

# Kohärente Strukturen in turbulenten Strömungen

als Diplomarbeit vorgelegt von

Michael Wilczek



institut für  
theoretische physik

Westfälische Wilhelms-Universität  
Münster



# Inhaltsverzeichnis

<b>Einleitung</b>	<b>v</b>
<b>1 Turbulenz und kohärente Strukturen</b>	<b>1</b>
1.1 Experimentelle und numerische Ergebnisse dreidimensionaler Turbulenz . . . . .	2
1.2 Zweidimensionale Turbulenz . . . . .	8
1.3 Wirbel als Bausteine der Turbulenz . . . . .	12
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>17</b>
2.1 Die mathematische Beschreibung einer Flüssigkeit . . . . .	17
2.2 Die statistische Beschreibung von Turbulenz . . . . .	21
<b>3 Kohärente Strukturen</b>	<b>29</b>
3.1 Punktwirbel . . . . .	29
3.2 Lamb-Oseen-Wirbel . . . . .	41
3.3 Lundgrenwirbel . . . . .	51
3.4 Burgerswirbel . . . . .	64
3.5 Fazit . . . . .	66
<b>4 Ein Modell für die Einteilchenstatistik</b>	<b>68</b>
4.1 Die Idee . . . . .	68
4.2 Numerische Implementierung . . . . .	69
4.3 Ergebnisse . . . . .	77
4.4 Analytische Beschreibungsansätze . . . . .	85
4.5 Fazit . . . . .	90
<b>5 Zerfallende zweidimensionale Turbulenz</b>	<b>91</b>
5.1 Entwicklung von Vortizität und Energiespektrum . . . . .	91
5.2 Trajektorien . . . . .	94
5.3 Statistische Eigenschaften . . . . .	97
5.4 Fazit . . . . .	102
<b>6 Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>104</b>

<b>A Direkte numerische Simulation</b>	<b>106</b>
A.1 Zeitschrittverfahren . . . . .	107
A.2 Pseudospektralverfahren . . . . .	109
A.3 Stabilität des Verfahrens . . . . .	113
A.4 Kubische Interpolation . . . . .	117
A.5 Struktur des DNS-Codes . . . . .	122
A.6 Grenzen der Numerik und Tests . . . . .	124
<b>B Zusatzmaterialien</b>	<b>133</b>
B.1 DVD . . . . .	133
B.2 Simulationsdetails . . . . .	134
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>135</b>
<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>138</b>

# Einleitung

*Nota il moto del liuello dell'acqua, il quale fa a uso de'capelli, che anno due moti, de'quali l'uno attede al peso del uello, l'altro al liniamento delle volte; così l'acque a le sue volte reuertiginose, delle quali una parte attende al inpeto del corso principale, l'altro attende al mote incidente e riflesso.*

(In etwa: Beobachte die Bewegung der Oberfläche von Wasser, welche der von Haar ähnelt, das zwei Bewegungen vollführt, derer eine vom Gewicht der Strähnen abhängt, die andere von der Linienführung der Locken; so macht Wasser drehende Wirbel, von denen ein Teil vom Schwung der der Hauptströmung erzeugt wird und der andere von zufälligen und reflektierten Bewegungen.)

Leonardo Da Vinci (1510)

*Big whorls have little whorls,  
That feed on their velocity;  
And little whorls have lesser whorls,  
And so on to viscosity  
(in the molecular sense).*

Lewis Fry Richardson (1922)

*I am an old man now, and when I die and go to Heaven there are two matters on which I hope for enlightenment. One is quantum electrodynamics and the other is turbulence. About the former I am really rather optimistic.*

Horace Lamb (1932)

*...the last great unsolved problem of classical physics.*

Richard Feynman (nicht dokumentiert)

Während des letzten Jahrhunderts ist die Physik mit der Quantentheorie in die aller-kleinsten Strukturen der Materie eingedrungen und hat auf kosmologischen Skalen mit der Relativitätstheorie neue Erklärungen gefunden. Ein Teil der Faszination dieser Theorien erschließt sich aus der Tatsache, dass die Forschungsobjekte dieser Fachgebiete der

täglichen Erfahrungswelt vollkommen fremd sind, und der Mensch Kraft seines Geistes in unbekanntes Terrain vorgedrungen ist.

Doch obgleich die Physik in die entlegensten Winkel des Universums vorgestoßen zu sein scheint, bleiben viele aus der Alltagswelt bekannte Phänomene ungeklärt oder zumindest nicht vollständig erforscht. Die Liste der Beispiele ist lang, und viele dieser Beispiele stammen aus dem Bereich der nichtlinearen Physik. Die nichtlineare Physik umspannt einen weiten Themenkreis, und entgegen dem Namen sind viele der Fragestellungen nicht auf Physik im klassischen Sinne beschränkt. Auch Fragen nach der Ausbreitung von globalen Seuchen, Schwankungen von Börsenkursen oder die Entstehung von Bewusstsein im menschlichen Gehirn können im Zentrum der Aufmerksamkeit stehen. All diesen Fragestellungen ist jedoch gemeinsam, dass bei der mathematischen Formulierung der Probleme nichtlineare Gleichungen zu Tage treten. In den vergangenen Jahrzehnten hat sich daher ein neuer Forschungszweig etabliert, zu dem zum einen die Erforschung dynamischer Systeme, zum anderen die Komplexität gehören. Mit teilweise neuen mathematischen und computerunterstützten Methoden wird hier deterministisches Chaos, seine Entstehung und seine Koexistenz mit geordneten Zuständen untersucht. Weiterhin werden Systeme mit emergentem Verhalten, die das Phänomen der Selbstorganisation zeigen, untersucht. All diese Systeme zeichnen sich lax gesprochen dadurch aus, dass ihr Verhalten eine größere Vielfalt zeigt, als die Summe ihrer Teile vermuten lässt.

Ein Paradigma komplexer Systeme ist die Turbulenz, und jedem Menschen sind die komplizierten Bewegungen einer in Bewegung versetzten Flüssigkeit aus der eigenen Erfahrungswelt bekannt. Die oben angeführten Zitate zeigen, dass schon da Vinci vor einigen hundert Jahren die wesentlichen Züge turbulenter Strömungen bewusst waren. Schon er hat erkannt, dass der turbulente Bewegungszustand nicht rein zufällig ist, sondern von komplexen raumzeitlichen Strukturen, den Wirbeln durchsetzt ist. Auch etwa vierhundert Jahre später sind diese Beobachtungen konsistent mit Richardsons phänomenologischer Begründung der turbulenten Energiekaskade. Seit nunmehr fünfhundert Jahren ist das Problem in seiner Phänomenologie also in den Köpfen der Wissenschaftler präsent, und dennoch ist bis heute keine vollständige theoretische Beschreibung gelungen. Die Zitate von Lamb und Feynman zeigen, dass selbst namhafte Wissenschaftler dem Problem der Turbulenz mit einer Haltung zwischen ironischer Resignation und Respekt gegenüberstehen. Die Untersuchung turbulenter Strömungen ist also bis heute eine große Herausforderung geblieben und mehr denn je ein lebendiges Forschungsgebiet.

Die vorliegende Arbeit ist dem Themenkreis der Turbulenz zuzuordnen und widmet sich dabei konkret den Wirbelstrukturen in turbulenten Strömungen. Die Untersuchungen finden auf der Lagrangeschen Beschreibungsebene statt. Die Arbeit ist wie folgt aufgebaut: Kapitel 1 stellt aktuelle Forschungsergebnisse zusammen und hebt dabei besonders die Bedeutung kohärenter Strukturen hervor. In Kapitel 2 werden die notwendigen Begrifflichkeiten zum weiteren Verständnis der Arbeit kurz eingeführt. Kapitel 3 führt dann die einzelnen Wirbellösungen der Grundgleichungen der Hydrodynamik ein und untersucht im Detail ihren Einfluss auf Lagrangesche Testteilchen, die in der Flüssigkeit mitbewegt werden. Die folgenden Kapitel beschäftigen sich mit Ensembles von Wirbelstrukturen. In Kapitel 4 wird ein Modell für die Einteilchenstatistik in dreidimen-

---

sionalen turbulenten Flüssigkeiten entwickelt, Grundbaustein ist hier der Burgerswirbel. In Kapitel 5 wird die zeitliche Entwicklung eines Ensembles kohärenter Strukturen am Beispiel zweidimensionaler zerfallender Turbulenz untersucht. Zu guter Letzt folgt eine Zusammenfassung mit Ausblick in Kapitel 6.

Der interessierte Leser sei noch auf den Anhang A hingewiesen, in dem die Entwicklung eines Codes zur direkten numerischen Simulation der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichung beschrieben wird. Dieses Kapitel möchte zum einen die Entwicklung der in dieser Arbeit benötigten numerischen Werkzeuge dokumentieren, es richtet sich aber auch an denjenigen, der etwas über die Entwicklung solch einer Software lernen möchte. Die beiliegende DVD enthält alle wichtigen Quelltexte und Programme, die in dieser Arbeit benutzt wurden. Auch alle Anfangsbedingungen der vorgestellten Simulationen liegen bei, um eine Reproduzierbarkeit der vorgestellten Ergebnisse zu sichern. Darüberhinaus finden sich einige Animationen zu den vorgestellten Ergebnissen.





# 1 Turbulenz und kohärente Strukturen

In den vergangenen Jahren verdichten sich experimentelle und numerische Hinweise auf die Existenz kohärenter Strukturen in turbulenten Strömungen. Die Definition einer kohärenten Struktur fällt schwer, und auch an dieser Stelle wird kein Versuch einer exakten Definition unternommen. Der Begriff „kohärente Struktur“ wird in dieser Arbeit synonym mit den Begriffen „Wirbel“ oder „Wirbelstruktur“ verwendet und meint damit eine raumzeitlich organisierte Ansammlung von Vortizität. Im Falle zweidimensionaler Turbulenz organisiert sich das Vortizitätsfeld am ehesten in runde *patches*, während im dreidimensionalen Fall der Wirbelstreckungsterm zu einer Filamentierung dieser Ansammlungen von Vortizität führt. In jedem Fall unterliegt die Vortizität der Advektion durch das Geschwindigkeitsfeld, das sich selbst wieder aus der Verteilung der Vortizität ergibt; im Ergebnis bilden sich komplexe raumzeitliche Gebilde, die Wirbelstrukturen, aus.

In der klassischen Theorie von Kolmogorov wird der ungleichmäßigen Verteilung dieser Strukturen jedoch nicht Rechnung getragen, vielmehr wird in dieser Theorie von einer perfekten Selbstähnlichkeit<sup>1</sup> des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes im gesamten Inertialbereich ausgegangen. Wie im Folgenden erläutert werden wird, können aber gerade räumlich konzentrierte Wirbelstrukturen mit extremen Ereignissen in der Statistik in Zusammenhang gebracht werden, was zu Abweichungen von einer Reihe klassisch zu erwartender Ergebnisse führt.

In den vergangenen Jahrzehnten hat sich immer mehr die Lagrangesche Untersuchung und Beschreibung der Turbulenz als Forschungsschwerpunkt herausgebildet. Dieser Standpunkt beschreibt das turbulente Geschwindigkeitsfeld entlang von Trajektorien von Teilchen, die ohne Trägheitseinflüsse der turbulenten Strömung folgen. Damit verhält sich diese Beschreibung der Turbulenz komplementär zur sogenannten Eulerschen Beschreibung, in der ein ortsfester Koordinatenpunkt untersucht wird. Letztendlich sind beide Beschreibungen äquivalent und hängen über eine Koordinatentransformation zusammen, dennoch scheint der Lagrangesche Zugang in mancher Hinsicht Vorteile zu haben. So ist zum Beispiel das Lagrangesche Bezugssystem ein natürlicher Rahmen zur Beschreibung von Mischungs- und Transportvorgängen, da man den Testteilchen, die sich durch Advektion und Diffusion durch das Fluid bewegen, unmittelbar folgen kann.<sup>2</sup> Darüber hinaus eignet sich die Lagrangesche Betrachtung besonders gut zur Untersuchung kohärenter Strukturen, weil diese sich durch eventuelle langlebige Einfänge von Teilchen in den statistischen Größen stärker als im Eulerfeld bemerkbar machen können; dort wird der Einfluß der Wirbel auf die Statistik gewissermaßen verschmiert, da sich die Wirbel durch Advektion über die ortsfesten Bezugspunkte hinwegbewegen.

---

<sup>1</sup>in einem statistischen Sinne

<sup>2</sup>Siehe z. B. [Yeu02] für einen ausführlichen Überblick.



**Abbildung 1.1:** Experimenteller Aufbau zur Vermessung von Teilchentrajektorien. Im Gefäß in der Mitte wird durch gegenläufig rotierende Scheiben eine turbulente Strömung erzeugt, in der sich dichteneutrale Teilchen bewegen. Ein Laser beleuchtet die Teilchen, das gestreute Licht wird von Detektoren registriert. Entnommen aus [VLC<sup>+</sup>02].

Bei der Untersuchung Lagrangescher Größen werden die Experimentatoren allerdings vor enorme messtechnische Herausforderungen gestellt, so dass es erst in den letzten Jahren gelungen ist, tiefere Einblicke in die Lagrangesche Statistik zu gewinnen. Andererseits hat die rasante Entwicklung der Computertechnik die Simulation turbulenter Strömungen bei moderaten Reynoldszahlen ermöglicht; in diesen Simulationen sind Lagrangesche Größen verhältnismäßig leicht zu untersuchen.

Das Kapitel ist wie folgt gegliedert: Ein Überblick über aktuelle Forschungsergebnisse soll die Hinweise auf die Einflüsse kohärenter Strukturen auf die Lagrangesche Statistik in zwei und drei Dimensionen zusammenfassen, bevor experimentelle und numerische Arbeiten, die sich eingehender mit Wirbeln beschäftigen, vorgestellt werden. Am Ende des Kapitels finden sich dann die Fragestellungen, welche die vorliegende Arbeit motivieren.

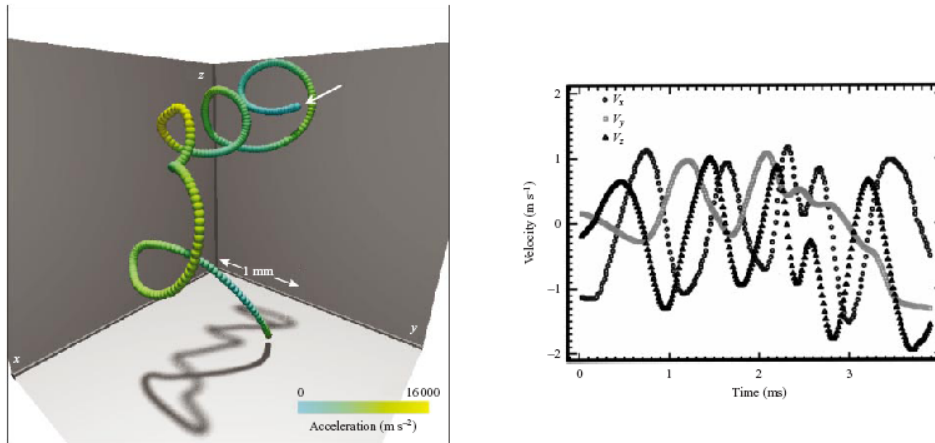
## 1.1 Experimentelle und numerische Ergebnisse dreidimensionaler Turbulenz

Zur Zeit werden experimentelle Arbeiten zur Lagrangeschen Turbulenz hauptsächlich mit drei verschiedenen Verfahren durchgeführt. Dazu gehören das Aufnehmen der Teilchentrajektorien durch Detektoren, wie sie in der Hochenergiephysik benutzt werden, das Vermessen mit Hilfe von Dopplertechniken im Ultraschallbereich und die Verwendung von Hochgeschwindigkeitskameras.

Abbildung 1.1 zeigt den Aufbau der Gruppe der Cornell-Universität.<sup>3</sup> In einem zy-

---

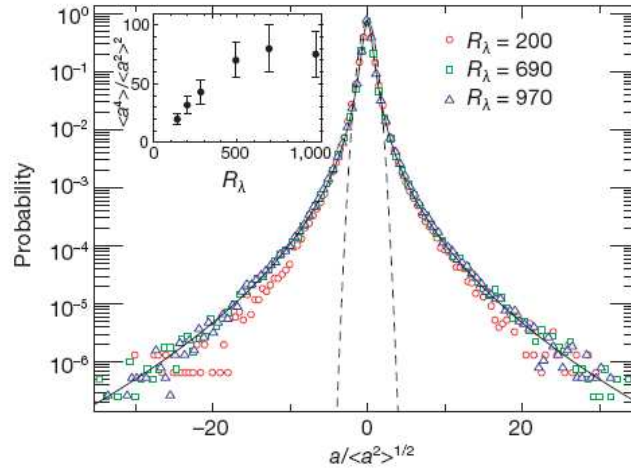
<sup>3</sup>Diese Gruppe arbeitet mittlerweile am MPI in Göttingen.



**Abbildung 1.2:** Experimentell gemessene Teilchentrajektorie. Das linke Bild zeigt die ortsaufgelöste Trajektorie mit der farbkierteten Beschleunigung. Die Beschleunigung erreicht Werte von bis zu dreißig Mal der Standardabweichung vom Mittelwert. Rechts sind die zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten abgebildet. Diese zeigen sinusoidale Modulation der Geschwindigkeit. Entnommen aus [VLC<sup>+</sup>02].

lindrischen Gefäß mit einem Gesamtvolumen von  $0.1 \text{ m}^3$  wird durch zwei gegenläufig rotierende Scheiben eine turbulente Strömung mit einer Reynoldszahl (auf der Taylorskala) von  $140 \leq \text{Re}_\lambda \leq 970$  erzeugt. In der Strömung bewegen sich Kugeln mit einem Durchmesser von  $25 \mu\text{m}$  und einer Dichte von 1.06 Mal der Dichte von Wasser. Das  $8 \text{ mm}^3$  große Messvolumen wird von einem Laser beleuchtet, wobei das gestreute Licht von vier ortsauffösenden Siliziumstreifenzählern mit einer Rate von 70000 Bildern pro Sekunde detektiert wird. Die verschiedenen Signale werden dann in einem aufwändigen Verfahren in dreidimensionale Trajektorien umgerechnet. Messgrößen sind dabei Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung<sup>4</sup>. Für eine ausführliche Versuchsbeschreibung und statistische Auswertung sei der Leser auf [LVC<sup>+</sup>01, VLC<sup>+</sup>02] oder [CMB05] verwiesen. Abbildung 1.2 zeigt eine in diesem Experiment aufgenommene Trajektorie mit den zugehörigen Geschwindigkeitskomponenten. Die beobachtete Trajektorie verläuft spiralförmig, welches auch die sinusoidalen Geschwindigkeitskomponenten andeuten. Dabei erfährt das Testteilchen starke Beschleunigungen, die bis zu 30 Standardabweichungen vom Mittelwert abweichen. Die Beschleunigungen erreichen dabei Werte, die etwa dem 1600-fachen der Erdbeschleunigung entsprechen. Diese Spiralbahnen werden von den Autoren von [VLC<sup>+</sup>02] mit langlebigen kohärenten Strukturen in der turbulenten Strömung in Zusammenhang gebracht, jedoch ohne dass diese weitere quantitative Nachweise vorbringen. Die im Zusammenhang mit diesen Experimenten ermittelte Beschleunigungsstatistik zeigt Abbildung 1.3. Hier sind deutliche Abweichungen von einer Gaußverteilung zu beobachten, extreme Werte der Beschleunigung kommen häufiger vor als bei einer

<sup>4</sup>Die Beschleunigung wird dabei nicht direkt vermessen, sondern aus der interpolierten Geschwindigkeit durch Differentiation gewonnen.



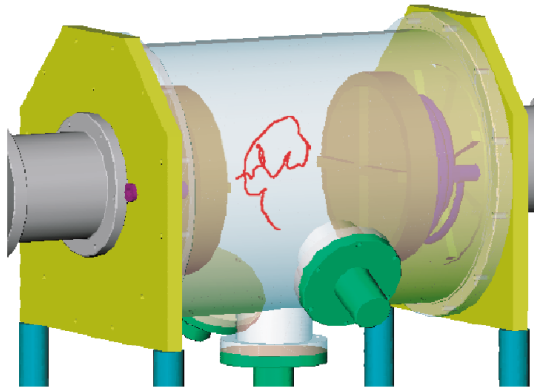
**Abbildung 1.3:** Experimentell ermittelte Beschleunigungsstatistik für drei verschiedene Experimente. Die gestrichelte Linie deutet eine Gaußverteilung an. Die gemessene Statistik zeigt deutlich Abweichungen von einer Gaußverteilung, extreme Ereignisse treten häufiger auf. Als Maß für die Abweichungen von einer Gaußverteilung zeigt das innere Bild die *flatness* der Verteilung. Entnommen aus [LVC<sup>+</sup>01].

normalverteilten Größe. Die Beobachtungen legen nahe, dass zumindest ein Teil der extremen Ereignisse durch Teilcheneinfänge in eine Wirbelstruktur erzeugt werden.

Ein ähnliches Bild zeichnen die experimentellen Ergebnisse der Gruppe aus Lyon, der näher interessierte Leser sei an dieser Stelle auf [MMMP01, MLP04] und [MDL<sup>+</sup>02] hingewiesen. Die Art und Weise, wie eine turbulente Strömung erzeugt wird, ähnelt dabei dem oben genannten Aufbau, wie Abbildung 1.4 zeigt. Die Messung der Teilcentrajektorien erfolgt dabei jedoch mit einer Ultraschall-Dopplermethode. Dabei wird die Flüssigkeit mit einem sinusförmigen Ton der Frequenz 2.5 MHz beschallt und als Messsignal das dopplerverschobene Echo der Testteilchen aufgezeichnet. Das Echo der Gefäßwände ist nicht dopplerverschoben und kann damit aus dem Messsignal gefiltert werden.<sup>5</sup> Die Messmethode macht jedoch gegenüber dem erstgenannten Experiment zehnmal größere Testteilchen notwendig, weshalb diese den kleinsten Fluktuationen des Geschwindigkeitsfeldes nicht folgen können. Als Konsequenz ist die Kolmogorovzeitskala  $\tau_\eta$  bei diesem Experiment nicht aufgelöst. Der große Vorteil liegt im gegenüber obigem Experiment stark vergrößerten Messvolumen, welches Messungen von kleinen Zeiten bis zur integralen Zeitskala ermöglicht. Gewissermaßen sind die beiden Experimente in ihren Vor- und Nachteilen diametral angeordnet.

Aus den vielfältigen Ergebnissen seien an dieser Stelle eine gemessene Trajektorie und die Statistik der Geschwindigkeitsinkremente herausgegriffen (s. Abb. 1.5). Die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsinkremente (also der Differenz zweier Geschwindigkeiten unter einem zeitlichen Abstand  $\tau$ ) zeigen einen Übergang von hochgradig nicht-

<sup>5</sup>Bei der Filterung werden auch die Echos der Teilchen mit verschwindender Geschwindigkeit gefiltert, was aber zu keiner signifikanten statistischen Verfälschung führt [MLP04].

