Aufgabe 1: 2D Rayleigh-Bénard: Rayleigh-Taylor-Instabilität und Konvektion

Lösen Sie die zweidimensionalen Rayleigh-Bénard Gleichungen in der Form

$$\frac{\partial}{\partial t}\omega = \nabla \times \big[\boldsymbol{u} \times \omega \boldsymbol{e}_z - \frac{1}{\epsilon} H \boldsymbol{u}\big] + \alpha \frac{\partial}{\partial x}\Theta + \nu \Delta \omega$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\Theta = \nabla \times \big[\boldsymbol{u} \times \Theta \boldsymbol{e}_z\big] - \frac{1}{\epsilon} H \Theta + \beta u_y + \kappa \Delta \Theta$$

für die Vortizität $\omega(\boldsymbol{x}, t)$ und die Temperaturfluktuation $\Theta(\boldsymbol{x}, t)$ auf einem Grundgebiet der Seitenlänge 2π mit Hilfe des Pseudospektralverfahrens. Mit der Maskenfunktion $H(\boldsymbol{x})$ lassen sich Wände modellieren, an denen das Geschwindigkeitsfeld *no-slip* Randbedingungen erfüllt und die Temperaturfluktuationen verschwinden. Im Fourierraum lauten die Gleichungen

$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\omega} = i\boldsymbol{k} \times \mathcal{F}\big[\boldsymbol{u} \times \omega \boldsymbol{e}_z - \frac{1}{\epsilon} H \boldsymbol{u}\big] + i\alpha k_x \tilde{\Theta} - \nu k^2 \tilde{\omega}$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\Theta} = i\boldsymbol{k} \times \mathcal{F}\big[\boldsymbol{u} \times \Theta \boldsymbol{e}_z\big] - \mathcal{F}\big[\frac{1}{\epsilon} H \Theta\big] + \beta \tilde{u}_y - \kappa k^2 \tilde{\Theta}$$

a) Implementieren Sie den Algorithmus. Als Zeitschrittverfahren bietet sich ein Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung an. Der Zeitschritt wird hierbei durch die maximale Geschwindigkeit, die beiden Diffusionskonstanten und die Permeabilität bestimmt. Zum Testen wähle man eine Maske mit Wänden oben und unten derart, dass ein effektiver *aspect ratio* von 4:3 entsteht. Bei einer Auflösung von 256×256 bietet sich $\nu = \kappa = 0.01$ an.

b) Simulieren Sie eine Rayleigh-Taylor-Instabilität. Schalten Sie dazu die Heizung aus ($\beta = 0$) und schichten Sie eine dichte Flüssigkeit auf eine weniger dichte. Wählen Sie dazu ein glattes Temperaturprofil zusammen mit kleinen Fluktuationen.

c) Simulieren Sie nun eine Konvektionsströmung. Bei zusätzlich angeschalteter Heizung ergibt sich oberhalb der kritischen Rayleighzahl eine Konvektionsströmung. Wie beeinflußt die Prandtlzahl das Strömungsmuster?