gleichung mit Hilfe von Fourier-Galerkin-Methode. Die Anfangsfunktion $u_0(x)$ ist gegeben durch

$$u_0(x) = \exp\Big(-2\pi\big(x - \frac{\pi}{2}\big)^2\Big).$$

Für die Zeitintegration benutzen Sie die Runge-Kutta-Fehlberg-Verfahren 4(5).