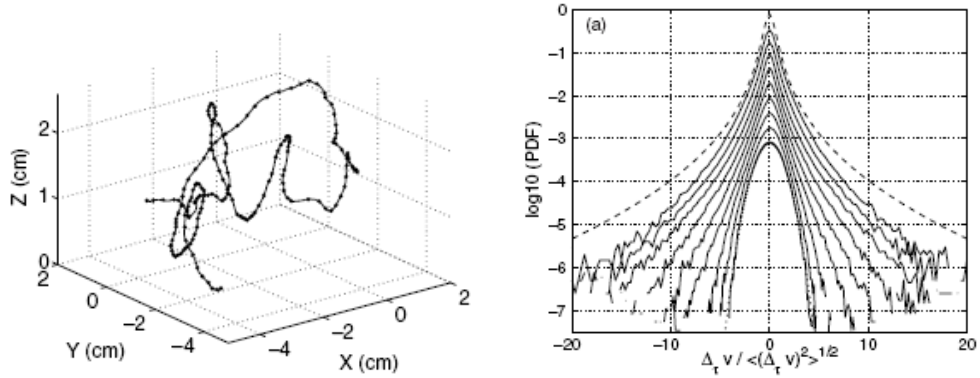


**Abbildung 1.4:** Schematischer experimenteller Aufbau zur Vermessung von Teilchentrajektorien. Im Gegensatz zum Experiment der Cornell-Gruppe werden die Trajektorien über eine Ultraschall-Dopplermethode gemessen. Entnommen aus [MDL<sup>+</sup>02].

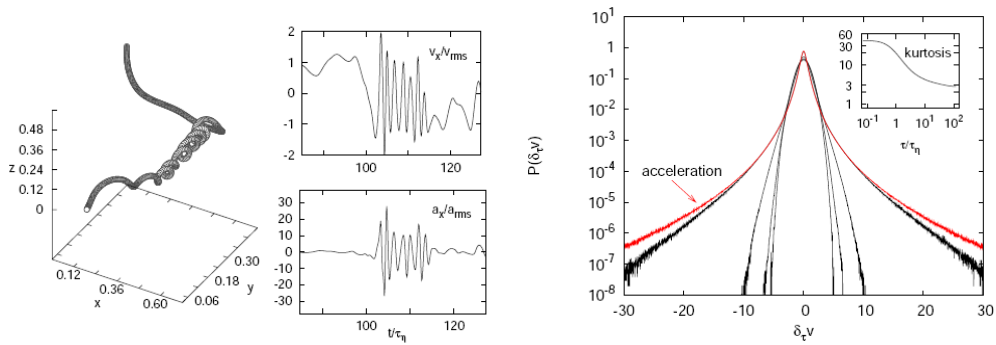
gaußischem Verhalten bei kleinen  $\tau$  hin zu einer Gaußverteilung für große  $\tau$ . Für kleine Zeitdifferenzen  $\tau$  wird die Verteilungsfunktion der Inkremente durch die Beschleunigung bestimmt, die starken Flügel dieser Verteilung sind also auf den intermittenten Charakter dieser dynamischen Größe zurückzuführen. Auch diese Gruppe bringt die Häufigkeit der extremen Ereignisse in den Statistiken mit Teilchendynamik in kohärenten Strukturen in Zusammenhang. Es wird beobachtet, dass die Gebiete hoher lokaler Vortizität zu den breiten Ausläufern der Beschleunigungsstatistik beitragen. (Für genauere Untersuchungen siehe [MLP04].)

Der Vollständigkeit halber seien die aktuellen Ergebnisse der dänischen Gruppe erwähnt, die mit Hilfe von Hochgeschwindigkeits-CCD-Kameras Lagrangesche Trajektorien vermisst [Ber06]. Die Ergebnisse bestätigen die zentralen Aussagen der vorgestellten Experimente, die zitierte Arbeit sticht jedoch durch ihre kritische Auseinandersetzung mit den betrachteten Messgrößen hervor.

Bisher existiert kein Experiment, das die Lagrangeschen Trajektorien von der kleinsten Dissipationsskala bis hin zur integralen Zeitskala auflöst, und der experimentelle Aufwand der vorgestellten Untersuchungen ist besonders in messtechnischer Hinsicht enorm. Darüber hinaus sind einige zentrale Lagrangesche Größen, wie die Beschleunigung, nur indirekt (durch Differentiation der Trajektorien) erfassbar. Als Alternative zum Experiment bietet sich daher die direkte numerische Simulation (DNS, s. auch Anhang A) an. Dabei wird die Navier-Stokes-Gleichung simuliert und eine große Anzahl von Teilchen mit der Strömung mitgeführt. Der Vorteil dieser Methode ist das uneingeschränkte Wissen über alle Details der simulierten turbulenten Strömung und die Tatsache, dass nahezu alle interessierenden Größen aufgenommen werden können. Der Preis dieses Ansatzes sind im Falle von dreidimensionaler Turbulenz der im Bezug auf heutige Computerleistung immense Rechenaufwand und die relativ niedrige erreichbare Reynoldszahl. In aktuellen



**Abbildung 1.5:** Experimentell gemessene Trajektorie und Geschwindigkeitsinkrementverteilung. Die Verteilungsfunktion zeigt einen kontinuierlichen Übergang von stark nichtgaußscher Form für kleine Inkremente zu einer Gaußverteilung für große Zeitinkremente. Entnommen aus [MLP04].



**Abbildung 1.6:** Links: Teilcheneinfang in direkter numerischer Simulation. Das Testteilchen bleibt für einige  $\tau_\eta$  in einem Wirbel gefangen. Geschwindigkeit und Beschleunigung erreichen bei der oszillierenden Bewegung ein Vielfaches des mittleren Schwankungsquadrates der jeweiligen Größen. Rechts: Einteilchenstatistik für Beschleunigung und Geschwindigkeitsinkremente. Das innere Bild zeigt die Kurtosis der Geschwindigkeitsinkremente in Abhängigkeit der Zeitdifferenz  $\tau$ ; die Ergebnisse stimmen qualitativ mit den vorgestellten Experimenten überein. Entnommen aus [BBC<sup>+</sup>04b].

Arbeiten der italienischen Gruppe wird getriebene Turbulenz mit einer Auflösung von bis zu  $1024^3$  Gitterpunkten simuliert, und etwa  $2 \cdot 10^6$  Lagrangeteilchen werden mit dem Geschwindigkeitsfeld advektiert (s. dazu [BBC<sup>+</sup>04b, BT05, BBC<sup>+</sup>04a] und [BBC<sup>+</sup>05]). Im Gegensatz zu den Experimenten erreicht die DNS dabei nur eine moderate Reynoldszahl von  $Re_\lambda \approx 280$ . Der Fokus dieser Arbeiten liegt auf dem Vergleich des von dieser Gruppe in das Lagrangebild übersetzten multifraktalen Modelles [Fri95, BBC<sup>+</sup>04a] mit den numerisch bestimmten statistischen Größen. Bei der Untersuchung der Strukturfunktionen stellen die Autoren für Zeitinkremente kleiner als  $10 \tau_\eta$  eine Abweichung vom klassisch zu erwartenden Skalierungsverhalten fest, die sie mit der Existenz kohärenter Strukturen in Zusammenhang bringen. Abbildung 1.6 zeigt einen Einfang in eine Struktur hoher Vortizität, in der das Lagrangeteilchen eine Spiralbahn durchläuft. Dabei erreicht die Beschleunigung Werte von nahezu dreißig Mal der Wurzel des mittleren Schwankungsquadrates. Damit trägt dieses Ereignis zu den weiten Ausläufern der Beschleunigungsstatistik bei, die im rechten Teil des Bildes zu sehen ist. Die ermittelten Geschwindigkeitsinkrementverteilungsfunktionen zeigen den typischen Übergang von stark nichtgaußischen Ausläufern hin zu einer Normalverteilung.

Technisch vergleichbare Simulationen werden von den Gruppen in Bochum und München durchgeführt. Auch in dieser Arbeit [HGBM06] werden Einfänge beobachtet. Der Vergleich mit magneto-hydrodynamischer Turbulenz zeigt zusätzlich, dass diese Art von Dynamik charakteristisch für hydrodynamische Turbulenz ist.

Die bisher vorgestellten Arbeiten fokussieren auf die statistische Auswertung Lagrangescher Teilchentrajektorien. Wie beispielhaft erläutert zeigt diese Analyse, dass Wirbelstrukturen einen erheblichen Einfluss auf die Teilchendynamik haben. Eine genaue Untersuchung, welchen Beitrag die Wirbelstrukturen auf die Eulerschen Felder haben, findet sich in [FPS01, FSK99] (letztgenannte Arbeit bezieht sich dabei auf zweidimensionale Turbulenz). Aus der Motivation heraus, effizientere numerische Verfahren zu entwickeln, um die wesentlichen Eigenschaften turbulenter Felder zu simulieren, nutzt diese Gruppe eine Zerlegung des Vortizitätsfeldes in eine orthogonale *wavelet*-Basis. Wie die Autoren erläutern, ermöglicht dieser Ansatz, die kohärenten Teile des Geschwindigkeits- und Vortizitätsfeldes von den inkohärenten Hintergrundfluktuationen zu trennen. Die Analyse dieser Methode zeigt, dass die Hintergrundfluktuationen sich gaußisch verhalten und durch die klassische Theorie nach Kolmogorov beschrieben werden können. Das interessante Ergebnis dieser Untersuchungen ist nun, dass im Falle von dreidimensionaler Turbulenz der kohärente Anteil des Vortizitätsfeldes durch 3% der *wavelet*-Koeffizienten beschrieben werden kann, dieser Anteil jedoch 98.9% der Gesamtenergie und 75.4% der Enstrophie enthält. Ein Vergleich zwischen der Statistik des ungefilterten Feldes mit den durch *wavelet*-Filterung erhaltenen kohärenten und inkohärenten Anteilen zeigt, dass die intermittente Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung des Vortizitätsfeldes durch den kohärenten Anteil gut reproduziert wird, während der inkohärente Anteil eine eher zu vernachlässigende Rolle spielt. Zu einem ähnlichen Ergebnis kommen die Autoren bei der Untersuchung der Geschwindigkeitsstatistik. Als Konsequenz schlagen die Autoren vor, nur den kohärenten Anteil des Feldes (der einen vergleichsweise kleinen numerischen Aufwand verursacht) direkt zu simulieren, während der überwiegende Anteil durch stochas-

tische Ansätze modelliert werden kann. Im Bezug auf die vorliegende Arbeit zeigen diese Analysen, dass die Wirbelstrukturen einen Großteil der turbulenten Dynamik ausmachen und sich folglich deutlich auf die Lagrangesche Teilchendynamik auswirken sollten.

## 1.2 Zweidimensionale Turbulenz

Die bisherigen Beispiele für Experimente und numerische Versuche zur Lagrangeschen Teilchendynamik und -statistik beziehen sich auf vollentwickelte dreidimensionale Turbulenz. Auch die Untersuchungen von zweidimensionalen Strömungen zeigen eine lange Tradition. Das Interesse an zweidimensionaler Turbulenz motiviert sich aus verschiedenen Beweggründen. So besteht ein akademisches Interesse die zweidimensionale Navier-Stokes-Gleichung gewissermaßen konträr zum dreidimensionalen Fall zu untersuchen. In drei Dimensionen findet ein Energietransport von großen auf kleine Skalen statt, in zwei Dimensionen ist das Gegenteil der Fall; man spricht daher von einer direkten bzw. inversen Energiekaskade. Eine vergleichende Studie beider Fälle macht es beispielsweise möglich einzuschätzen, ein wie großer Teil der Dynamik schon durch die Kaskadenbildung determiniert wird. Darüber hinaus spielen zweidimensionale Strömungen in der Natur eine Rolle. Zum Beispiel kann die Atmosphäre als nahezu zweidimensional angesehen werden, da sie im Verhältnis zu den lateralen Ausmaßen sehr dünn ist. Auch Meeresströmungen zeigen auf großen Skalen oftmals zweidimensionale Eigenschaft.

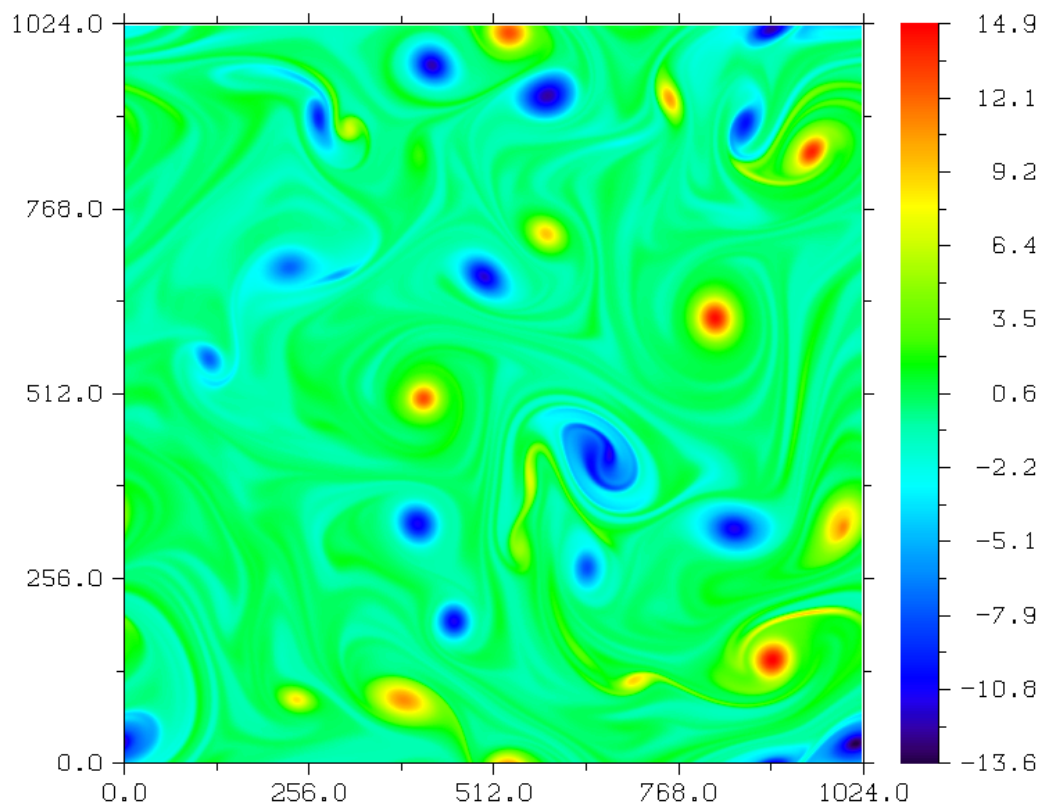
Kohärente Strukturen bilden sich jedoch auch, wie eingangs erwähnt, in zweidimensionalen Strömungen aus. Hier organisiert sich die Vortizität in runde Flecken. Unter Einfluss einer dritten Raumdimension unterliegen diese Bereiche dem Wirbelstreckungsmechanismus, welcher zu den charakteristischen Wirbelröhren in drei Dimensionen führt. Dieser Mechanismus erklärt die unterschiedliche Topologie der Wirbelstrukturen in zwei und drei Dimensionen. Viele der in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse beziehen sich auf numerische Ergebnisse der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung, und eine Untersuchung der dreidimensionalen Gleichung zeigt, dass es sich bei exakten Wirbellösungen dieser Gleichung eher um  $2^{1/2}$ -dimensionale Lösungen handelt. Diese lassen sich nämlich unter der sogenannten Lundgrentransformation von Lösungen der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung zu Lösungen der dreidimensionalen erweitern (s. dazu Kapitel 3). Das legt nahe, dass eventuell ein großer Teil der dreidimensionalen Dynamik auf zwei Dimensionen zurückzuführen ist, zumindest aber ein Verständnis zweidimensionaler Strömungen und zugehöriger Teilchendynamik grundlegende Bedeutung für das Verständnis dreidimensionaler Phänomene hat. Zusätzlich deuten die in drei Dimensionen beobachteten Spiralbewegungen eine nicht vollständig dreidimensionale Bewegung an, eher handelt es sich um eine wie in zwei Dimensionen beobachtete zirkuläre Bewegung, die entlang der Wirbelachse verschoben wird. Darüber hinaus kommen die Autoren in [FSK99] zu dem Ergebnis, dass letztendlich zweidimensionale Turbulenz dynamisch sehr verwandt zu dreidimensionaler sein könnte und geben an, dass in zwei Dimensionen das Verzerren des Vortizitätsgradienten und die Erzeugung von Palinstrophie die dynamische Rolle des Wirbelstreckungstermes und der Enstrophieerzeugung übernehmen könnten. Als Unter-



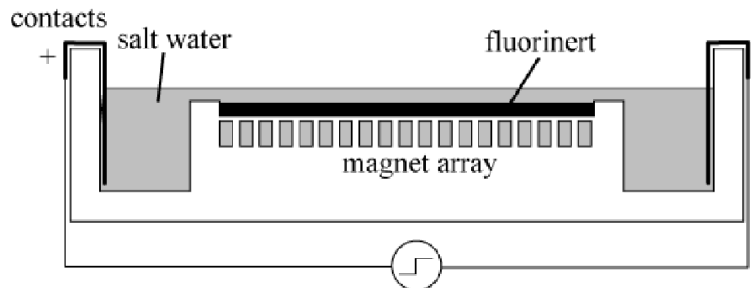
schied der beiden Fälle führen sie an, dass in zwei Dimensionen die Wirbel jedoch zeitlich wesentlich stabiler sind. All das rechtfertigt die genaue Untersuchung zweidimensionaler Strömungen. Im Folgenden soll daher ein Überblick über aktuelle Ergebnisse der Untersuchung zweidimensionaler Turbulenz gegeben werden.

Im vorigen Abschnitt wurden einige Experimente und numerische Ergebnisse zu Lagrangescher Teilchenstatistik in getriebener dreidimensionaler Turbulenz vorgestellt. In zwei Dimensionen existieren analoge Untersuchungen bisher nicht, so dass zum jetzigen Zeitpunkt keine Aussage darüber möglich ist, welche der dort untersuchten Lagrangeschen Größen von der Dimensionalität des Systems beeinflusst werden oder ob es sich um universelle Größen handelt. Die Untersuchung zweidimensionaler Turbulenz zeigt auf den ersten Blick in den letzten Jahren neben wachsender Popularität vielleicht sogar eine größere Diversifizierung als im Falle dreier Raumdimensionen. Einen exzellenten Überblick über aktuelle Fragen und Arbeiten gibt der Review-Artikel [Tab02] und die darin enthaltenen Referenzen. In diesem Artikel wird die Bedeutung zerfallender zweidimensionaler Turbulenz herausgestellt, da sich hier aufgrund der inversen Energiekaskade Wirbelstrukturen auf natürliche Weise herausbilden. Abbildung 1.7 gibt einen Eindruck des Phänomens. Lässt man ein Vortizitätsfeld gemäß einer zufälligen Anfangsbedingung zerfallen, bilden sich nach einer kurzen Zeit die dargestellten Strukturen. Diese wechselwirken dann miteinander; so kommt es zu Verschmelzungen von Wirbeln gleichen Vorzeichens der Vortizität und zur Zerstörung schwacher Wirbelstrukturen durch starke Scherungen. Dabei führen die Wirbel eine komplexe Dynamik aus, die denen eines Punktwirbelsystems ähnelt [BPS88], während die Diffusion feine Strukturen dämpft und die runden Wirbelflecken immer größer werden lässt. Der Nachteil eines so präparierten Systems besteht darin, dass es sich nicht, wie im Falle voll entwickelter Turbulenz, in einem Fließgleichgewicht befindet. Untersuchungen bezüglich der Kolmogorovtheorie und intermittenten Abweichungen sind somit nicht möglich. Im Gegensatz dazu ergibt sich bei der Untersuchung getriebener zweidimensionaler Turbulenz das Problem, dass der Antrieb die kohärenten Strukturen unterdrückt oder zumindest behindert. In [Tab02] wird sogar berichtet, dass oberhalb der Antriebsskala keine Wirbelstrukturen zu erwarten sind. Zerfallende Turbulenz scheint daher einen natürlichen Rahmen zum Studium des Einflusses von kohärenten Strukturen auf Lagrangesche Teilchendynamik zu geben.

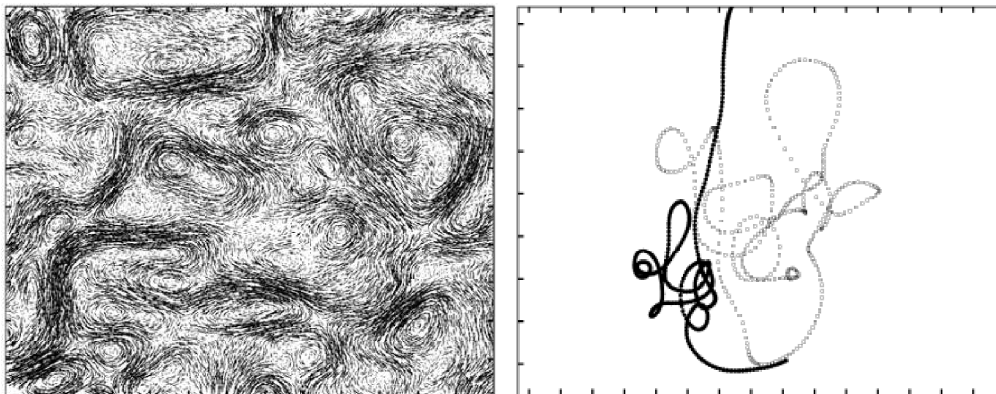
Der überwiegende Teil der Arbeiten zu zweidimensionaler Turbulenz bezieht sich auf das Eulerbild. Zum Abschluss dieses Abschnitts soll eine experimentelle Studie Lagrangescher zweidimensionaler Turbulenz vorgestellt werden, die den Einfluß kohärenter Strukturen auf Lagrangesche Testteilchen untersucht [RDE05]. Die quasizweidimensionale Turbulenz wird in diesem Experiment in einer  $20\text{ cm} \times 20\text{ cm} \times 0.3\text{ cm}$  großen Schicht einer Salzwasserlösung erzeugt, die auf einer elektromagnetisch passiven Schicht einer anderen Flüssigkeit aufliegt. Der Antrieb erfolgt durch elektromagnetische Felder. Ein magnetisches Feld verläuft senkrecht zur von der Flüssigkeit aufgespannten Ebene, so dass die resultierende Lorentzkraft die Ionen der Lösung antreibt. Der schematische Aufbau ist in Abbildung 1.8 zu sehen. In die turbulente Strömung wird dann polykristallines Pulver gestreut, dessen einzelne Kristalle etwa  $75\text{ }\mu\text{m}$  groß und weitgehend dichteneutral sind. Der ganze Aufbau wird mit einer Blitzlampe beleuchtet und mit einer CCD-Kamera auf-



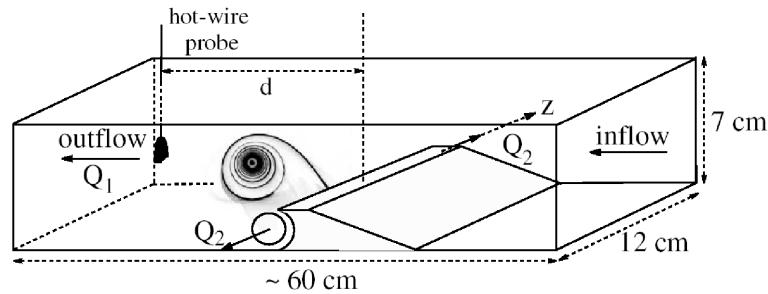
**Abbildung 1.7:** Wirbel in zweidimensionaler zerfallender Turbulenz. Dargestellt ist das Vortizitätsfeld aus einer direkten numerischen Simulation (siehe dazu Kapitel 5 und Anhang A). Neben nahezu axialsymmetrischen Wirbeln erkennt man mehrere Wirbel mit angedeuteter Spiralstruktur, welche Ergebnis von Verschmelzungsprozessen sind. Die feinen Filamente, die das gesamte Feld durchziehen, resultieren zum Teil aus zerstörten Wirbelstrukturen, die starken Scherungen ausgesetzt wurden.



