Aufgabe 1: Brusselator

Lösen Sie die zweidimensionale Reaktions-Diffusions-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= d_u\, \Delta u + a - (b+1)\, u + u^2 v\,, \\ \partial_t v &= d_v\, \Delta v + b\, u - u^2 v \end{aligned}$$

$u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$ mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens auf dem Grundgebiet $[0, 120] \times [0, 120]$. Die Anfangsbedingung ist durch die homogene Lösung $u = a$, $v = b/a$ zuzüglich Rauschen kleiner Amplitude gegben. Betrachten Sie die Fälle:

a) $b = 9$, $a = 2, 2.5, 3$;

b) $a = 3$, $b = 12, 15, 18$.

Aufgabe 2: Superpositionspattern

Lösen Sie nun folgendes RD System in der Form

$$\begin{aligned} \partial_t u_i &= d_{u_i}\, \Delta u_i + \alpha\,(u_j - u_i) + a - (b+1)\, u_i + u_i^2 v_i\,, \\ \partial_t v_i &= d_{v_i}\, \Delta v_i + \alpha\,(v_j - v_i) + b\, u_i - u_i^2 v_i \end{aligned}$$

$i, j = 1, 2$, $i \neq j$, $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens auf dem Grundgebiet $\mathbf{r} \in [0, 200] \times [0, 200]$. Die Anfangsbedingung ist durch die homogene Lösung $u_i = u_{h_i}$, $v_i = v_{h_i}$ zuzüglich Rauschen kleiner Amplitude gegeben. Betrachten Sie die Fälle:

a) $a = 3$, $b = 9$, $\alpha = 0.1$, $d_{u_1} = 12.6$, $d_{v_1} = 27.5$, $d_{u_2} = 47.5$, $d_{v_2} = 141.5$, $u_{h_i} = v_{h_i} = 3$, $i = 1, 2$.

b) $a = 3$, $b = 9$, $\alpha = 1$, $d_{u_1} = 1.85$, $d_{v_1} = 5.66$, $d_{u_2} = 50.6$, $d_{v_2} = 186.0$, $u_{h_i} = v_{h_i} = 3$, $i = 1, 2$.

c) $a = 3$, $b = 6$, $\alpha = 1$, $d_{u_1} = 1.31$, $d_{v_1} = 9.87$, $d_{u_2} = 34.0$, $d_{v_2} = 344.9$, $u_{h_i} = 3$, $v_{h_i} = 2$, $i = 1, 2$.

d) $a = 3$, $b = 10$, $\alpha = 1$, $d_{u_1} = 2.03$, $d_{v_1} = 4.38$, $d_{u_2} = 56.2$, $d_{v_2} = 135.3$, $u_{h_i} = 3$, $v_{h_i} = 10/3$, $i = 1, 2$.

e) $a = 3$, $b = 9.9$, $\alpha = 1$, $d_{u_1} = 8.33$, $d_{v_1} = 8.33$, $d_{u_2} = 46$, $d_{v_2} = 120$, $u_{h_i} = 3$, $v_{h_i} = 3.3$, $i = 1, 2$.

Aufgabe 3: Wachsende Maske

Lösen Sie die zweidimensionale Reaktions-Diffusions-Gleichung:

$$\begin{aligned} \partial_t u &= d_u \, \Delta u + a - (b+1)\, u + u^2 v\,, \\ \partial_t v &= d_v \, \Delta v + b\, u - u^2 v \end{aligned}$$

$u = u(x,\, y,\, t)$, $v = v(x,\, y,\, t)$ mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens auf der Maske

$$\text{if} \left(\left(\left(\left(\frac{x - M_{x1}}{L_{x1}} \right)^2 + \left(\frac{y - M_{y1}}{L_{y1}} \right)^2 < 1 \right) OR \left(\left(\frac{x - M_{x2}}{L_{x2}} \right)^2 + \left(\frac{y - M_{y2}}{L_{y2}} \right)^2 < 1 \right) \right) \right.$$

$$\left. AND \left(\left(\frac{x - M_{x3}}{L_{x3}} \right)^2 + \left(\frac{y - M_{y3}}{L_{y3}} \right)^2 > 1 \right) \right) , \quad MASKE = 0$$

$$\text{else} \quad MASKE = 1\,,$$

$$L_{0,x1} = 10,\ \ L_{0,y1} = 5,\ \ L_{0,x2} = 2,\ \ L_{0,y2} = 6, L_{0,x3} = 1, L_{0,y3} = 1,$$

$$s = \min(1 + 0.0001 \cdot t\ ,\ 5)$$

$$L_{x1} = L_{0,x1} \cdot s,\ \ L_{y1} = L_{0,y1} \cdot s\,,\ \ \text{usw.}$$

$$M_{x1} = L/2,\ \ M_{y1} = L/2,\ , L = 120\,,\ \ M_{x2} = M_{x1} + L_{x1},\ \ M_{y2} = M_{y1},$$

$$M_{x3} = M_{x1} - 0.6 L_{x1},\ \ M_{y3} = M_{y1} + 0.3 L_{y1}\,.$$