**Abbildung 1.8:** Schematischer Aufbau zu experimentell erzeugter zweidimensionaler Turbulenz. Eine Salzlösung wird durch ein elektromagnetisches Feld angetrieben. Entnommen aus [RDE05].



**Abbildung 1.9:** Experimentell ermittelte Teilchenbahnen in zweidimensionaler Turbulenz. Links: Über vier Aufnahmen gemittelte Teilchenbahnen. Die Bewegung um Wirbelstrukturen ist deutlich zu erkennen. Rechts: Hell dargestellt ist eine experimentell ermittelte Teilchenbahn, dunkel eine synthetisch aus den interpolierten Eulerfeldern erzeugte. Entnommen aus [RDE05].



**Abbildung 1.10:** Einzelner Wirbel im Experiment. Hinter einer Stufe wird in einer laminaren Strömung ein Wirbel erzeugt, durch zwei Löcher  $Q_2$  wird Wasser herausgesaugt und damit der Wirbel entlang seiner Achse gestreckt. Der Wirbel wird dann mit der Strömung advektiert und zerfällt in einem turbulenten *burst*. Entnommen aus [CMP03].

genommen. Aus den Aufnahmen können dann die Teilchenbahnen rekonstruiert werden. Darüber hinaus lassen sich aus der Menge der Trajektorien auch die Eulerfelder interpolieren. Um die Statistik der Teilchenbahnen zu verbessern, wurden aus den interpolierten Eulerfeldern zusätzlich synthetische Teilchenbahnen erzeugt, Abbildung 1.9 zeigt typische Teilchenbahnen. Gut zu erkennen ist, dass das zweidimensionale Geschwindigkeitsfeld aus zwei verschiedenen topologischen Komponenten besteht: Zentren und Sattelpunkten. Die Zentren entsprechen den Wirbeln, die Teilchen einfangen und für lange Zeiten mit sich führen. Zwischen den Wirbeln muss es dann separierende Bereiche geben, in denen die Vortizität gering ist, die auftretenden Scherungen jedoch stark sind. Die Autoren von [RDE05] untersuchen quantitativ, inwiefern sich die Einfänge in Wirbelstrukturen auf Lagrangesche Größen wie die Geschwindigkeitsautokorrelationsfunktion oder Ein- und Zweiteilchendiffusion auswirken, indem sie die Statistik auf die beiden genannten topologischen Fälle bedingen. So fallen die beiden Geschwindigkeitsautokorrelationen ab einer gewissen Zeit mit der der Gesamtstatistik zusammen, während die Autokorrelationsfunktion im Fall der Zentren ein oszillierendes Verhalten zeigt, gemäß den periodischen Teilchenbahnen um einen Wirbel. Für die Wirbel nehmen die Autoren an, dass sie durch Teilcheneinfänge die Diffusion vermindern, während Sattel durch ihre separierende Eigenschaft eher zu einer verstärkten Diffusion führen sollten. Für weitere Details sei der Leser auf die zitierte Arbeit verwiesen. Insgesamt gelingt es den Autoren mit den vorliegenden Untersuchungen, statistische Eigenschaften mit dynamischen und topologischen Effekten des turbulenten Feldes in Zusammenhang zu bringen.

### 1.3 Wirbel als Bausteine der Turbulenz

Die bisher vorgestellten Studien stellen kohärente Strukturen als Bestandteile turbulenter Strömungen dar, deren Signatur sich in den ermittelten Statistiken niederschlägt. Die Wirbel werden gewissermaßen als Phänomen oder Symptom zur Kenntnis genommen und es wird versucht, ihren Einfluss auf die gesamte Statistik zu verstehen und gegebenenfalls

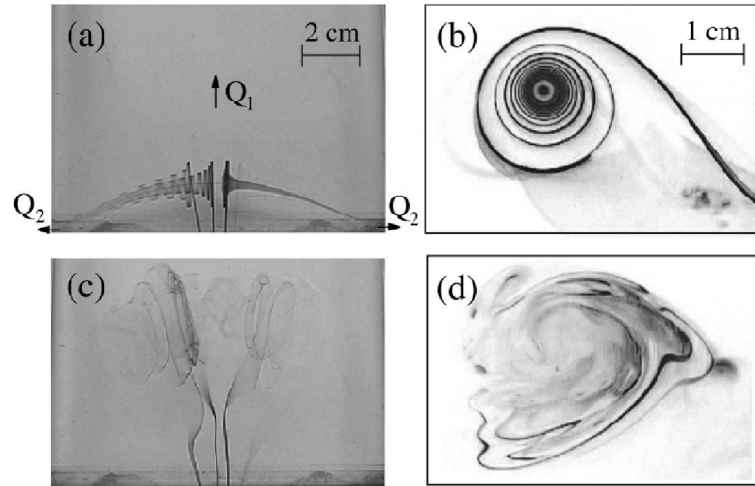
von zufällig fluktuierenden Anteilen zu trennen.

Alternativ kann man einen anderen Weg einschlagen und die Wirbelstrukturen isoliert untersuchen, um anhand dessen den Einfluss auf die turbulente Strömung zu quantifizieren. Das Ziel besteht darin, aus dem Verständnis der einzelnen Bausteine der Turbulenz und zusätzlicher Kenntnis über deren dynamische Interaktion Erkenntnisse für das komplexe System Turbulenz zu gewinnen. Umgekehrt kann man natürlich die einzelnen Strukturen als Bausteine der Turbulenz verstehen und versuchen, anhand dieser Bausteine Aspekte der Turbulenz zu modellieren oder experimentelle Ergebnisse zu begründen. In jedem Fall verfolgt dieser Ansatz das Ziel, eine Brücke über die breite Schlucht zwischen experimentell oder numerisch ermittelten Statistiken auf der einen Seite und dynamischen Aspekten der Navier-Stokes-Gleichung auf der anderen Seite zu schlagen. Vor dem Hintergrund dieses Ansatzes ist die vorliegende Arbeit zu sehen.

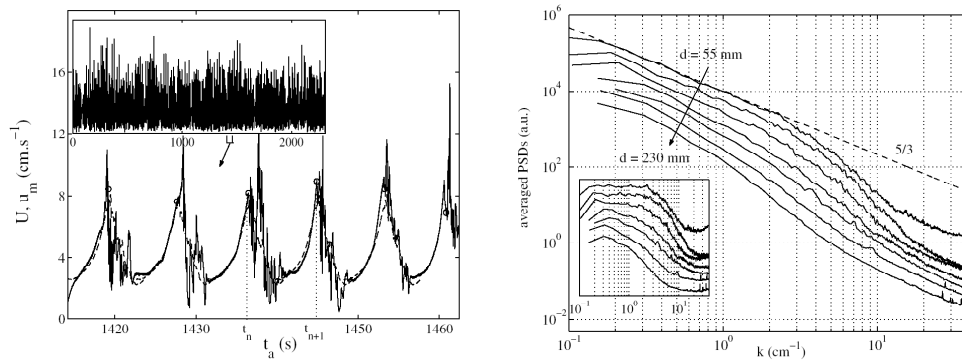
Die Literatur zu Wirbeln als „atomare“ Bestandteile turbulenter Strömungen ist breit gesät. Einige wichtige Arbeiten sollen daher hier beispielhaft für die verschiedenen Kategorien genannt werden. Eine gute Übersicht über Wirbeldynamik und -interaktion findet sich in [PS98] und [SB79]. Der dynamische Prozess des Verschmelzens zweier Wirbel wird beispielsweise in [AV97] analytisch untersucht, und auch die Arbeiten von Lundgren (siehe dazu [Lun82], [Lun93] und Kapitel 3) sind teilweise diesen dynamischen Aspekten verschrieben. Darüber hinaus existieren viele Arbeiten, die sich mit den schon genannten  $2^{1/2}$ -dimensionalen Lösungen der Navier-Stokes-Gleichung auseinandersetzen, den sogenannten gestreckten Wirbeln, die ihre Entsprechung im Falle echter dreidimensionaler Turbulenz in den dünnen Wirbelfilamenten finden (siehe dazu z.B. [MKO94, OP03, RL97]).

Versuche, Eigenschaften des turbulenten Geschwindigkeitsfeldes mit einem Ensemble aus Wirbeln zu erklären, gehen bis auf Townsend [Tow51] zurück und wurden in den folgenden Jahrzehnten immer wieder aufgegriffen. So stehen zum Beispiel auch die Arbeiten von Lundgren [Lun82, Lun93] in diesem Zusammenhang und neuerliche Studien zu diesem Thema finden sich beispielsweise in [HK97] und [KL03]. In [HK97] untersuchen die Autoren ein Ensemble aus zufällig gestreckten Wirbeln. Sie finden, dass die Eulerschen Strukturfunktionen einige Eigenschaften realer turbulenter Strömungen zeigen und damit schon durch ein statisches Ensemble von Wirbeln zu erklären sind. Zusätzlich sei noch auf Arbeiten hingewiesen, die sich mit dem Einfluss von Wirbeln auf einen passiven Skalar beschäftigen, da diese Fragestellung der Lagrangeschen Turbulenz sehr verwandt ist (siehe dazu [FV97, PL01] und [OP03]). Zwei sehr interessante experimentelle Arbeiten finden sich in [MHK03] und [MHK04]. Hier vergleichen die Autoren voll entwickelte Turbulenz durch eine bedingte Mittelungstechnik mit Eigenschaften, die auf die Anwesenheit von Burgerswirbeln in der Strömung zurückzuführen sind.

Zu guter Letzt soll nun noch eine experimentelle Arbeit vorgestellt werden, die eine einzelne Wirbelstruktur untersucht (siehe dazu [CMP03] und [CMP04]). In dieser Arbeit wird durch einen geschickten experimentellen Aufbau in einer laminaren Strömung hinter einer Stufe ein Wirbel erzeugt, der eine Streckung entlang seiner Achse erfährt, siehe dazu Abbildung 1.10. Der gestreckte Wirbel durchläuft zwei Phasen. Zunächst wird er stabil mit der Strömung advektiert und anschließend in einem turbulenten *burst* zerstört. Da-



**Abbildung 1.11:** Visualisierung des Wirbels durch Tinte. Dargestellt sind die stabile Phase und der turbulente *burst*. Entnommen aus [CMP03].



**Abbildung 1.12:** Geschwindigkeitsprofil und Spektrum eines einzelnen Wirbels. Links: Während sich der stabile Wirbel auf die Messsonde zubewegt, steigt die Geschwindigkeit kontinuierlich an, beim turbulenten Aufbrechen kommt es dann zu starken Fluktuationen. Rechts: Energiespektrum in Abhängigkeit des Abstandes der Messsonde von der wirbelerzeugenden Stufe. Im Bereich des turbulenten Aufbrechens wird eine gute Übereinstimmung mit dem von Kolmogorov vorhergesagten Energiespektrum gefunden. Die im Inlet gezeigten kompensierten Spektren zeigen teilweise ein ausgeprägtes Plateau. Entnommen aus [CMP03].

nach startet der Prozess von vorne, so dass sich insgesamt ein periodisches Signal ergibt. Das Geschwindigkeitsfeld wird mit einem Anemometer unter Verwendung der Taylorhypothese gemessen. Eine Visualisierung der Strömung durch Tinte ist in Abbildung 1.11 zu sehen. Gut zu erkennen sind die durch differentielle Rotation zu einer Spiralstruktur verzerrte Tintenspur in der stabilen Phase und die erhöhte turbulente Diffusion während des turbulenten Aufbrechens des Wirbels. Das interessante experimentelle Ergebnis ist, dass sich bei einer Mittelung über den gesamten Zyklus ein Energiespektrum  $E(k) \sim k^{-\frac{5}{3}}$  ergibt, wie es auch in voll entwickelter Turbulenz gemessen wird. Eine genauere Untersuchung ergibt, dass sich das Spektrum zu Zeiten des turbulenten Aufbrechens des Wirbels ergibt (siehe dazu Abbildung 1.12). Weitere Einblicke liefern die in [CMP04] untersuchten Analogien zum Lundgrenwirbel. Hierdurch offenbart sich nämlich ein physikalischer Mechanismus für die Energiekaskade hin zu kleinen Skalen. Durch differentielle Rotation bilden sich immer feinere Spiralstrukturen aus, und die Streckung entlang der Achse sorgt aufgrund der Inkompressibilität für ein zusätzliches Zusammenstauchen in radialer Richtung. Insgesamt schafft das vorliegende Experiment damit einen physikalischen Zusammenhang zwischen der einzelnen Struktur als Baustein und Eigenschaften voll entwickelter Turbulenz. Bemerkenswert ist in diesem Zusammenhang, dass sich das Spektrum nur bei einer Mittelung über die Lebensdauer des Wirbels ergibt. Das legt den Schluss nahe, dass es sich bei einem turbulenten Feld um eine Überlagerung vieler Wirbelstrukturen unterschiedlicher Entwicklungsstufen handeln könnte.

Insgesamt stellt sich die Situation also wie folgt dar: Systematische Studien voll entwickelter Turbulenz im Lagrangebild zeigen Signaturen kohärenter Strukturen. Studien, die sich konkret auf einzelne Wirbel oder ein statistisches Ensemble selbiger beziehen, konzentrieren sich auf das Eulerbild. Eine Untersuchung, welchen Einfluss Wirbelstrukturen auf Lagrangesche Testteilchen haben, hat nach Kenntnis des Verfassers in Bezug auf Geschwindigkeits- und Beschleunigungsstatistiken bisher nicht stattgefunden. Das motiviert die Fragestellungen der vorliegenden Arbeit:

- Wie bewegt sich ein Testteilchen in einem Wirbel?
- Welchen Einfluss haben Wirbel auf die Teilchenstatistik?
- Wie wirkt sich die Ensemblemittelung über eine Menge von Lagrangeteilchen in einem einzelnen Wirbel aus?
- Kann umgekehrt ein Ensemble von Wirbeln, durch das sich ein Lagrangeteilchen bewegt, Aspekte der Lagrangeschen Teilchenstatistik erklären, wie sie in Experiment und DNS beobachtet werden?
- Wie entwickeln sich Teilchentrajektorien in einem Ensemble frei evolvierender Wirbel?

All diese Fragen hofft der Verfasser in den kommenden Kapitel zu diskutieren und zu beantworten. Die ersten drei Fragen werden in Kapitel 3 adressiert und anhand der Beispiele des Punktwirbels, des Lambwirbels, der zweidimensionalen Lundgrenspirale und

des Burgerswirbels diskutiert. Das Kapitel 4 widmet sich einem Modell zur Einteilchenstatistik. Hier werden ein einzelnes Lagrangeteilchen in einer zeitlichen Sequenz verschiedener Burgerswirbel betrachtet und die sich dabei ergebenden statistischen Eigenschaften untersucht. Kapitel 5 trägt einige Ergebnisse zur direkten numerischen Simulation von Ensembles frei zerfallender kohärenter Strukturen zusammen.



## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen einige theoretische Grundlagen zur Turbulenz erläutert werden. Dabei wird kein Wert auf Vollständigkeit gelegt, vielmehr sollen der theoretische Rahmen, in dem diese Arbeit zu sehen ist, aufgezeigt und die im Folgenden benutzten Größen definiert werden. Es gibt einige umfassende Lehrbücher zum Thema, der interessierte Leser sei beispielsweise auf [Dav04, Pop00, Fri95] verwiesen.

Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut. Zunächst werden die Grundgleichungen der Hydrodynamik erläutert, bevor die Notwendigkeit einer statistischen Theorie der Turbulenz begründet wird. In der vorliegenden Arbeit werden kohärente Strukturen in zwei und drei Dimensionen untersucht, auf die „klassische“ Theorie der Turbulenz nach Kolmogorov wird kaum Bezug genommen. Dennoch spielt diese Theorie im Hinblick auf die Interpretation der Ergebnisse des Kapitels 4 eine Rolle, weswegen sie zumindest angerissen werden soll. Aus demselben Grund wird zudem das Phänomen der Intermittenz kurz erläutert.

### 2.1 Die mathematische Beschreibung einer Flüssigkeit

#### Die Grundgleichungen der Hydrodynamik

Die Navier-Stokes-Gleichung beschreibt das Geschwindigkeitsfeld eines Fluids. Sie stellt quasi die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Kontinuum dar. Unter der Annahme einer inkompressiblen Flüssigkeit mit Dichte Eins lautet sie

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.1)$$

Dabei ist  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  das von Ort und Zeit abhängige Geschwindigkeitsfeld und  $p(\mathbf{x}, t)$  der Druck. Das Geschwindigkeitsfeld kann dabei zwei- oder dreidimensional sein, wann immer Unterschiede auftreten, wird das nötigenfalls erläutert.  $\nu$  beschreibt die kinematische Viskosität der Flüssigkeit. Die Inkompressibilität der Flüssigkeit erfordert

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (2.2)$$

Diese Gleichung sichert in zwei Dimensionen die Existenz einer Stromfunktion  $\psi(\mathbf{x}, t)$ , aus der sich die Geschwindigkeitskomponenten ergeben über

$$u_x(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \quad \text{und} \quad u_y(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Bei der Navier-Stokes-Gleichung handelt es sich also um eine nichtlineare Advektions-Diffusions-Gleichung. Sie beschreibt die zeitliche Änderung des Geschwindigkeitsfeldes, die durch den Druckgradienten und den Diffusionsterm getrieben wird. Dabei ist der Druck allerdings keine unabhängige Größe. Durch Anwenden der Divergenz auf die Gleichung (2.1) erhält man unter Ausnutzung von Gleichung (2.2)

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla((\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)). \quad (2.4)$$

In Analogie zur Elektrodynamik handelt es sich um eine Poissongleichung, die Inhomogenität ist (bis auf das Vorzeichen) durch die Divergenz der Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung gegeben. Diese Gleichung lässt sich mit Hilfe der Greensfunktion lösen. Im Falle von drei Raumdimensionen lautet die Lösung

$$p(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi} \int d^3 \mathbf{x}' \frac{\nabla_{\mathbf{x}'}((\mathbf{u}(\mathbf{x}', t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}'}))}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}. \quad (2.5)$$

Das offenbart den nichtlokalen Charakter des Druckes, der Druck hängt vom momentanen Geschwindigkeitsfeld an allen Orten ab.

Eine weitere wichtige Größe zur Beschreibung einer Flüssigkeit ist die Vortizität, die ein Maß für die lokale Verwirbelung einer Flüssigkeit darstellt. Sie ist definiert als

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.6)$$

Im Falle einer zweidimensionalen Strömung ist die Vortizität ein Skalar,  $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}_z$ , der mit der Stromfunktion über

$$\omega(\mathbf{x}, t) = -\Delta \psi(\mathbf{x}, t) \quad (2.7)$$

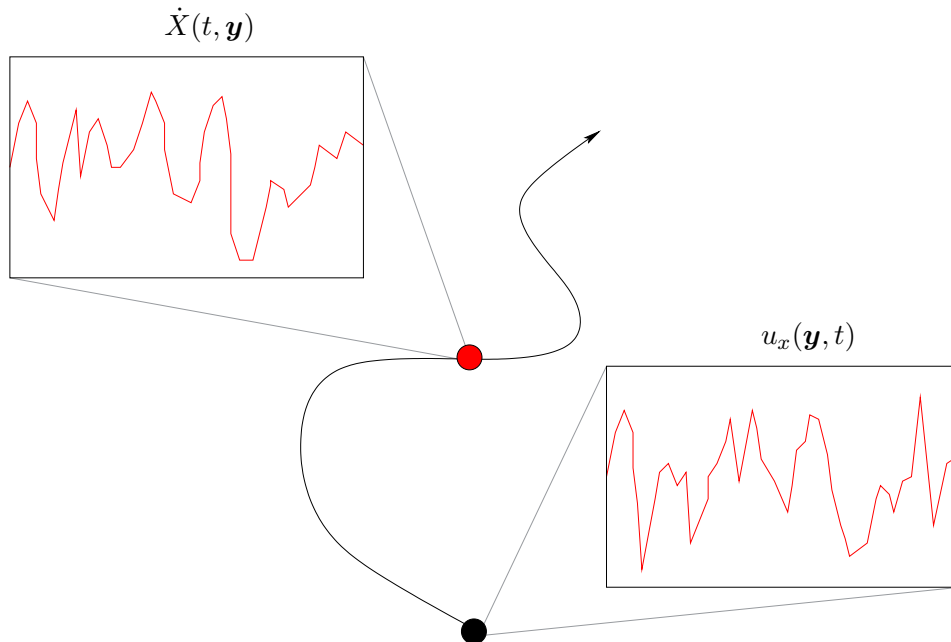
zusammenhängt. Wendet man auf die Navier-Stokes-Gleichung die Rotation an, so erhält man nach einigen Umformungen die Wirbeltransportgleichung, die in drei Dimensionen gegeben ist durch

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) - (\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t). \quad (2.8)$$

In zwei Dimensionen handelt es sich um eine skalare Gleichung, die sich weiter vereinfacht, da  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0$  gilt,

$$\frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t). \quad (2.9)$$

Der auch als Wirbelstreckungsterm bezeichnete Term  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u}$  sorgt für eine unterschiedliche Topologie der auftretenden Strukturen in zwei und drei Dimensionen. Wie man sich klar machen kann, verursacht dieser Term ein Filamentieren der Vortizität, es bilden sich in drei Dimensionen also eher dünne Wirbelfäden aus. In zwei Dimensionen organisieren sich, wie bereits erwähnt, die Wirbel eher in runden Flecken. Effektiv sorgt der Wirbelstreckungsterm in drei Dimensionen durch das Ausbilden von Wirbelfäden für einen Energietransport hin zu kleinen Skalen, was ein möglicher physikalischer Mechanismus



**Abbildung 2.1:** Euler- vs. Lagrangebild. Im Eulerbild wird das Fluid an einem raumfesten Punkt  $\mathbf{y}$  untersucht (schwarz). Ein an diesem Punkt gestartetes Lagrangepartikel (rot) folgt dem Geschwindigkeitsfeld.

für die beobachtete Energiekaskade ist. In zwei Dimensionen stellt man einen Transport der Energie zu großen Skalen fest, was daher auch als inverse Energiekaskade bezeichnet wird (siehe dazu auch [Dav04, Tab02]). Wie turbulent ein Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit ist, lässt sich über die Reynoldszahl charakterisieren. Diese ist definiert über

$$\text{Re} = \frac{uL}{\nu}, \quad (2.10)$$

wobei  $L$  die Längenausdehnung des Systems und  $u$  eine für das System typische Geschwindigkeit bezeichnet. Eine hohe Reynoldszahl korrespondiert mit einem stark turbulenten Feld. Man liest ab, dass sich diese bei festgehaltener Systemlänge entweder durch eine hohe Geschwindigkeit oder eine kleine kinematische Viskosität erreichen lässt.

### Das Lagrangebild

Die bisherige Beschreibung der Flüssigkeit bezieht sich auf einen raumfesten Punkt  $\mathbf{x}$ . Diese Beschreibungsebene wird auch als Eulerbild bezeichnet. In äquivalenter Weise kann man auch in ein mitbewegtes Koordinatensystem wechseln und die Flüssigkeit anhand eines virtuellen massefreien Teilchens, das sich mit der Strömung mitbewegt, beschreiben, was als Lagrangebild bezeichnet wird (siehe Abbildung 2.1). Gewissermaßen markiert man hierzu einen Punkt des Geschwindigkeitsfeldes und folgt diesem dann. Die Bewegungsgleichungen für ein solches Lagrangepartikel, das sich zum Zeitpunkt  $t = 0$  am Ort

$\mathbf{y}$  befindet, lauten

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) &= [\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} \\ \ddot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) &= [-\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)]_{\mathbf{x}=\mathbf{X}(t, \mathbf{y})}.\end{aligned}\tag{2.11}$$

Kennt man die Lagrangeschen Trajektorien aller möglichen Startpunkte  $\mathbf{y}$ , so ist die Flüssigkeit in äquivalenter Weise zur Eulerschen Beschreibungsebene charakterisiert. Das Lagrangebild erweist sich nicht selten als das intuitivere, so wird beispielsweise der Einfluss von Wirbeln durch Teilcheneinfänge besonders deutlich, wie in Kapitel 1 erläutert wurde. Dass die Lagrangesche Beschreibungsebene von physikalischer Relevanz ist, zeigt sich auch daran, dass manche Größen entlang der Trajektorien erhalten bleiben. So lässt sich nachrechnen, dass sich im Fall der zweidimensionalen Eulergleichung<sup>1</sup> die Vortizität entlang einer Trajektorie nicht ändert, denn

$$\left[ \frac{d\omega}{dt} \right]_{\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} = \left[ \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega \right]_{\mathbf{X}(t, \mathbf{y})} = 0.\tag{2.12}$$

So kann man folgern, dass die Änderung der Vortizität entlang einer Trajektorie nur im viskosen Fall auftreten kann. Eine weitere wichtige Lagrangesche Observable ist die Beschleunigung. An Gleichung (2.11) lässt sich ablesen, dass dazu sowohl der Druckgradient als auch die Diffusion beitragen. Im Falle kleiner Viskositäten wird die Beschleunigung vom Druckgradienten dominiert. Die Untersuchungen der vorliegenden Arbeit finden im Lagrangebild statt.

## Die Lagrangesche Beschreibung als Abbildung

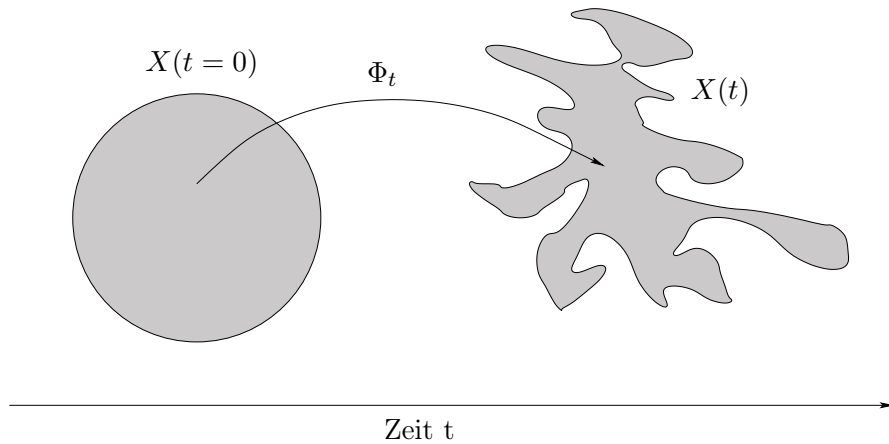
Betrachtet man nun nicht ein einzelnes Lagrangeteilchen, sondern eine ganze Menge  $X \in \mathbb{R}^2$  oder  $X \in \mathbb{R}^3$  von Fluidpartikeln, so bewegt sich jedes Teilchen gemäß den Bewegungsgleichungen (2.11) fort. Insgesamt definiert das z.B. im Falle einer zweidimensionalen Strömung eine Abbildung

$$\Phi_t : X(t=0) \subset \mathbb{R}^2 \mapsto X(t) \subset \mathbb{R}^2,\tag{2.13}$$

mit deren Kenntnis die Flüssigkeitsströmung vollständig charakterisiert ist; Zeichnung 2.2 verdeutlicht das. Bei der Abbildung  $\Phi_t$  handelt es sich um den Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . Die Abbildung  $\Phi_t$  muss aufgrund der Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes  $\det \Phi_t = 1$  erfüllen. In den meisten Fällen ist aufgrund des Fehlens einer analytischen Lösung von Gleichung (2.1) auch die Abbildung  $\Phi_t$  nicht geschlossen darstellbar, eine Ausnahme bildet die Punktwirbellösung der Eulergleichung, wie in Abschnitt 3.1 erläutert werden wird.

---

<sup>1</sup>Die Eulergleichung ist der nichtviskose Fall der Navier-Stokes-Gleichung.



**Abbildung 2.2:** Der Fluss des Vektorfeldes  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  definiert eine Abbildung  $\Phi_t$ , die die Strömung vollständig charakterisiert.

## 2.2 Die statistische Beschreibung von Turbulenz

### Die Notwendigkeit einer statistischen Theorie

Bei der Navier-Stokes-Gleichung handelt es sich um eine nichtlineare partielle Differentialgleichung. Sie ist vollkommen deterministisch, d.h. unter gleichen Anfangsbedingungen erhält man dieselbe Lösung für alle Zeiten. Führt man hingegen ein Turbulenzexperiment durch, bei dem man die äußeren Parameter nicht verändert, so wird man feststellen, dass die genaue Form der Strömung sich von Durchführung zu Durchführung unterscheidet. Die genaue zeitliche Entwicklung der Strömung vorherzusagen stellt sich als unmöglich heraus. Der Grund hierfür liegt in der nichtlinearen Natur der Gleichung. Wie in der Theorie der dynamischen Systeme bekannt, kann bei deterministischen Bewegungsgleichungen, die chaotisches oder komplexes Verhalten zeigen, eine kleine Änderung in den Anfangsbedingungen schon nach kurzer Zeit zu sehr unterschiedlichen Lösungen führen. In allen experimentell realisierbaren Situationen kann man die Anfangsbedingungen nur mit einer endlichen Genauigkeit kennen, so dass bei dem genannten Turbulenzexperiment zwei im Rahmen der Messungenauigkeiten gleiche Anfangsbedingungen zu unterschiedlichen Strömungsformen führen. Möchte man in solch einem Experiment eine Aussage wie „Nach zehn Sekunden bildet sich im linken unteren Bereich des Messvolumens eine starke Wirbelstruktur aus.“ überprüfen, so kommt man zu dem Ergebnis, dass sie nur bei einem Bruchteil der Durchführungen wahr ist. In diesem Sinne kann man den Ausgang des Experimentes als zufällig bezeichnen. Weiter gefasst kann man in diesem Sinne davon sprechen, dass die deterministische Navier-Stokes-Gleichungen zufallsbehaftete Lösungen erzeugt.

Eine ähnlich gelagerte Situation findet man beim idealen Gas. Aus experimenteller Sicht ist es unmöglich, die einzelnen Positionen aller im Messvolumen befindlichen Gaspartikel zu kennen, geschweige denn diese Datenmenge abzuspeichern. Häufig ist jedoch

diese Information nicht von Relevanz, vielmehr interessiert man sich für makroskopische Größen wie Druck, Temperatur etc.. Mit Hilfe der Statistischen Physik ist es möglich, eine Beschreibung für Systeme im thermodynamischen Gleichgewicht auf dieser Ebene zu finden. Analog dazu ist bei einem Turbulenzexperiment mit Lagrangeteilchen die einzelne Trajektorie in einem statistischen Sinne nicht von Relevanz, vielmehr interessieren Größen wie zum Beispiel die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Wert für die Beschleunigung eines Teilchens zu messen. Und tatsächlich stellt man bei einer großen Zahl von Wiederholungen des Experiments fest, dass solche Größen (nahezu) unabhängig von der einzelnen Realisierung sind. Die Suche nach der Lösung des Problems der Turbulenz manifestiert sich also in der Suche nach einer statistischen Theorie für dieses komplexe System. Bei der Suche nach dieser Theorie darf man allerdings nicht vergessen, dass die Strömungen zwar bei jeder einzelnen Durchführung des Experiments im Detail anders aussehen, bestimmte charakteristische Merkmale wie zum Beispiel ausgeprägte Wirbelstrukturen immer wieder auftreten. Wie diese einzelnen Strukturen zu statistischen Größen beitragen, spielt für das Verständnis des Phänomens Turbulenz eine signifikante Rolle.

### Die Energiekaskade nach Richardson

Richardson prägte 1922 das Bild der Energiekaskade, eine anschauliche Vorstellung für die dynamischen Vorgänge in einem dreidimensionalen turbulenten Fluid. Seine Vorstellungen sind wichtige Vorüberlegungen für die quantitativere Theorie Kolmogorovs.

Beobachtet man ein turbulentes Geschwindigkeitsfeld, so stellt man fest, dass sich darin Wirbelstrukturen aller Größen befinden. Allerdings haben diese Strukturen nur eine begrenzte Lebensdauer und zerfallen nach einer gewissen charakteristischen Zeit. Die Idee ist nun, dass sich das turbulente System in einem Fließgleichgewicht befindet, in das auf einer großen Skala Energie injiziert wird, die dann zu kleinen Skalen transportiert wird. Richardson liefert ein phänomenologisches Argument für diesen Mechanismus. Demnach bleiben von einer zerfallenen großen Struktur einige kleinere Strukturen zurück. Diese zerfallen ihrerseits wieder und hinterlassen noch kleinere Wirbel. Diese Kaskade setzt sich so lange fort, bis die Größe der Strukturen eine Skala erreicht, auf der die Dissipation wirksam wird. Hier findet die Kaskade ihren Abbruch. Von einem mathematischen Standpunkt aus kann der oben genannte Wirbelstreckungsterm in der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung Richardsons Phänomenologie erklären.

Konzeptionell ist Richardsons Vorstellung insofern wichtig, dass Wirbelstrukturen als zentrale dynamische Bestandteile eines turbulenten Geschwindigkeitsfeldes identifiziert werden. Im Hinblick auf Kolmogorovs Theorie zeigt Richardsons Energiekaskade die Wichtigkeit des Energietransports von großen auf kleine Skalen.

Es sei an dieser Stelle noch einmal ausdrücklich darauf hingewiesen, dass diese Vorstellungen nur für eine dreidimensionale Strömung gelten. Wie bereits erwähnt beobachtet man in zwei Raumdimensionen sogar den als inverse Energiekaskade bezeichneten gegenteiligen Effekt.

## Die Hypothesen der Kolmogorovtheorie

Auf Grundlage der Vorstellungen von Richardson formulierte Kolmogorov in einer 1941 erschienenen Arbeit seine Theorie<sup>2</sup>, die einige quantitative Ergebnisse lieferte. Die zu Grunde liegenden Hypothesen werden kurz vorgestellt.<sup>3</sup>

Injiziert man in ein turbulentes Fluid auf großen Skalen Energie, so wird das System auf diesen Skalen in der Regel Anisotropien zeigen. Kolmogorov nimmt in seiner ersten Hypothese nun an, dass bei der Entwicklung der Kaskade hin zu kleinen Skalen sämtliche Informationen über diese Anisotropien verloren gehen. Genauer gesagt lautet die Aussage, dass bei hinreichend hoher Reynoldszahl die turbulenten Bewegungen der kleinen Skalen statistisch isotrop werden. Diese Aussage ist als **Hypothese der lokalen Isotropie** bekannt. Als Konsequenz sollte *jede* hinreichend turbulente Strömung bei gleicher Reynoldszahl auf kleinen Skalen dieselben statistischen Eigenschaften zeigen. Ob die Turbulenz hinter einem angeströmten Gitter oder in einer Grenzschicht entsteht, ist demnach für die Statistik der kleinen Skalen egal. Diese Hypothese impliziert also eine gewisse Universalität turbulenter Strömungen.

Wenn man sich nun überlegt, von welchen Parametern der Energietransport von großen auf kleine Skalen abhängt, so fallen einem die Rate  $\varepsilon$ , mit der Energie von Skala zu Skala transportiert wird, und die kinematische Viskosität  $\nu$  ein, die den Abbruch der Kaskade bestimmt. Das formuliert Kolmogorov in seiner **ersten Ähnlichkeitshypothese** so: In jeder turbulenten Strömung hat die Statistik der Bewegungen der kleinen Skalen bei hinreichend hoher Reynoldszahl eine universelle Form, die eindeutig durch  $\varepsilon$  und  $\nu$  bestimmt ist. Aus den beiden Größen  $\varepsilon$  und  $\nu$  lassen sich eine Längen-, Geschwindigkeits- und Zeitskala angeben, bei der Kolmogorovs Hypothese erfüllt sein soll. Diese Kolmogorovlänge, -geschwindigkeit und -zeit sind definiert über

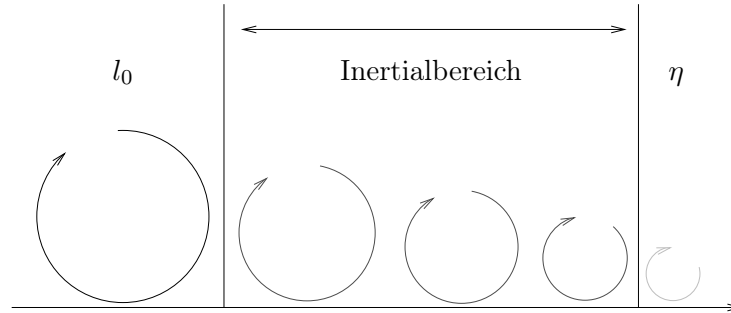
$$\eta = \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}, \quad u_\eta = (\varepsilon\nu)^{1/4} \quad \text{und} \quad \tau_\eta = \left(\frac{\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}. \quad (2.14)$$

Die erste Ähnlichkeitshypothese ist in dem Sinne zu verstehen, dass alle hinreichend turbulenten Strömungen auf kleinen Skalen statistisch identisch sind, sobald man sie mit den entsprechenden Kolmogorovgrößen reskaliert.

Die ersten beiden Hypothesen Kolmogorovs machen eine Aussage über die kleinen Skalen in der Größenordnung  $\eta$ . Auf dieser Skala spielt die Viskosität eine entscheidende Rolle, hier wird die Energie dissipiert. Folglich wird diese Skala auch als Dissipationskala bezeichnet. Um ein vollständig turbulentes Feld zu erhalten, wird auf einer großen Skala  $l_0$  dem System Energie zugeführt. Bei einem hinreichend turbulenten Fluid sind diese Skalen deutlich voneinander getrennt. Kolmogorovs **zweite Ähnlichkeitshypothese** macht eine Aussage über den Bereich dazwischen. Sie lautet: In jeder turbulenten Strömung bei hinreichend hoher Reynoldszahl hat die Statistik der Bewegungen auf der Skala  $l$  im Bereich  $l_0 \gg l \gg \eta$  eine universelle Form, die eindeutig von  $\varepsilon$  bestimmt, jedoch unabhängig von  $\nu$  ist. Dieser Bereich wird als Inertialbereich bezeichnet, hier spielt

<sup>2</sup>Diese Theorie wird deshalb auch gemeinhin mit dem Kürzel K41 bezeichnet.

<sup>3</sup>Der Verfasser folgt in den kommenden Zeilen [Pop00].



**Abbildung 2.3:** Kolmogorovs Vorstellung voll entwickelter Turbulenz. Auf einer großen Skala  $l_0$  wird Energie in das System injiziert, die dann über eine Kaskade hin zu kleinen Skalen transportiert wird. Auf der Dissipationsskala  $\eta$  wird sie dissipiert.

die Viskosität also keine Rolle. Bereits an dieser Stelle sei erwähnt, dass der Ausdruck „universelle Form“ impliziert, dass die Verteilungsfunktionen im Inertialbereich selbstähnliches Verhalten zeigen. Das bedeutet, dass sie in ihrer funktionalen Form identisch sind und durch Reskalierung ineinander überführt werden können.<sup>4</sup>

### Konsequenzen der Hypothesen Kolmogorovs

Aus den genannten Hypothesen folgen einige quantitative Ergebnisse, derer zwei an dieser Stelle nicht hergeleitet, sondern nur kurz erwähnt werden sollen.

Eines der bekanntesten Ergebnisse der Kolmogorovtheorie besagt, dass im Inertialbereich für das Energiespektrum gilt

$$E(k) = C_0 \varepsilon^{-2/3} k^{-5/3}, \quad (2.15)$$

wobei es sich bei  $C_0$  um eine universelle Konstante handelt. Dieses Ergebnis ist experimentell gut überprüft und kann in vielen zwei- wie dreidimensionalen turbulenten Strömungen verifiziert werden. Ein weiteres Ergebnis betrifft die Eulerschen Strukturfunktionen. Diese sind für einen räumlichen Abstand  $r$  definiert über

$$\langle [\Delta u]^p \rangle = \langle [u_x(\mathbf{x} + r\mathbf{e}_x) - u_x(\mathbf{x})]^p \rangle. \quad (2.16)$$

Auf Grundlage der Kolmogorovschen Hypothesen folgt aus Dimensionsgründen im Inertialbereich

$$\langle [\Delta u]^p \rangle \sim (\varepsilon r)^{p/3}. \quad (2.17)$$

In Experimenten wird diese Vorhersage bis  $p = 3$  gut erfüllt, oberhalb davon weichen die Strukturfunktionen systematisch ab. Für  $p = 12$  wird sogar schon ein Wert von 2.8 anstelle des erwarteten Wertes von 4 gemessen [Dav04]. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass reale turbulente Strömungen Abweichungen von Kolmogorovs ursprünglicher Theorie zeigen.<sup>5</sup>

---

<sup>4</sup>Für einige interessante Arbeiten zu diesem Themenkomplex siehe [FP97, RPF01, RPF<sup>+</sup>02].

<sup>5</sup>U.a. dadurch motiviert veröffentlichte Kolmogorov 1962 eine erweiterte Theorie.



### Lagrangesche Messgrößen und K41 im Lagrangebild

Die Kolmogorovtheorie wird auf der Eulerschen Beschreibungsebene entwickelt. Ähnliche Dimensionsargumente lassen sich jedoch auch für die Lagrangesche Beschreibung anführen. Hier definiert man anstelle eines räumlichen Inkrements ein zeitliches (siehe z.B. [MLP04, BBC<sup>+</sup>04b]),

$$v_x(\tau) = u_x(t + \tau) - u_x(t). \quad (2.18)$$

Eine derartige Definition des Inkrements ist insofern interessant, als dass für kleine Zeitdifferenzen  $\tau$  diese Größe mit der Lagrangeschen Beschleunigung verknüpft ist,

$$a_x = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{v_x(\tau)}{\tau}. \quad (2.19)$$

Das hat zur Folge, dass für kleine Zeitdifferenzen die Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsinkremente in ihrer funktionalen Form in die Verteilungsfunktion der Beschleunigung übergehen muss,

$$f(a_x) \sim \lim_{\tau \rightarrow 0} f(v_x(\tau)/\tau). \quad (2.20)$$

Für große Zeitinkremente sind  $u_x(t+\tau)$  und  $u_x(t)$  unkorreliert, damit ist hier die Statistik von  $v_x(\tau)$  eher mit der Statistik des Geschwindigkeitsfeldes selbst verknüpft. Somit moderiert die obige Inkrementdefinition gewissermaßen zwischen den beiden Lagrangeschen Größen Beschleunigung und Geschwindigkeit. Welcher Grenzfall für ein gegebenes  $\tau$  treffender ist, hängt von den Korrelationen zwischen  $u_x(t+\tau)$  und  $u_x(t)$  ab. Deshalb definiert man die Lagrangesche Autokorrelationsfunktion für die Geschwindigkeitskomponente,

$$C^{u_x}(\tau) = \frac{\langle u_x(t + \tau) u_x(t) \rangle}{\langle u_x^2 \rangle}. \quad (2.21)$$

Im Experiment oder in numerischen Auswertungen benutzt man häufig eine leicht modifizierte Definition. Hier tritt an die Stelle von  $\langle u_x^2 \rangle$  im Nenner häufig das Quadrat der empirischen Standardabweichung  $\sigma_{u_x}$  dieser Größe. In analoger Weise definiert man die Autokorrelationsfunktion für die Beschleunigungskomponente  $a_x$ .

Als Lagrangesche Strukturfunktionen  $S_n(\tau)$  definiert man den Betrag der Momente der Geschwindigkeitsinkrementverteilungsfunktionen,

$$S_n(\tau) = \langle v_x(\tau)^n \rangle = \langle |u_x(t + \tau) - u_x(t)|^n \rangle. \quad (2.22)$$

Im Geiste der Dimensionsanalyse der Kolmogorovtheorie erhält man für die Lagrangeschen Strukturfunktionen im Inertialbereich

$$S_n(\tau) \sim (\varepsilon \tau)^{n/2}. \quad (2.23)$$

Das bedeutet insbesondere, dass die zweite Strukturfunktion sich linear in  $\tau$  verhalten sollte. Dieser Sachverhalt wird häufig genutzt, um die Existenz eines Inertialbereiches zu manifestieren. Analog zum Eulerbild stimmen für  $n > 2$  die Ergebnisse aus Experimenten

und Numerik nicht mehr mit den Kolmogorovschen Vorhersagen überein, man sucht daher nach einem verallgemeinerten Skalierungsverhalten

$$S_n(\tau) \sim \tau^{\xi_n}. \quad (2.24)$$

Mit dieser Verallgemeinerung zeigen die Strukturfunktionen zwar noch Potenzverhalten, die Selbstähnlichkeit der Verteilungsfunktionen im Inertialbereich ist allerdings nicht mehr gewährleistet.

### Intermittenz

Eng verknüpft mit den letzten Bemerkungen ist der oft bemühte, aber selten klar definierte Begriff der Intermittenz. Im Sinne der Chaostheorie bzw. der Theorie dynamischer Systeme wird mit Intermittenz häufig die räumlich oder zeitlich dicht benachbarte Koexistenz von Ordnung und Chaos bezeichnet. So kann sich beispielsweise in manchen chaotischen Systemen das Signal lange Zeit in der Nähe eines bestimmten Wertes aufhalten und dann plötzlich starke irreguläre Ausschläge zeigen.

Betrachtet man ein dreidimensionales turbulentes Feld, so findet man Bereiche, in denen die Strömung nahezu laminar ist, während sie in anderen Bereich hochgradig turbulent ist. In diesen Bereichen finden sich häufig die langen, intensiven Wirbelfäden. Auch in diesem Zusammenhang wird von der intermittenten Verteilung der Vortizität gesprochen. Diese Definition von Intermittenz, die häufig auch *small-scale*-Intermittenz genannt wird, hat unmittelbare Konsequenzen für die Statistik. Eine der Konsequenzen ist, dass, wenn die Statistiken im Inertialbereich nicht nur von  $\varepsilon$ , sondern zudem noch von einem weiteren Parameter abhängen, sich zeigen lässt, dass das Skalierungsverhalten der Eulerschen Strukturfunktionen nicht mehr die einfache Form (2.17) haben kann. Als Ergebnis müssen die Verteilungsfunktionen der Geschwindigkeitsinkremente keine Selbstähnlichkeit mehr aufweisen, sondern können im Inertialbereich auch einen Übergang von einer funktionalen Form in die andere zeigen. Im Falle der Lagrange-schen Geschwindigkeitsinkrementverteilungen beobachtet man solch einen Übergang von Verteilungsfunktionen mit ausgeprägten Flügeln für kurze Zeitdifferenzen  $\tau$  hin zu nahezu gaußischen Verteilungsfunktionen für große Zeitdifferenzen  $\tau$ . Den Übergang von gaußförmigen Verteilungsfunktionen zu Verteilungsfunktionen mit starken Flügeln wird daher in der Literatur auch als „intermittentes Aufweiten“ bezeichnet. Zudem werden die Verteilungsfunktionen mit den ausgeprägten Flügeln auch als intermittente Verteilungen bezeichnet. Hier schließt sich der Kreis zu der aus der Chaostheorie bekannten Begriffsnutzung. Das eingangs erwähnte Signal, das hin und wieder starke Ausschläge zeigt, führt nämlich zu hochgradig nichtgaußischen Verteilungsfunktionen.

Um den Übergang von einer funktionalen Form in die andere zu charakterisieren, bedient man sich häufig der Kurtosis

$$K(\tau) = \frac{\langle v_x(\tau)^4 \rangle}{\langle v_x(\tau)^2 \rangle^2} - 3. \quad (2.25)$$

Stark intermittente Verteilungsfunktionen zeigen einen hohen Wert für die Kurtosis, für eine Gaußverteilung gilt  $K(\tau) = 0$ .

Im Lagrangebild kann man besonders einfach eine Anschauung für die Ursache der Intermittenz entwickeln. Wenn die Vortizität in einem dreidimensionalen turbulenten Fluid tatsächlich in dünnen Wirbelfilamenten organisiert ist, die von eher laminaren Bereichen umschlossen werden, so bewegt sich ein Teilchen für eine gewisse Zeit durch eher „ruhige“ Bereiche. In der Nähe eines Wirbels kann es dann zu den in Kapitel 1 gezeigten Wirbeln einfangen kommen, die sich durch hohe Werte der Geschwindigkeit und Beschleunigung ausdrücken. Das führt dann zu den ausgeprägten Flügeln der Verteilungsfunktion. In diesem Sinne werden in der Literatur häufig die Wirbelstrukturen für das Auftreten von Intermittenz verantwortlich gemacht.

Für den Fall zweidimensionaler Turbulenz ist dieses Argument nicht unmittelbar anwendbar, schließlich organisiert sich die Vortizität dort nicht in dünne Filamente, sondern eher in großskalige, raumfüllende Strukturen. Aktuelle Untersuchungen beschäftigen sich daher mit der Frage nach Intermittenz in zweidimensionaler Turbulenz.

### Der Übergang der Geschwindigkeitsinkrementverteilung

Wir schließen dieses Kapitel mit einer Randbemerkung. Experimentelle und numerische Ergebnisse zeigen den oben beschriebenen Übergang von intermittenten Verteilungsfunktionen zu gaußischen. Unter schwachen Voraussetzungen kann man mathematisch zeigen, dass dieser Übergang auch tatsächlich stattfindet, in dem Sinne, dass die Geschwindigkeitsinkrementverteilung einen Übergang von einer hohen Kurtosis zu verschwindender Kurtosis zeigen muss.

Wir gehen von stationärer voll entwickelter Turbulenz aus. Wir setzen weiter voraus, dass die Verteilungsfunktion  $f(a_x)$  intermittent ist, was für die Kurtosis  $K^a(\tau) > 0$  bedeutet. Experimente belegen, dass das Geschwindigkeitsfeld in einer turbulenten Strömung nahezu gaußverteilt ist, wir setzen daher  $K^u = 0$  für die Kurtosis der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  an. Zusätzlich benötigen wir die Voraussetzung, dass die Lagrangeschen Strukturfunktionen  $S_n(\tau)$  stetige Funktionen von  $\tau$  sind, die für  $\tau > 0$  nirgends verschwinden, was experimentell gut gesichert ist. Aus Gründen der Übersichtlichkeit wird fortan der Index  $x$  weggelassen. Für die Kurtosis der Geschwindigkeitsinkrementverteilung  $f(v(\tau))$  erhält man durch Einsetzen der Inkrementdefinition

$$\begin{aligned}
 K(\tau) &= \frac{\langle v^4(\tau) \rangle}{\langle v^2(\tau) \rangle^2} - 3 \\
 &= \frac{2\langle u^4 \rangle - 4(\langle u(t+\tau)^3 u(t) \rangle + \langle u(t+\tau) u(t)^3 \rangle) + 6\langle u(t+\tau)^2 u(t)^2 \rangle}{4\langle u^2 \rangle^2 (1 - C^u(\tau))^2} - 3,
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

wobei  $C^u(\tau)$  die Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  bezeichnet. Die einzige Abhängigkeit dieses Ausdrucks von der Zeitdifferenz  $\tau$  findet sich in der Autokorrelationsfunktion. Um die Form der Verteilungsfunktionen für kleine Zeiten zu

bestimmen, führt man Grenzübergang  $\tau \rightarrow 0$  durch und erhält

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} K(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle v^4(\tau) \rangle}{\langle v^2(\tau) \rangle^2} - 3 = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\langle v^4(\tau)/\tau^4 \rangle}{\langle v^2(\tau)/\tau^2 \rangle^2} - 3 = K^a(\tau) > 0. \quad (2.27)$$

Das hingegen bedeutet nichts anderes, als dass die Geschwindigkeitsinkrementverteilung im Grenzübergang verschwindender Zeitdifferenz  $\tau$  genau dann intermittiert ist, falls die Verteilungsfunktion der Beschleunigungskomponente es ist.

Alle Experimente zeigen, dass es eine integrale Lagrangesche Zeitskala  $T_L$  gibt, ab der die Lagrangesche Autokorrelationsfunktion für die Geschwindigkeit vollständig dekorreliert ist,  $C^u(\tau) = 0$  für  $\tau > T_L$ . Darüber hinaus können in diesem Bereich alle Korrelationen in Ausdruck (2.26) aufgebrochen werden. Unter der Voraussetzung, dass  $u$  gaußverteilt ist, verschwinden alle Mittelwerte mit ungerader Potenz, und man kann aufgrund der Stationarität den letzten Summanden des Zählers zusammenfassen,

$$K(\tau) = \frac{1}{2} \frac{\langle u^4 \rangle}{\langle u^2 \rangle^2} - \frac{3}{2} = 0. \quad (2.28)$$

Die letzte Gleichheit folgt wegen der Voraussetzung eines gaußverteilten Geschwindigkeitsfeldes. Das bedeutet, dass oberhalb der Lagrangeschen Zeitskala  $T_L$  die Lagrangeschen Geschwindigkeitsinkrementverteilungen genau wie eine Gaußverteilung eine verschwindende Kurtosis haben müssen. Da es sich bei der Funktion  $K(\tau)$  um eine stetige Funktion von  $\tau$  handelt, muss dieser Übergang stetig erfolgen.

Leider hat man bei dieser Herleitung kein Monotonieargument bei der Hand. Daher kann man durch diese Rechnung nicht die Existenz eines Bereiches, in dem die Verteilungsfunktionen selbstähnlich sind, ausschließen. Dennoch erklärt sie, dass unter den gegebenen Voraussetzungen der experimentell beobachtete Übergang von intermittenten zu nichtintermittenten Verteilungsfunktionen zwingend stattfinden muss.

## 3 Kohärente Strukturen

In Kapitel 1 wurde der Einfluss von Wirbelstrukturen auf die Lagrangesche Teilchendynamik und -statistik anhand von Experimenten und numerischen Simulationen erläutert. Nach den vorgestellten Ergebnissen bilden kohärente Strukturen einen festen Bestandteil turbulenter Strömungen. In drei Dimensionen kommen sie als langgestreckte Wirbelfäden vor, während sie in zwei Dimensionen als runde oder spiralförmige Flecken auftreten. Wenn man den Einfluss dieser Strukturen auf die Teilchenstatistik verstehen möchte, muss man zunächst einen Blick auf die einzelne Struktur werfen und eine Vorstellung für die zu erwartenden dynamischen Effekte auf ein Lagrangeteilchen entwickeln. Möchte man eine turbulente Strömung in äquivalenter Weise zur Eulerschen Betrachtung im Lagrangebild untersuchen, so muss *jeder* Punkt des Fluids untersucht werden. Insofern ist es wichtig, die Effekte zu untersuchen, die sich bei der Mittelung über viele Lagrangeteilchen in einer einzelnen Wirbelstruktur zeigen. Dieses Kapitel soll diese elementaren Fragen diskutieren. Es werden die verschiedenen Wirbellösungen der Euler- bzw. Navier-Stokes-Gleichung vorgestellt und ihr Einfluss auf die Lagrangesche Teilchendynamik untersucht. Als Beispiel zweidimensionaler Lösungen werden der Punktwirbel als Lösung der Eulergleichung und der Lamb-Oseen-Wirbel als viskose Erweiterung vorgestellt. Als nächst komplexere Struktur wird Lundgrens zweidimensionale Spirale vorgestellt und im Hinblick auf Unterschiede zum Lamb-Oseen-Wirbel untersucht. Über die Lundgrentransformation wird dann der Burgerswirbel als Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung diskutiert (siehe dazu auch Kapitel 4).

### 3.1 Punktwirbel

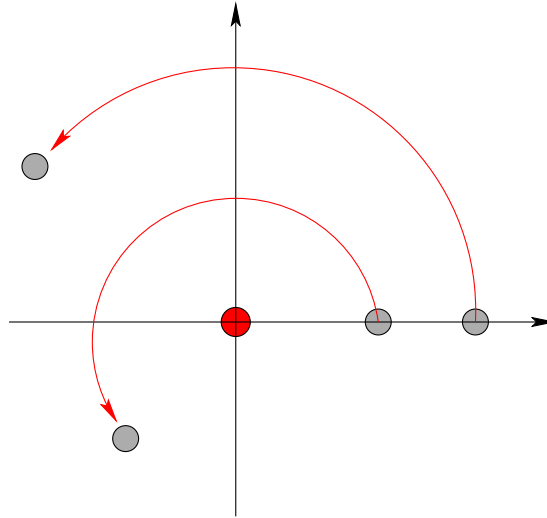
Die einfachste kohärente Struktur ist der Punktwirbel, dem in der Hydrodynamik in etwa die Bedeutung der Punktladung im Fall der Elektrodynamik zukommt. An diesem idealisierten Konzept lassen sich viele Einflüsse von kohärenten Strukturen auf die Lagrangesche Teilchendynamik demonstrieren. Teilweise sind aufgrund der Einfachheit dieser Wirbellösung sogar analytische Lösungen verfügbar, weshalb der Untersuchung dieser Lösung im Folgenden Aufmerksamkeit gewidmet werden soll.

Beim Punktwirbel handelt es sich um eine Lösung der zweidimensionalen Eulergleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t), \quad (3.1)$$

beziehungsweise um eine Lösung der entsprechenden Wirbeltransportgleichung

$$\frac{d}{dt} \omega(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (3.2)$$



**Abbildung 3.1:** Zwei radial benachbarte Lagrangeteilchen werden im Laufe der Zeit durch differentielle Rotation auseinandergeschert.

Die Vortizität nimmt dabei die Form einer Deltafunktion an,<sup>1</sup>

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \Gamma \delta(\mathbf{x}), \quad (3.3)$$

$\Gamma$  bezeichnet dabei die Zirkulation des Wirbels und ist ein Maß für die Stärke;  $\Gamma$  wird daher im folgenden auch als Wirbelstärke bezeichnet. Es wurde angenommen, dass sich der Wirbel im Koordinatenursprung befindet. Die Symmetrie des Problems legt eine Formulierung in Polarkoordinaten nahe. Das zugehörige Geschwindigkeitsfeld hat eine rein azimuthale Komponente und ergibt sich zu

$$\begin{aligned} u_r &= 0 \\ u_\varphi &= \frac{\Gamma}{2\pi r}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Im Koordinatenursprung divergiert das Geschwindigkeitsfeld, besitzt dort also eine Singularität. Mit dem Geschwindigkeitsfeld sind auch die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen festgelegt, sie lauten

$$\begin{aligned} \dot{r} &= 0 \\ \dot{\varphi} &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Die Lösung ergibt sich für ein Teilchen, das sich am Ort  $(r_0, \varphi_0)$  befindet, unmittelbar

---

<sup>1</sup>Dass es sich tatsächlich um eine Lösung der Eulergleichung handelt, wird in Abschnitt 3.2 durch einen Grenzübergang zu verschwindender Viskosität begründet.

zu

$$\begin{aligned} r(t) &= r_0 \\ \varphi(t) &= \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} t + \varphi_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ein Teilchen, das sich im Abstand  $r_0$  zum Ort des Punktwirbels befindet, bewegt sich also bei konstantem Radius  $r_0$  mit einer konstanten Winkelgeschwindigkeit  $\frac{\Gamma}{2\pi r_0^2}$  in azimuthaler Richtung um den Punktwirbel. Die Geschwindigkeit wird durch die Wirbelstärke  $\Gamma$  und den Abstand  $r_0$  bestimmt. Bei der Rotation eines starren Körpers verläuft bei einer konstanten Winkelgeschwindigkeit die azimuthale Geschwindigkeit proportional zu  $r$ , was dazu führt, dass radial benachbarte Punkte immer radial benachbart bleiben. Die Tatsache, dass beim Punktwirbel  $u_\varphi \sim \frac{1}{r}$  gilt, führt zur sogenannten differentiellen Rotation, welche anfänglich radial benachbarte Punkte auseinanderschert. Diese differentielle Rotation ist einer der Gründe für die effektive Mischung in turbulenten Strömungen. Die charakteristischen spiralförmigen Verzerrungen einer Menge von Lagrangeteilchen sind die Folge, wie nun erläutert werden soll.

### Die Abbildung $\Phi_t$

Im Falle des Punktwirbels lassen sich die Bewegungsgleichungen für ein Lagrangeteilchen analytisch lösen. Das ermöglicht auch die in Kapitel 2 definierte Abbildung  $\Phi_t$  in geschlossener Form anzugeben, sie lautet

$$\Phi_t : (r, \varphi) \mapsto \left( r, \varphi + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} t \right). \quad (3.7)$$

Damit kann die zeitliche Entwicklung beliebiger Anfangsbedingungen geschlossen angegeben werden. An Gleichung (3.7) liest man beispielsweise ab, dass eine um den Wirbel gesetzte konzentrische Kreisscheibe sich unter dem Einfluss des Punktwirbels nicht verformt, eine radiale Linie hingegen aufgrund der differentiellen Rotation zu einer Spirale verzerrt wird.

Um den Einfluss der differentiellen Rotation weiter zu verdeutlichen, soll nun die Entwicklung einer quadratischen Menge als Anfangsbedingung explizit berechnet werden; genaugenommen wird der Rand der Menge als Funktion der Zeit angegeben. Die vier Ränder der Menge sind definiert durch

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(x, y); x = 0, y \in [1, 2]\} \\ R_2 &= \{(x, y); x = 1, y \in [1, 2]\} \\ R_3 &= \{(x, y); x \in [0, 1], y = 1\} \\ R_4 &= \{(x, y); x \in [0, 1], y = 2\}. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Über den Zusammenhang

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

zwischen kartesischen und Polarkoordinaten lässt sich die Lösung leicht angeben,

$$\begin{aligned}
 \Phi_t(R_1) &= \left\{ \left( |y|, \frac{\pi}{2} + \frac{\Gamma}{2\pi y^2} t \right), y \in [1, 2] \right\} \\
 \Phi_t(R_2) &= \left\{ \left( \sqrt{1+y^2}, \arctan y + \frac{\Gamma}{2\pi(1+y^2)} t \right), y \in [1, 2] \right\} \\
 \Phi_t(R_3) &= \left\{ \left( \sqrt{x^2+1}, \arctan \frac{1}{x} + \frac{\Gamma}{2\pi(x^2+1)} t \right), x \in [0, 1] \right\} \\
 \Phi_t(R_4) &= \left\{ \left( \sqrt{x^2+4}, \arctan \frac{1}{4} + \frac{\Gamma}{2\pi(x^2+4)} t \right), x \in [0, 1] \right\}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Abbildung 3.2 zeigt die berechneten Lösungen. Man erkennt, dass die dem Punktwirbel im Ursprung nächsten Punkte aufgrund der differentiellen Rotation die größte Winkelgeschwindigkeit haben. So wird die gesamte Struktur in Bezug auf den radialen Abstand auseinandergeschert, dabei wird ihre ursprüngliche Form immer weiter zerstört. Nach einiger Zeit hat sich das anfänglich quadratische Gebiet zu einer langen Spirale verzerrt. Da dabei die Fläche erhalten bleiben muss, wird die Spiralstruktur feiner. Durch diesen Mechanismus kommt es zu einer effektiven Mischung, weil die Spirale immer weiter den Raum ausfüllt, während sie feiner wird. Ursprünglich dicht benachbarte Punkte entfernen sich somit weit voneinander, während sich ursprünglich weit entfernte Teilchen nahe kommen können. In diesem Mechanismus ist zusammen mit der nichtlinearen Wechselwirkung der Wirbel selbst der Grund für die guten Mischeigenschaften turbulenter Strömungen zu suchen.

### Die Statistik eines Punktwirbels

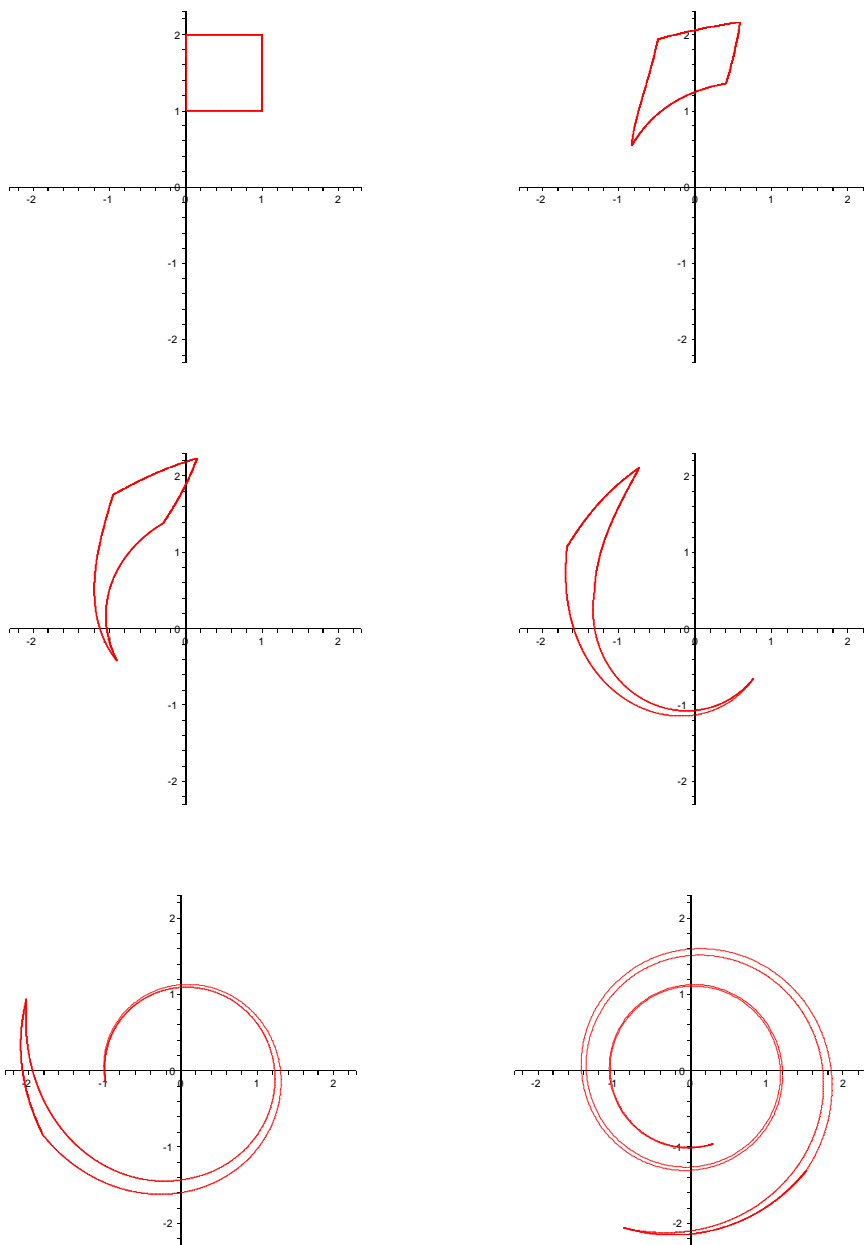
In diesem Abschnitt werden nun einige statistische Eigenschaften eines Lagrangeteilchens oder eines ganzen Ensembles selbiger hergeleitet, um zu demonstrieren, inwiefern ein einzelner Wirbel Einfluss auf die Statistik hat. Betrachtet man etwas karikaturenhaft eine turbulente Strömung als Ensemble solcher Wirbel, so ergeben sich statistische Eigenschaften eines turbulenten Feldes als Überlagerung solcher Einzelereignisse. Bei der Untersuchung statistischer Eigenschaften eines turbulenten Feldes werden häufig kartesische Koordinaten verwendet. Die Lösung der Bewegungsgleichungen für ein Lagrangeteilchen (Gl. (3.6)) an einem Ort  $(r_0, \varphi_0)$  lauten in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned}
 x(t) &= r_0 \cos(\omega t + \varphi_0) \\
 y(t) &= r_0 \sin(\omega t + \varphi_0),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2}$ . Durch Differentiation ergeben sich unmittelbar die Geschwindigkeit und die Beschleunigung

$$\begin{aligned}
 u_x(t) &= -r_0 \omega \sin(\omega t + \varphi_0) \\
 u_y(t) &= r_0 \omega \cos(\omega t + \varphi_0) \\
 a_x(t) &= -r_0 \omega^2 \cos(\omega t + \varphi_0) \\
 a_y(t) &= -r_0 \omega^2 \sin(\omega t + \varphi_0).
 \end{aligned} \tag{3.12}$$





**Abbildung 3.2:** Verzerrung eines Quadrats durch differentielle Rotation im Feld eines Punktwirbels der Stärke  $\Gamma = 2\pi$ , der im Ursprung lokalisiert ist. Von links oben nach rechts unten:  $t \in \{0, 1, 2, 4, 8, 16\}$ . Dargestellt sind die analytisch berechneten Ränder  $R_1 - R_4$ . Alle Angaben in willkürlichen Einheiten.

All die Größen haben die funktionale Form  $\zeta(t) = A \cos(\omega t)$  oder  $\zeta(t) = A \sin(\omega t)$ , wobei  $\zeta$  für den Ort  $x$  oder  $y$ , die Geschwindigkeit  $u_x$  oder  $u_y$  oder die Beschleunigungen  $a_x$  oder  $a_y$  stehen kann. Die entsprechenden Amplituden lauten  $A = \pm r_0$ ,  $A = \pm \frac{\Gamma}{2\pi r_0}$  oder  $A = \pm \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^3}$  respektive.

### Elementarverteilungen

Die Frage lautet nun, wie ein einzelnes Teilchen in einem einzelnen Wirbel zu der Gesamtstatistik beiträgt. Dazu müssen wir die einzelnen Gleichungen über die Zeit oder in äquivalenter Weise über die Phase mitteln. Ohne Einschränkung betrachten wir für die folgenden Rechnung nur die Sinusfunktionen, für die Kosinusfunktionen erhält man die gleichen Ergebnisse. Durch Drehen des Koordinatensystems kann auch die Phasenverschiebung  $\varphi_0$  eliminiert werden. Für das Argument der trigonometrischen Funktionen schreiben wir  $\alpha = \omega t$ . Wir erhalten dadurch die sogenannten Elementarverteilungen

$$f^E(\zeta) = \langle \delta(\zeta - A \sin(\alpha)) \rangle_\alpha = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\zeta - A \sin(\alpha)) d\alpha. \quad (3.13)$$

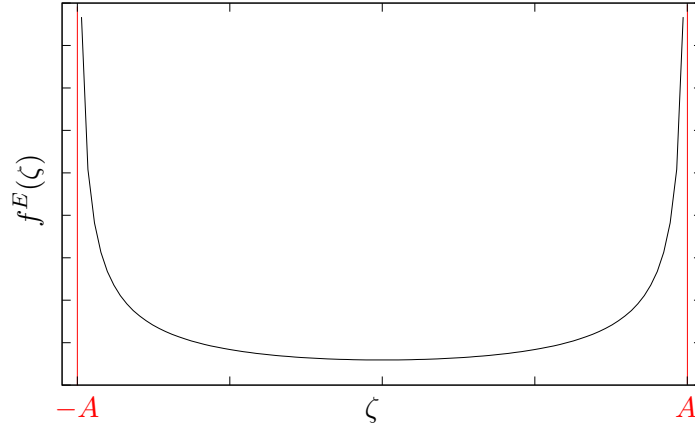
Um das Integral zu lösen, muss die Deltafunktion weiter ausgewertet werden. Es gilt

$$f^E(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_i \frac{1}{|A \cos(\alpha)|} \delta(\alpha - \alpha_i) d\alpha, \quad (3.14)$$

wobei mit  $\alpha_i$  nun die einfachen Nullstellen des ursprünglichen Arguments der Deltafunktion  $\zeta - A \sin(\alpha)$  bezeichnet werden, über die summiert werden muss. Für den Fall  $|\zeta| > A$  hat die Funktion gar keine Nullstelle, und folglich gilt hier  $f^E(\zeta) = 0$ . Für den Fall  $|\zeta| = A$  handelt es sich um keine einfache Nullstelle, und auch hier gilt  $f^E(\zeta) = 0$ . Für den Fall  $|\zeta| < A$  gibt es im Intervall  $[0, 2\pi[$  zwei einfache Nullstellen, von denen beispielsweise bei positiven  $A$  und  $\zeta$  eine durch  $\alpha_1 = \arcsin(\zeta/A)$  gegeben ist. Die übrigen möglichen Fälle macht man sich leicht grafisch und anhand von Symmetrieüberlegungen klar. Nach Ausnutzung des Additionstheorems  $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$  lässt sich das Integral unmittelbar lösen und es ergibt sich insgesamt für die Elementarverteilungen

$$f^E(\zeta) = \begin{cases} 0 & \text{für } |\zeta| \geq A \\ \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - \zeta^2}} & \text{für } |\zeta| < A. \end{cases} \quad (3.15)$$

Das bedeutet, dass ein einzelnes Teilchen in einem einzelnen Wirbel zur Statistik von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung mit der angegebenen Funktion beiträgt, wie auch Abbildung 3.3 verdeutlicht. Man erkennt, dass die Wahrscheinlichkeitsdichte für große Werte von  $\zeta$  in der Nähe der Umkehrpunkte besonders hoch ist. Das ist leicht zu verstehen, da die trigonometrischen Funktionen in der Nähe der Umkehrpunkte besonders flach sind. Der Vollständigkeit halber seien die Elementarverteilungen für Geschwindigkeit und Beschleunigung genannt. Für die Elementarverteilung der Geschwindigkeitskomponente



**Abbildung 3.3:** Elementarverteilung  $f^E(\zeta)$ . An den Umkehrpunkten ist die Wahrscheinlichkeitsdichte besonders hoch.

$u_x$  gilt

$$f^E(u_x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |u_x| \geq \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \\ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - u_x^2}} & \text{für } |u_x| < \frac{\Gamma}{2\pi r_0} \end{cases} \quad (3.16)$$

und für die Beschleunigungskomponente  $a_x$  entsprechend

$$f^E(a_x) = \begin{cases} 0 & \text{für } |a_x| \geq \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^3} \\ \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{\Gamma^4}{16\pi^4 r_0^6} - a_x^2}} & \text{für } |a_x| < \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^3} \end{cases} \quad (3.17)$$

Obwohl im Falle eines Einfangs in einen Wirbel die einzelnen Teilchen mit der vorgestellten Verteilungsfunktion zur Gesamtstatistik beitragen, haben diese Elementarverteilungen dennoch keinerlei Ähnlichkeit mit den Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungen wie sie in einer realen turbulenten Strömung gemessen werden. Die charakteristische Form mit einer betonten Spitze in der Mitte und weiten Flügeln muss also im Bild der eingangs erwähnten Vorstellung aus der Mittelung über viele Teilchen in einer großen Menge von Wirbeln herrühren.

### Mittelung über ein Ensemble aus Teilchen

Als Nächstes sollen die Verteilungsfunktionen, die sich bei einer Mittelung über ein Ensemble aus Teilchen ergeben, untersucht werden. Um die gemittelten Verteilungsfunktionen zu erhalten, kann man einerseits über alle möglichen radialen Anfangspositionen  $r_0$  mitteln, also

$$f^{1D}(\zeta) \sim \int_0^R f^E(\zeta) dr_0. \quad (3.18)$$

Im Falle der in den kommenden Abschnitten betrachteten numerischen Ergebnisse sind die Teilchen in der ganzen Ebene um den Wirbel herum verteilt. Diese Situation entspricht dann in etwa einer Mittelung über eine kreisförmige Fläche, also

$$f^{2D}(\zeta) \sim \int_0^{2\pi} \int_0^R r_0 f^E(\zeta) d\varphi_0 dr_0. \quad (3.19)$$

Bei beiden Mittelungsprozessen wurde dabei eine konstante Teilchendichte angenommen. Im Folgenden werden nun diese Mittelungen für die Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  und die Beschleunigungskomponente  $a_x$  durchgeführt. Bei all diesen Rechnungen muss beachtet werden, dass die Funktionen  $f^E(\zeta)$  abschnittsweise definiert sind, was in Abhängigkeit des Parameters  $\Gamma$  und den Größen  $u_x$  bzw.  $a_x$  zu Einschränkungen an die Integrationsgrenze  $R$  führen kann. Allerdings gibt das Integral bei Verletzung dieser Einschränkung imaginäre Beiträge, so dass man ohne Einschränkung über beliebige Grenzen integrieren kann, wenn man anschließend den Realteil des Integrals bildet. Um Fallunterscheidungen zu vermeiden, beschränken wir uns ohne Beschränkung der Allgemeinheit auf positive Werte von  $\Gamma$  und  $u_x$ . Aufgrund der Symmetrie des Problems ist allerdings klar, dass die Verteilungsfunktionen symmetrisch bezüglich der  $y$ -Achse sind.

Für die Mittelung von  $u_x$  über die radialen Positionen ist nun das Integral

$$f^{1D}(u_x) \sim \Re \left\{ \int_0^R \frac{dr_0}{\pi \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - u_x^2}} \right\} \quad (3.20)$$

zu berechnen. Das Integral lässt sich durch eine Substitution des Arguments der Wurzel auswerten und nach einigen Zwischenschritten erhält man

$$f^{1D}(u_x) \sim \frac{\Gamma}{2\pi^2 u_x^2} \Re \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left( \frac{2\pi u_x R}{\Gamma} \right)^2} \right\}. \quad (3.21)$$

Der Wurzelausdruck liefert nur für  $\frac{2\pi u_x R}{\Gamma} < 1$  reelle Beiträge. Ist das nicht erfüllt, so erhält man das asymptotische Verhalten

$$f^{1D}(u_x) \sim \frac{1}{u_x^2}, \quad (3.22)$$

das heißt, dass die Verteilungsfunktion für große Werte von  $u_x$  mit einer Potenz abfällt, also weite Flügel liefert. Die unphysikalisch anmutende Tatsache, dass die Lösung  $f^{1D}(u_x)$  für beliebig hohe Werte von  $u_x$  eine nichtverschwindende Wahrscheinlichkeitsdichte besitzt, liegt am Punktwirbelkonzept. Aufgrund der Singularität des Geschwindigkeitsfeldes bei  $r = 0$  können Teilchen in ausreichender Nähe zum Ursprung beliebig schnell werden.

Im Falle der Mittelung über eine Kreisfläche lautet das zu berechnende Integral

$$f^{2D}(u_x) \sim \Re \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r_0 dr_0 d\varphi_0}{\pi \sqrt{\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r_0^2} - u_x^2}} \right\}. \quad (3.23)$$

Das Ergebnis lautet nach einer zu oben analogen Rechnung

$$f^{2D}(u_x) \sim \Re \left\{ \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 u_x^3} \arcsin \left( \frac{2\pi R u_x}{\Gamma} \right) - \frac{\Gamma R}{2\pi u_x^2} \sqrt{1 - \left( \frac{2\pi R u_x}{\Gamma} \right)^2} \right\}. \quad (3.24)$$

Wenn für das Argument des Arkussinus  $\frac{2\pi R u_x}{\Gamma} > 1$  gilt, liefert dieser nach Bildung des Realteils nur einen konstanten Wert von  $\frac{\pi}{2}$ . Für diesen Fall wird der Wurzel Ausdruck imaginär, so dass sich der obige Ausdruck asymptotisch verhält wie

$$f^{2D}(u_x) \sim \frac{1}{u_x^3}. \quad (3.25)$$

Eine Mittelung über eine kreisförmige Menge von Lagrangeteilchen verändert also im Vergleich zu einer eindimensionalen Mittelung das asymptotische Verhalten der Verteilungsfunktion.

Die Integrale für die ein- bzw. zweidimensionale Mittelung lauten im Falle der Beschleunigungskomponente  $a_x$

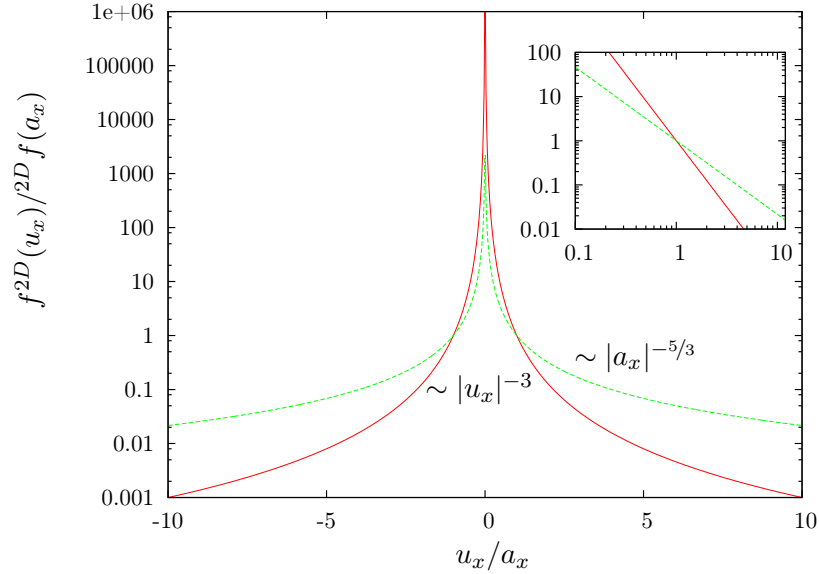
$$f^{1D}(a_x) \sim \Re \left\{ \int_0^R \frac{dr_0}{\pi \sqrt{\frac{\Gamma^4}{16\pi^4 r_0^6} - a_x^2}} \right\} \quad \text{und} \quad (3.26)$$

$$f^{2D}(a_x) \sim \Re \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^R \frac{r_0 dr_0 d\varphi_0}{\pi \sqrt{\frac{\Gamma^4}{16\pi^4 r_0^6} - a_x^2}} \right\}. \quad (3.27)$$

Diese beiden Integrale lassen sich nicht wie die beiden vorangegangenen in Abhängigkeit von elementaren Funktionen angeben, die gesuchten Stammfunktionen hängen von sogenannten verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen ab. Um einen Vergleich mit den numerischen Ergebnissen in Abschnitt 3.2 zu ermöglichen, wird die Lösung für  $f^{2D}(a_x)$  jedoch angegeben. Man erhält sie, indem man im Integranden das Argument des Wurzel ausdruckes substituiert. Nach Integration und Rücksubstitution erhält man nach Einsetzen der Grenzen

$$f^{2D}(a_x) \sim \Re \left\{ \frac{2\Gamma^{4/3}}{3(2\pi)^{4/3} a_x^{5/3}} \left[ {}_2F_1 \left( \left[ \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right], \left[ \frac{3}{2} \right], 1 \right) - \left( 1 - \left( \frac{4\pi^2 a_x}{\Gamma^2} \right)^2 R^6 \right)^{\frac{1}{2}} {}_2F_1 \left( \left[ \frac{1}{6}, \frac{1}{2} \right], \left[ \frac{3}{2} \right], 1 - \left( \frac{4\pi^2 a_x}{\Gamma^2} \right)^2 R^6 \right) \right] \right\}. \quad (3.28)$$

${}_2F_1$  bezeichnet dabei die verallgemeinerten hypergeometrischen Funktionen mit den beiden oberen Parametern  $[\frac{1}{6}, \frac{1}{2}]$  und dem unteren Parameter  $[\frac{3}{2}]$ . Eine genaue Diskussion



**Abbildung 3.4:** Asymptotisches Verhalten der Verteilungsfunktionen für  $u_x$  und  $a_x$ . Der Mittelungsprozess verändert die funktionale Form der Verteilungen grundlegend. Die Funktionen sind nicht normiert, Zahlenwerte in willkürlichen Einheiten.

dieser funktionalen Abhängigkeit gestaltet sich recht schwierig, man kann jedoch feststellen, dass für  $\left(\frac{4\pi^2 a_x}{\Gamma^2}\right)^2 R^6 > 1$  der zweite Summand nur noch imaginäre Beiträge liefert, so dass sich die Verteilungsfunktion in diesem Bereich verhält wie

$$f^{2D}(a_x) \sim \frac{1}{a_x^{5/3}}. \quad (3.29)$$

Die vorstehenden Rechnungen zeigen, dass sich das Punktwirbelkonzept dazu eignet, einige analytische Rechnungen exakt durchzuführen. So können beispielsweise die funktionalen Formen der Verteilungsfunktionen angegeben werden. Während die allgemeine Form recht kompliziert ist, lassen sich jedoch bei allen Funktionen asymptotische Bereiche ablesen, in denen die einzelnen Verteilungen gemäß eines Potenzgesetzes abfallen. Als Illustration ist dieses Verhalten in Abbildung 3.4 dargestellt. Die genaue funktionale Form der Verteilungsfunktionen wird für den Lambwirbel in Abschnitt 3.2 diskutiert.

Es ergeben sich bei diesen Ensemblemittelungen also Verteilungsfunktionen, die zumindest asymptotisch mit einer Potenz abfallen. Gegenüber den Verteilungsfunktionen für ein einzelnes Lagrangeteilchen zeigen die über eine Menge gemittelten Verteilungsfunktionen ein qualitativ unterschiedliches Verhalten.

### Autokorrelationsfunktion

Auch die Autokorrelationsfunktion eines einzelnen Teilchens und eines Ensembles von Teilchen in einem einzelnen Punktwirbel sollen nun berechnet werden. Als Beispiel be-

rechnen wir nur die Autokorrelationsfunktion für die Geschwindigkeitskomponente  $u_x$ . Die Definition der Autokorrelationsfunktion lautet

$$C^{u_x}(\tau) = \frac{\langle u_x(t + \tau) u_x(t) \rangle}{\langle u_x(t)^2 \rangle}, \quad (3.30)$$

wobei die Mittelung hier im Falle eines einzelnen Lagrangeteilchens eine Mittelung über die Zeit oder die Phase bedeutet, im Falle eines Ensembles kommt noch eine Mittelung über die Positionen der Teilchen hinzu. Für die Autokorrelationsfunktion eines einzelnen Teilchens sind nun Zähler und Nenner zu bestimmen und nach einer kurzen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle u_x(t + \tau) u_x(t) \rangle_t &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_0^2 \omega^2 \sin(\omega(t + \tau)) \sin(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2} r_0^2 \omega^2 \cos(\omega\tau) \\ \langle u_x(t)^2 \rangle_t &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} r_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t) d(\omega t) = \frac{1}{2} r_0^2 \omega^2. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Im Falle eines einzelnen Lagrangeteilchens ergibt sich also

$$C^{u_x}(\tau) = \cos(\omega\tau). \quad (3.32)$$

Zu einem einzelnen Lagrangeteilchen in einem einzelnen Wirbel gehört also eine oszillierende Autokorrelationsfunktion. Das ist auch unmittelbar zu verstehen, denn während das Testteilchen im Feld des Punktwirbels eine Kreisbahn beschreibt, ändern sich auch die Komponenten der Geschwindigkeit periodisch. Nach einem vollen Umlauf ist das Teilchen wieder vollständig korreliert, nach einem halben vollständig antikorreliert.

Als nächstes wird ein Ensemblemittel über die radialen Anfangspositionen  $r_0$  durchgeführt, es ist also zu berechnen

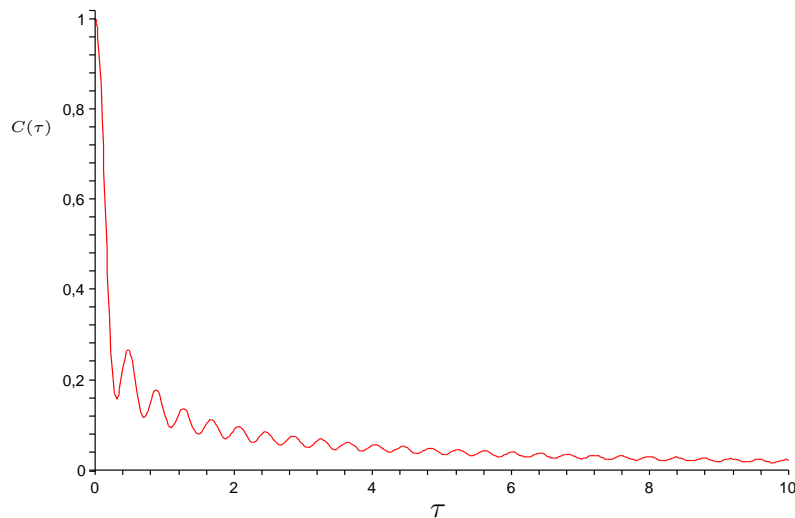
$$\langle u_x(t + \tau) u_x(t) \rangle_{t, r_0} = \int_r^R r_0^2 \omega^2 \langle \sin(\omega(t + \tau)) \sin(\omega t) \rangle_t dr_0 \quad (3.33)$$

$$\langle u_x(t)^2 \rangle_{t, r_0} = \int_r^R r_0^2 \omega^2 \langle \sin^2(\omega t) \rangle_t dr_0. \quad (3.34)$$

Die Zeitmittelung kann nun analog zu oben durchgeführt werden, so dass nur noch die Mittelung über  $r_0$  verbleibt. Das Integral, welches zum Nenner der Autokorrelationsfunktion gehört, ist dabei explizit zu bestimmen, das für den Zähler findet keine geschlossene Darstellung. Insgesamt ergibt sich

$$C^{u_x}(\tau) = \frac{1}{1/r - 1/R} \int_r^R \frac{1}{r_0^2} \cos\left(\frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} \tau\right) dr_0. \quad (3.35)$$

Eine numerische Auswertung des Integrals offenbart eine interessante Eigenschaft (siehe Abbildung 3.5). Während die Autokorrelationsfunktion für ein einzelnes Teilchen in einem einzelnen Wirbel ein oszillierendes Verhalten zeigt, fällt sie bei einer Mittelung über



**Abbildung 3.5:** Autokorrelationsfunktion einer Menge von Lagrangeteilchen im Geschwindigkeitsfeld eines Punktwirbels (Zahlenwerte für das Beispiel:  $r = 0.1$ ,  $R = \pi$  und  $\Gamma = 1$ ). Aufgrund von Dephasierungseffekten dekorrelieren die Lagrangeteilchen.

Anfangspositionen oszillierend ab. Dieses Verhalten ist durch einen Dephasierungseffekt zu erklären. Radial benachbarte Teilchen haben aufgrund der differentiellen Rotation eine unterschiedliche Winkelgeschwindigkeit. Durch den Mittelungsprozess werden also Teilchen miteinander korreliert, deren Phasen sich unterschiedlich schnell ändern. Im Ergebnis kommt es so zu einem abfallenden Korrelationskoeffizienten, der leicht oszilliert.<sup>2</sup> Diese Oszillation rührt daher, dass sich einige Phasen immer wieder kohärent addieren. Die Frequenz hängt allerdings empfindlich von dem Bereich, über den gemittelt wird, und der Zirkulation  $\Gamma$  ab. Mitunter gibt es Fälle, in denen die Oszillation in der grafischen Lösung nicht zu sehen ist. Insgesamt hat dieses Verhalten interessante Implikationen. Im Allgemeinen wird eine abfallende Autokorrelationsfunktion mit einer zunehmenden statistischen Unabhängigkeit in Verbindung gebracht. Im Falle dieses einzelnen Punktwirbels kann davon jedoch keine Rede sein, handelt sich hier doch um eine deterministische Bewegungsgleichung, deren Lösungen bekannt und nicht zufallsbehaftet sind. In einem realen Fluid beobachtet man auch eine abfallende Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeitskomponenten, die man gemeinhin dahingehend interpretiert, dass das Lagrangeteilchen in der Flüssigkeit einen so weiten Weg zurückgelegt hat, dass die Bewegung nun statistisch unabhängig von früheren Zeiten ist. Eine Situation wie die vorgestellte führt jedoch auch zu einer Dekorrelation, so dass man im Ergebnis festhalten muss, dass diese beiden unterschiedlichen Effekte nicht klar zu trennen sind.

<sup>2</sup>Eine Mittelung über eine zweidimensionale Fläche offenbart keine neuen Eigenschaften.



## 3.2 Lamb-Oseen-Wirbel

Im Folgenden wird der Lamb-Oseen-Wirbel (oder kurz Lambwirbel) als exakte Lösung der Navier-Stokes-Gleichung vorgestellt. Es handelt sich dabei um das Analogon des Punktwirbels im Falle der Navier-Stokes-Gleichung, mit dem Unterschied, dass nun viskose Effekte hinzukommen. Viele der beobachteten Eigenschaften lassen sich jedoch mit den Ergebnissen des letzten Abschnittes qualitativ verstehen.

### Vortizität und Geschwindigkeitsfeld

Die Gleichungen für Vortizität, Geschwindigkeitsfeld und die entsprechenden Lagrange-schen Bewegungsgleichungen sollen nun kurz hergeleitet werden (siehe dazu auch [Fri05]).

Die Vortizität ist definiert als  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ . In zwei Dimensionen handelt es sich bei der Vortizität um eine skalare Größe und es gilt  $\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \omega(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z$ . Wendet man auf die Navier-Stokes-Gleichung (2.1) die Rotation an, so erhält man die Wirbeltransportgleichung (siehe dazu auch Kapitel 2). Im Falle einer zweidimensionalen Strömung hat sie die Form

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x}, t) = \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t), \quad (3.36)$$

es handelt sich also um eine reine Advektions-Diffusionsgleichung für die Vortizität. Nimmt man an, dass die Vortizität eine rein radiale Abhängigkeit besitzt, so folgt in Analogie zum Biot-Savart-Gesetz der Elektrodynamik, dass das Geschwindigkeitsfeld eine rein azimuthale Komponente besitzen muss, also  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_\varphi(r, t) \mathbf{e}_\varphi$ . Als Konsequenz verschwindet die Nichtlinearität aus Gleichung (3.36) und in Polarkoordinaten ergibt sich

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(r, t) = \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} \omega(r, t). \quad (3.37)$$

Diese Gleichung entspricht in ihrer Form der Wärmeleitungsgleichung in zwei Dimensionen und hat daher eine Gaußkurve als Lösung,

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu t} e^{-\frac{r^2}{4\nu t}}. \quad (3.38)$$

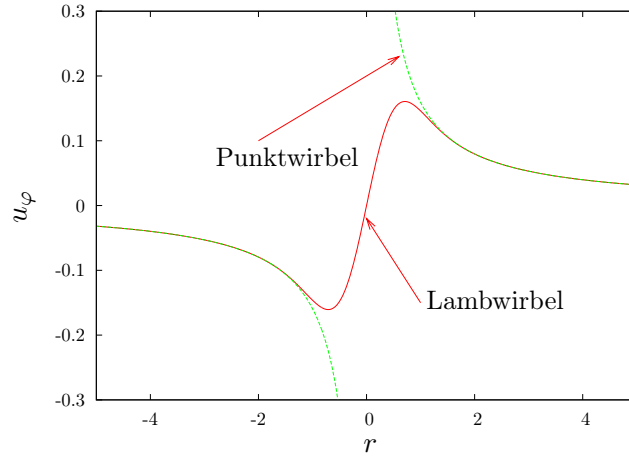
Diese Glocke zerfließt mit der Zeit aufgrund der Viskosität  $\nu$ , und im Limes unendlich großer Zeiten verschwindet sie aufgrund der Dissipation vollständig. Das Geschwindigkeitsfeld bestimmt sich über den Stokesschen Integralsatz gemäß

$$\int_0^{2\pi} u_\varphi(r, t) \mathbf{e}_\varphi \, d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \int_0^r \omega(r', t) \mathbf{e}_z \, d\mathbf{f}. \quad (3.39)$$

Die Lösung ergibt sich unmittelbar zu

$$u_\varphi(r, t) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right). \quad (3.40)$$

Für große Werte von  $r$  kann man die Exponentialfunktion vernachlässigen und man erhält näherungsweise das Geschwindigkeitsfeld eines Punktwirbels. Für kleine Werte



**Abbildung 3.6:** Azimuthales Geschwindigkeitsprofil  $u_\varphi$  eines Lambwirbels. Im Vergleich zum Punktwirbel bleibt die Geschwindigkeitskomponente stetig und wächst zunächst linear mit dem Radius. Für einen großen Radius stimmen die Geschwindigkeitskomponenten praktisch überein. Zahlenwerte für das Beispiel in einheitenloser Form:  $\Gamma = 1$ ,  $\nu = 0.0001$  und  $t = 1000$ .

des Radius  $r$  kann die Exponentialfunktion in eine Reihe entwickelt werden. In linearer Näherung erhält man

$$u_\varphi \approx \frac{\Gamma r}{8\pi\nu t}, \quad (3.41)$$

was dem Geschwindigkeitsfeld bei der Rotation eines starren Körpers entspricht. Durch die Viskosität wird also gewissermaßen die Singularität des Punktwirbels geglättet (siehe dazu Abbildung 3.6). Für den Grenzfall verschwindender Viskosität geht die Navier-Stokes-Gleichung in die Eulergleichung über. Man liest an den Gleichungen (3.38) und (3.40) ab, dass sich in diesem Grenzfall die Vortizität und das Geschwindigkeitsfeld des Punktwirbels ergeben.

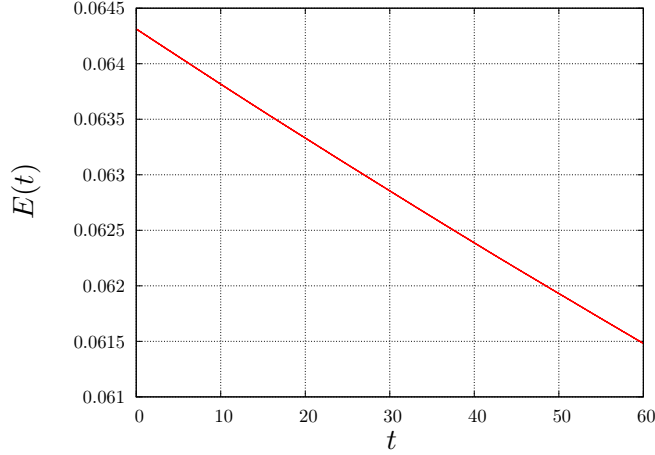
Ähnlich wie bei dem Punktwirbel kann man die Bewegungsgleichungen für ein Lagrange-Teilchen in Polarkoordinaten formulieren, sie lauten

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= 0 \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left( 1 - e^{-\frac{r^2}{4\nu t}} \right). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Man liest unmittelbar ab, dass sich auch im Falle des Lambwirbels ein Teilchen auf einer Bahn mit konstantem Radius bewegt, also  $r(t) = r_0$ . Die Lösung der Gleichung für  $\varphi(t)$  vereinfacht sich dadurch zu der Bestimmung eines Integrals

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} \left( 1 - e^{-\frac{r_0^2}{4\nu t'}} \right) dt', \quad (3.43)$$

was sich allerdings nicht mehr geschlossen lösen lässt. Aufgrund der weiter oben diskutierten Asymptotik des Geschwindigkeitsfeldes kennt man jedoch auch das asymptotische



**Abbildung 3.7:** Mittlere Energie eines Lambwirbels, aus dem Eulerschen Geschwindigkeitsfeld bestimmt. Über den Simulationszeitraum fällt die Energie linear ab. Am Ende besitzt das Feld noch ca. 95% seiner anfänglichen Energie.

Verhalten des Lagrangeteilchens mit Startpunkt  $(r_0, \varphi_0)$ ,

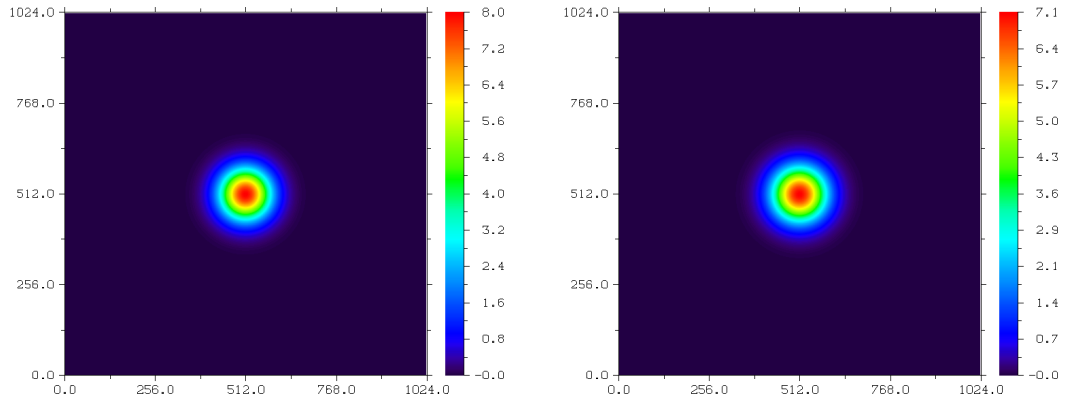
$$\varphi(t) \approx \begin{cases} \frac{\Gamma}{8\pi\nu} \ln t + \varphi_0 & \text{für kleine } r_0 \\ \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} t + \varphi_0 & \text{für große } r_0. \end{cases} \quad (3.44)$$

### Numerische Ergebnisse

Im Weiteren werden numerische Ergebnisse vorgestellt. Diese wurden mit Hilfe des in Anhang A vorgestellten Codes zur Lösung der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichung erstellt. Dazu wird eine Lambwirbel-Anfangsbedingung auf dem Feld initialisiert, indem eine Gaußkurve mit vorgegebener Halbwertsbreite und Amplitude als Anfangsbedingung gewählt wird. Sei  $dm$  die Anzahl der Gitterpunkte der Simulation in einer Dimension. Die Vortizität wird auf dem Gitter gemäß der Formel

$$\omega(i, k) = 8 \cdot \exp\left(-\frac{(i - \frac{dm}{2})^2 + (k - \frac{dm}{2})^2}{0.005 \text{ dm}^2}\right) \quad (3.45)$$

initialisiert. Vergleicht man das mit der Formel (3.38) und nimmt als physikalisches Simulationsgebiet ein Quadrat mit Kantenlänge  $2\pi$  an, so liest man für die vorgegebene Viskosität von  $\nu = 0.0001$  eine Zeit von  $t = 50\pi^2$  ab. Für die Zirkulation ergibt sich folglich  $\Gamma = \frac{4}{25}\pi^3 \approx 4.961$ . Alle Angaben werden hier und im Folgenden in dimensionslosen Größen gemacht. Die Parameter wurden dabei aufgrund numerischer Erfahrungen gewählt (genügend hohe Amplitude, ausreichende Größe des Wirbels, annehmbare Selbstwechselwirkung etc.; vgl auch Anhang A). In das Feld des Lambwirbels werden dann 16384 Lagrangeteilchen in Form eines regelmäßigen Gitters gelegt. Die genauen Simulationsdetails finden sich dabei in Anhang B.2 unter dem Simulationsindex `lamb-1`.

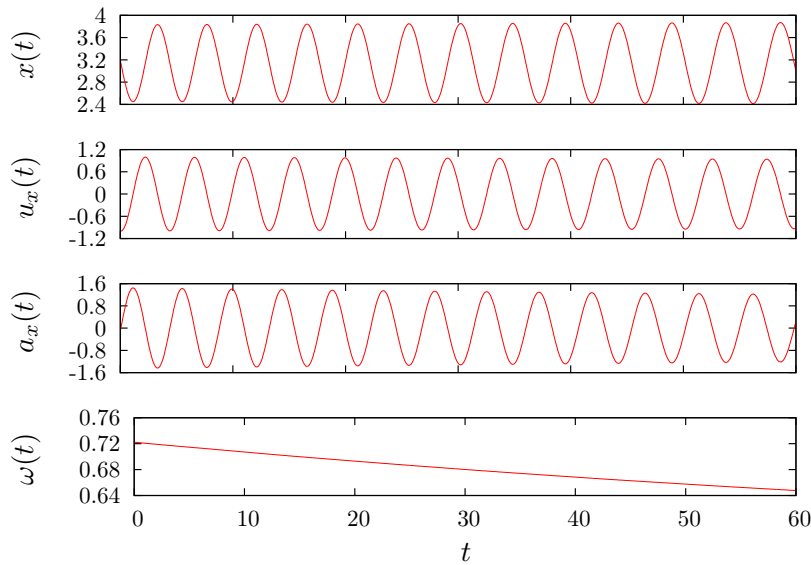


**Abbildung 3.8:** Vortizitätsfeld eines Lambwirbels zu Beginn der Simulation und nach 60 Zeiteinheiten. Der Wirbel erhält seine Form, diffundiert allerdings mit der Zeit leicht auseinander. Die maximale Vortizität fällt während dieser Zeit von 8.0 auf einen Wert von 7.1.

### Trajektorien

Zurück zur Physik. Da es sich beim Lambwirbel um eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichung handelt, wird Energie dissipiert. Genaugenommen handelt es sich also nicht um ein Gleichgewichtssystem. Da aufgrund der möglichst niedrig gewählten Viskosität nur wenig Energie dissipiert wird, kann man im vorliegenden Beispiel von einem Quasigleichgewicht ausgehen (siehe dazu auch die Abbildungen 3.7 und 3.8). Folglich werden alle vorgestellten Statistiken über die gesamte Simulationsdauer gemittelt. Um einen Eindruck von der Bewegung eines Teilchens in einem Lambwirbel zu geben, wird in Abbildung 3.9 aber zunächst die Trajektorie eines einzelnen Teilchens gezeigt. Zu sehen ist jeweils die  $x$ -Komponente von Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung; alle Komponenten oszillieren sinusoidal. Besonders an der Beschleunigung kann man die dissipativen Effekte erkennen, die Amplitude fällt mit der Zeit etwas ab. Um auch beim Lambwirbel den Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes auf eine Menge von Lagrangeteilchen zu demonstrieren, wurde eine Simulation mit einer quadratischen Menge bestehend aus 4096 Lagrangeteilchen durchgeführt (Simulationsindex `lamb-2`). In Abbildung 3.10 ist die zeitliche Verzerrung dargestellt.<sup>3</sup> Gut zu erkennen ist der Einfluss der differentiellen Rotation, das Quadrat wird mehr und mehr verzerrt und nimmt letztendlich eine nahezu axialsymmetrische Form ein. Dieser Effekt ist unabhängig von der anfänglichen Verteilung; auf lange Sicht stellt sich im Feld eines einzelnen Wirbels immer eine nahezu axialsymmetrische Form ein.

<sup>3</sup>Eine Animation ist auf der beiliegenden DVD zu finden.

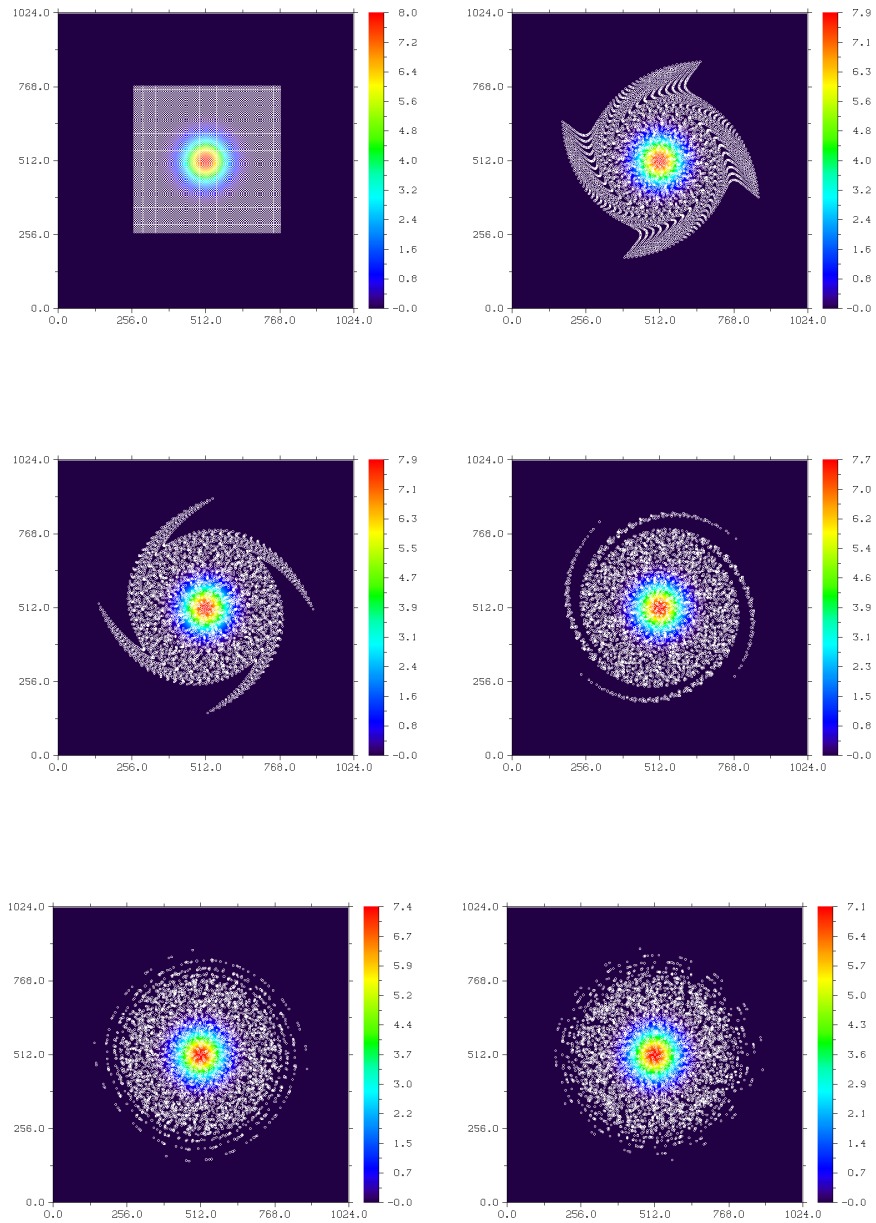


**Abbildung 3.9:** Trajektorie eines Teilchens im Lambwirbel. Orts-, Geschwindigkeits- und Beschleunigungskomponente oszillieren periodisch mit der zu erwartenden Phasenverschiebung. Die Vortizität entlang der Trajektorie ist eine abfallende Funktion der Zeit.

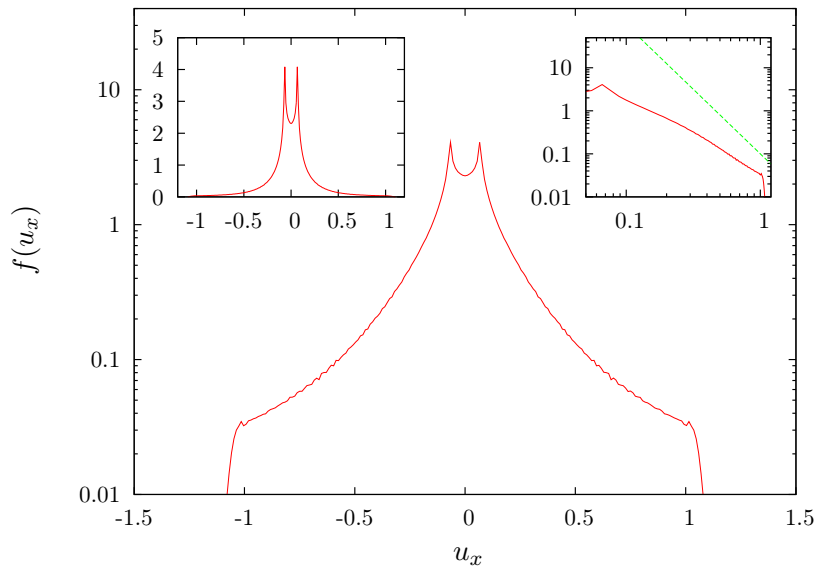
### Verteilungsfunktionen

Im Folgenden sollen statistische Eigenschaften dieser Konfiguration (Index `lamb-1`) vorgestellt werden. Abbildung 3.11 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion für die  $x$ -Komponente der Geschwindigkeit. Für kleine Werte der Geschwindigkeitskomponente zeigen die Geschwindigkeiten einen *dip*, der andeutet, dass die Geschwindigkeit  $u_x = 0$  seltener vorkommt als eine etwas höhere Geschwindigkeit. Das ist aufgrund der Anfangsbedingung allerdings leicht einzusehen, da das Geschwindigkeitsfeld des Wirbels nirgendwo identisch verschwindet. Allein aufgrund der Selbstwechselwirkung bei den periodischen Randbedingungen gibt es auf der Hälfte der Quadratanten des Simulationsgebietes kleine Bereiche, in denen sich die Geschwindigkeit wegmittelt. Für große Werte von  $u_x$  zeigt die Verteilungsfunktion einen algebraischen Abfall. Im Vergleich zum Punktwirbel fällt die Kurve flacher ab, mögliche Gründe dafür werden weiter unten angeführt. Nach dem algebraischen Abfall kommt es zu einem abrupten *cutoff* in der Verteilungsfunktion. Dynamisch gesehen könnte dieser darauf zurückzuführen sein, dass das Geschwindigkeitsfeld des Lambwirbels im Ursprung nicht divergiert. Damit gibt es eine höchste Geschwindigkeit, die ein Teilchen annehmen kann, was sich in dem Abbruch der Verteilungsfunktion bemerkbar macht.

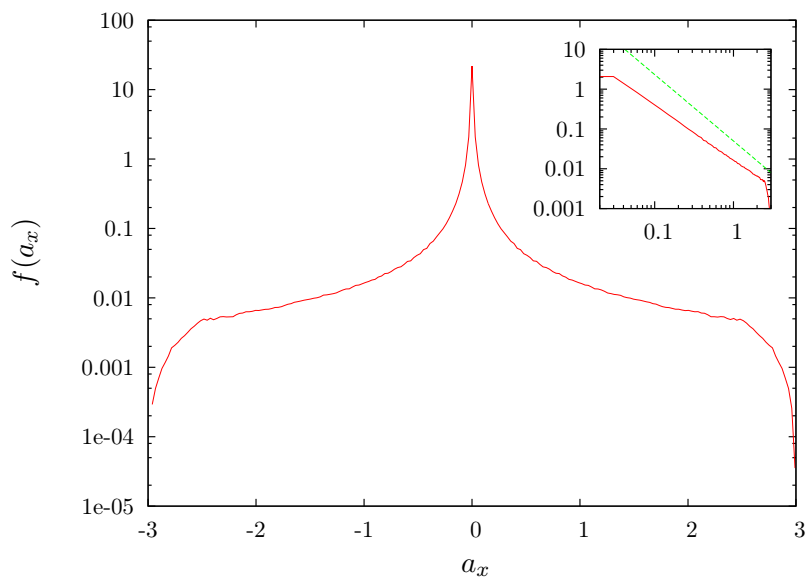
Abbildung 3.12 zeigt die Verteilungsfunktion für die Beschleunigungskomponente  $a_x$ . Diese zeichnet sich durch eine ausgeprägte Spitze und einen anschließenden algebraischen



**Abbildung 3.10:** Verzerrung eines Quadrats im Feld eines Lambwirbels zu den Zeitpunkten  $t \in \{0, 4, 8, 16, 40, 60\}$ . Deutlich ist der Einfluss der differentiellen Rotation zu erkennen. Vgl. auch Abb. 3.2. Für eine Animation siehe Simulationsindex `1amb-2`.



**Abbildung 3.11:** Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungsfunktion für  $u_x$  im Lambwirbel. Oben links dargestellt ist die Funktion in linearen Koordinaten, oben rechts in doppelt logarithmischer Darstellung. Die grüne Linie (vertikal verschoben) deutet das asymptotische Verhalten der Statistik im Falle des Punktwirbels an.



**Abbildung 3.12:** Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungsfunktion für  $a_x$  im Lambwirbel in logarithmischer bzw. doppeltlogarithmischer Darstellung. Die Beschleunigungskomponente zeigt zunächst einen algebraischen Abfall und einen *cutoff*. Die grüne Linie (vertikal verschoben) zeigt den asymptotischen Verlauf im Falle des Punktwirbels.

Abfall aus. Ab einem gewissen Wert für  $a_x$  kommt es zu einem *cutoff*. Dass dieser *cutoff* nicht ganz abrupt stattfindet, hat damit zu tun, dass im Verlauf der Simulation der Wirbel schwächer wird und die größtmögliche Beschleunigung kontinuierlich abnimmt, wie genauere Studien ergaben. Im Vergleich zu der für den Punktwirbel bestimmten asymptotischen Lösung gibt es leichte Abweichungen, für die es jedoch mögliche Erklärungen gibt. Physikalisch weicht der Lambwirbel durch sein Geschwindigkeitsfeld vom Punktwirbel ab, was zu Modifikationen führen kann. Darüber hinaus wurde bei den zum Vergleich stehenden Rechnungen in Abschnitt 3.1 eine kreisförmige Menge von Lagrange-Teilchen angesetzt, wobei in der Numerik eine quadratische Menge untersucht wurde. Des Weiteren können die in der Numerik auftretenden periodischen Randbedingungen zu Abweichungen führen. Eine weitere Untersuchungen dieser Punkte sowie der exakten analytischen Verteilungsfunktionen anstelle von den hier verwendeten asymptotischen Lösungen könnte über die Abweichungen Aufschluss geben. Vor diesem Hintergrund ist die erzielte Übereinstimmung jedoch als gut zu bezeichnen.

Insgesamt ist in beiden Fällen festzustellen, dass die Verteilungsfunktionen einen algebraischen Verlauf zeigen. Dabei fällt die Verteilungsfunktion für die Beschleunigungskomponente langsamer ab als die der Geschwindigkeit. Bemerkenswert ist, dass schon anhand des Punktwirbelkonzeptes wesentliche Merkmale der Verteilungsfunktionen analytisch zugänglich sind.

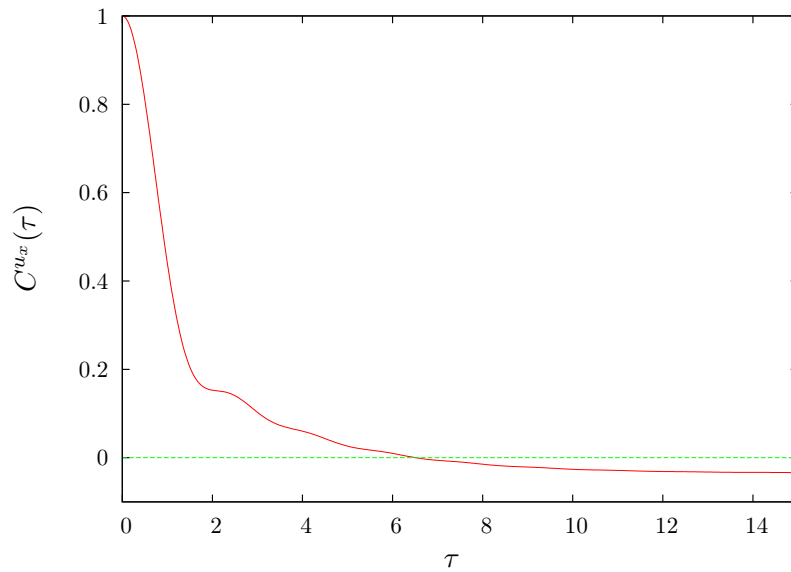
### Autokorrelationsfunktionen

Als Nächstes werden die Autokorrelationsfunktionen für  $u_x$  und  $a_x$  vorgestellt. Diese werden in diesem Zusammenhang definiert als

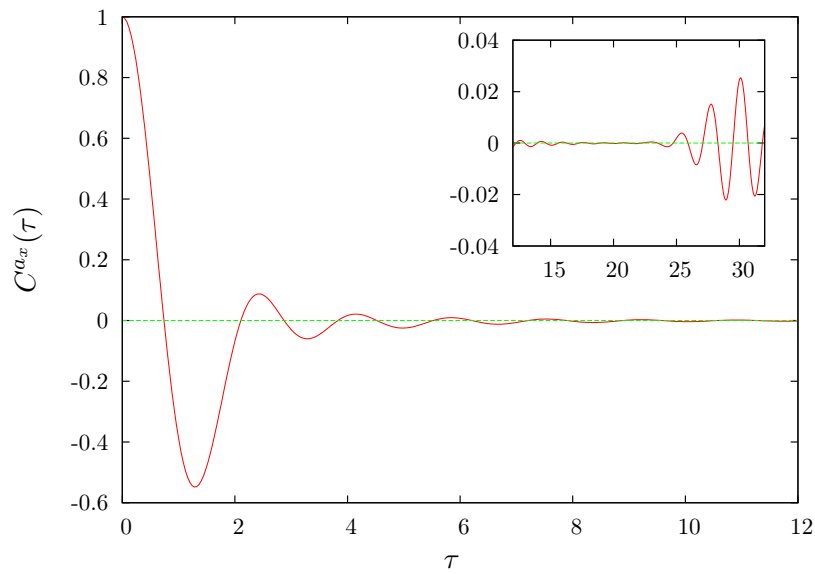
$$\begin{aligned} C^{u_x}(\tau) &= \frac{\langle u_x(t + \tau)u_x(t) \rangle}{\sigma_{u_x}^2} \quad \text{bzw.} \\ C^{a_x}(\tau) &= \frac{\langle a_x(t + \tau)a_x(t) \rangle}{\sigma_{a_x}^2}, \end{aligned} \tag{3.46}$$

wobei  $\sigma_i^2$  der aus den Daten ermittelten empirischen Standardabweichung entspricht. Abbildungen 3.13 und 3.14 zeigen die Autokorrelationsfunktionen für  $u_x$  und  $a_x$ . Der Verlauf der Autokorrelationsfunktion für  $u_x$  ähnelt qualitativ der Autokorrelationsfunktion im Fall des Punktwirbels. In der Tat kommt es also zu einer Dekorrelation, ohne dass von zunehmender statistischer Unabhängigkeit gesprochen werden kann. Die Autokorrelationsfunktion für die Beschleunigung zeigt eine stärkere Oszillation, in der es auch zu einer starken Antikorrelation kommt. Bemerkenswert ist hier, dass die Funktion über weite Bereiche von  $\tau$  nahezu Null ist, sich dann aber noch einmal stärkere Korrelationen durch eine kohärente Phasenüberlagerung ergeben können.

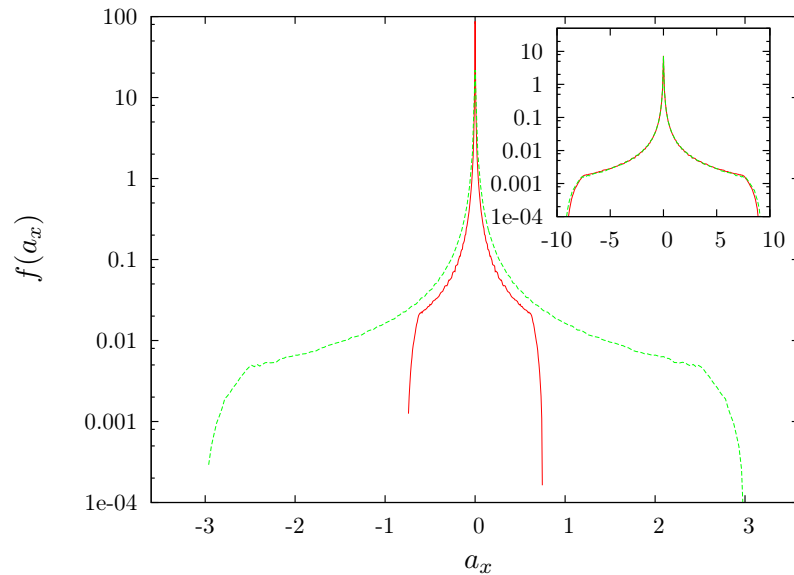




**Abbildung 3.13:** Autokorrelationsfunktion für  $u_x$ . Die Autokorrelationsfunktion zeigt nach einem Abfall einen Nulldurchgang. Für große Zeiten nähert sie sich der Null immer weiter an (nicht abgebildet).



**Abbildung 3.14:** Autokorrelationsfunktion für  $a_x$ . Die Autokorrelationsfunktion oszilliert stark und zeigt ausgeprägte Antikorrelationen. Inlet: Selbst nachdem sie für lange Zeiten nahe Null oszilliert, kann es für große Zeiten wieder zu einer kohärenten Addition von Phasen kommen.



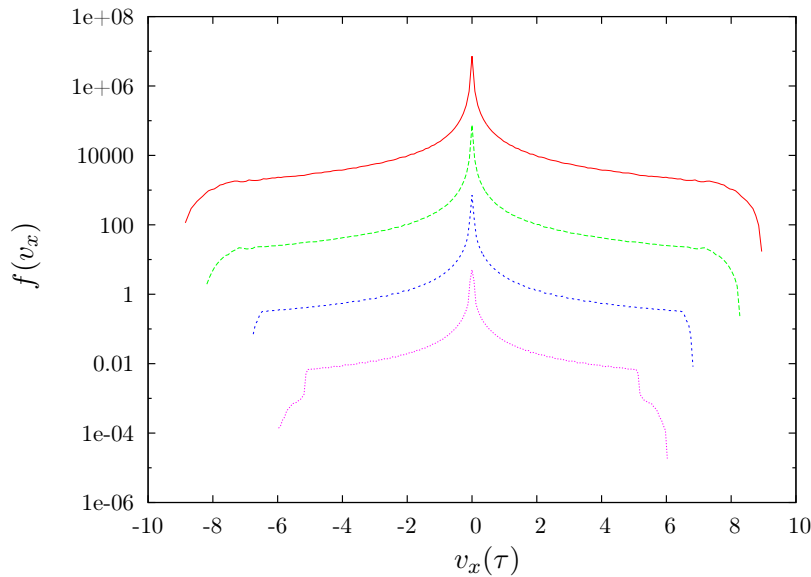
**Abbildung 3.15:** Histogramme für  $a_x$  im Lambwirbel. Die grüne Kurve entspricht einem Wirbel mit Zirkulation  $\Gamma = \frac{4}{25}\pi^3$ , die rote Kurve einem Wirbel mit halber Zirkulation. Die Verteilungsfunktionen sind unterschiedlich breit. Inlet: Normiert man die Verteilungsfunktion auf die Standardabweichung, so zeigen sie eine identische funktionale Form. (Index `lamb-3`)

### Eine veränderte Anfangsbedingung

Exemplarisch wird noch eine Simulation mit einem Wirbel halber Zirkulation bei sonst identischen Anfangsbedingungen durchgeführt, die sich ergebende Verteilungsfunktion ist in Abbildung 3.15 zu sehen. Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Verteilungsfunktionen fällt diese enger aus. Das ist unmittelbar einleuchtend, schließlich sorgt eine niedrigere Zirkulation für eine niedrigere Amplitude der Beschleunigung. Normiert man die Funktion allerdings auf die Standardabweichung, so fallen die beiden Kurven zusammen. Im Ergebnis bedeutet das, dass die funktionale Abhängigkeit der hier vorgestellten Verteilungsfunktionen unabhängig von der Zirkulation ist, und diese somit repräsentativ sind.

### Geschwindigkeitsinkremente

Als eine Art Randbemerkung wird noch die Verteilungsfunktion für die Geschwindigkeitsinkremente in Abbildung 3.16 gezeigt. Für die kürzeste Zeitdifferenz entspricht die Geschwindigkeitsinkrementverteilung nahezu der Verteilungsfunktion für die Beschleunigungskomponente. Die dargestellten Verteilungsfunktionen zeigen jedoch nicht den experimentell ermittelten Übergang von stark intermittenten zu gaußischen Verteilungsfunktionen (vgl. dazu Kapitel 1). In voll entwickelter Turbulenz müssen also physikalische Mechanismen wirken, die nicht durch einen einzelnen Wirbel zu erklären sind. Wir kommen auf diesen Punkt in Kapitel 4 zurück.



**Abbildung 3.16:** Geschwindigkeitsinkrementverteilungen im Falle des Lambwirbels. Die Verteilungen zeigen keinerlei Ähnlichkeit mit den in Kapitel 1 vorgestellten. Von oben nach unten:  $\tau \in \{4, 8, 16, 32\}$ . Die Verteilungsfunktionen sind auf Standardabweichung eins normiert und vertikal verschoben.

### 3.3 Lundgrenwirbel

Bisher wurden die beiden einfachsten Lösungen der zweidimensionalen Gleichungen der Hydrodynamik betrachtet, um einige grundlegende Aspekte der Dynamik von Lagrangeschen Teilchen in Wirbeln zu verstehen. In beiden Fällen handelt es sich dabei um axialsymmetrische Lösungen, die keine innere Struktur zeigen. Bei einem Blick auf ein turbulentes zweidimensionales Vortizitätsfeld (siehe z.B. Abb. 1.7) fällt allerdings auf, dass nicht nur axialsymmetrische Wirbel auftreten, sondern auch spiralartige Strukturen, die z.B. Folge eines Verschmelzens zweier anderer Wirbel sind.

1982 stellte Lundgren in einem einflussreichen Artikel eine weitere Lösung der Navier-Stokes-Gleichung vor, den sogenannten Lundgrenwirbel (siehe [Lun82, Lun93]). Bei dieser Wirbelstruktur handelt es sich um eine Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung, bei der die Vortizität eine ausgeprägte Spiralstruktur zeigt. Die dreidimensionale Lösung wird durch eine Koordinatentransformation, der Lundgrentransformation, aus einer rein zweidimensionalen Lösung gewonnen. Lundgrens Anliegen dabei war es, durch eine analytische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung unter geeigneter Mittelung das von Kolmogorov aufgrund von Dimensionsargumenten gefundene Energiespektrum herzuleiten, welches auch in voll entwickelter Turbulenz beobachtet wird. Dieses Energiespektrum, das im Inertialbereich einen algebraischen Abfall von  $E(k) \sim k^{-5/3}$  zeigt, ist zwar experimentell bestätigt, konnte aber bis dato nicht mit Lösungen der Grundgleichung in Zusammenhang gebracht werden. Da in turbulenten Strömungen, wie in Kapitel

1 motiviert wurde, kohärente Strukturen als wichtiges Merkmal beobachtet werden, liegt die Vermutung nahe, dass das Energiespektrum mit diesen Strukturen in Zusammenhang zu bringen ist. Frühere Versuche von Townsend [Tow51] scheiterten aufgrund der als Grundbausteine angenommenen Wirbelröhren und -flächen, die zu einem etwas abweichenden algebraischen Abfall führen. Lundgren sieht in der von ihm vorgeschlagenen Lösung einen möglichen physikalischen Mechanismus, welcher der von Richardson propagierten Energiekaskade in drei Dimensionen zu Grunde liegen könnte. Wird ein Fleck aus schwacher Vortizität im Feld eines starken Wirbels verzerrt, so verhält er sich in erster Näherung wie ein passiver Skalar. Aufgrund der differentiellen Rotation wird er dann zu einer Spiralstruktur verzerrt, ähnlich dem Quadrat in Abbildung 3.2. Durch diesen Prozess werden immer feinere Strukturen erzeugt, die dann schließlich durch die Viskosität aufgezehrt werden. Dieser Mechanismus sorgt also effektiv für einen Energietransport hin zu kleineren Skalen. Unterstützt wird der Mechanismus durch einen zweiten, den der Koordinatentransformation. Diese sorgt für ein radiales Zusammendrücken der Spiralstruktur bei einem gleichzeitigen Transport der Vortizität entlang der Wirbelachse, wie in einem der kommenden Abschnitte erläutert wird.

Lundgren erreicht nun die funktionale Form des Kolmogorovschen Spektrums, indem er annimmt, dass ein turbulentes Feld aus einer Überlagerung solcher Wirbel zu verschiedenen Stadien ihrer Entwicklung besteht; er erhält das Spektrum, indem er über die zeitliche Entwicklung eines einzelnen Wirbels mittelt. Das kommt der aus der statistischen Physik bekannten Quasiergodizitätshypothese nahe, die unter bestimmten Voraussetzungen annimmt, dass ein Zeitmittel durch Scharmittel zu ersetzen ist. Gilbert [Gil93] konnte zeigen, dass die im Lundgrenmodell enthaltenen physikalischen Mechanismen von Filamentierung und gleichzeitiger Kompression in einer Richtung sowie Streckung in anderer Richtung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen zu dem berühmten Spektrum führen.

All diese Beobachtungen finden dabei im Eulerschen Bild statt, der Einfluss der genannten Spiralstruktur auf Lagrangeteilchen wurde nach Kenntnis des Verfassers bisher nicht diskutiert. Daher sollen an dieser Stelle die Trajektorien von Lagrangeteilchen in einer lundgrenartigen Vortizitätssituation qualitativ diskutiert werden. Der Einfluss auf die bisher im Falle des Punkt- und Lambwirbels vorgestellten Statistiken soll zudem quantifiziert werden. Der Verfasser beschränkt sich dabei auf die zweidimensionale Spiralstruktur. Bevor diese Ergebnisse vorgestellt werden, soll jedoch die Lundgrentransformation eingeführt werden, da durch diese Transformation aus dem Lambwirbel der im nächsten Abschnitt vorgestellte Burgerswirbel generiert werden kann.<sup>4</sup> Zudem werden zunächst noch die Gleichungen für Vortizität und Geschwindigkeitsfeld des Lundgrenwirbels erläutert.

---

<sup>4</sup>Dieser Wirbel wird dann im Kapitel 4 als Baustein für ein Modell zur Erzeugung von Einteilchenstatistiken benutzt werden.

## Die Lundgrentransformation

Wie bereits erwähnt, ermöglicht die Lundgrentransformation aus einer Lösung der zweidimensionalen Navier-Stokes- oder Wirbeltransportgleichung, eine Lösung der entsprechenden dreidimensionalen Gleichung zu erzeugen. Da sie mit den Arbeiten von Lundgren in engem Zusammenhang steht (siehe auch [Lun82]) und in den folgenden Abschnitten sowie im Kapitel 4 benötigt wird, soll die Transformation an dieser Stelle vorgestellt werden.

Die dreidimensionale Wirbeltransportgleichung (siehe Kapitel 2) lautet

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}, \quad (3.47)$$

dabei wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit bei allen Feldern die Abhängigkeit von Raum und Zeit weggelassen. Man nimmt nun an, dass man das Geschwindigkeitsfeld in zwei Anteile aufteilt, von denen der eine dreidimensional und rotationsfrei ist, während der andere, rein zweidimensionale Anteil den gesamten Wirbelanteil des Feldes enthält,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}^{2D}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}^{3D}(\mathbf{x}, t) \quad \text{mit} \quad \mathbf{u}^{3D}(\mathbf{x}, t) = \left(-\frac{a(t)}{2}x, -\frac{a(t)}{2}x, z\right). \quad (3.48)$$

Bei  $a(t)$  handelt es sich um den zunächst als zeitabhängig und positiv angenommenen *strain*-Parameter.  $\mathbf{u}^{3D}$  sorgt also für ein radial nach innen gerichtetes Geschwindigkeitsfeld bei einer gleichzeitigen Strömung entlang der  $z$ -Achse. Die Wahl von  $\mathbf{u}^{3D}$  lässt erkennen, dass dieses Feld wie gefordert rotationsfrei und darüber hinaus divergenzfrei ist. Die Zweidimensionalität von  $\mathbf{u}^{2D}$  hat zur Folge, dass es sich bei der Vortizität um eine quasiskalare Größe handelt,  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}^{2D} = \omega \mathbf{e}_z$ . Im Folgenden bietet sich die Wahl von Zylinder- bzw. Polarkoordinaten an. Das Geschwindigkeitsfeld lautet in diesen Koordinaten

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{a}{2}r + v_r(r, \varphi, t) \\ u_\varphi &= v_\varphi(r, \varphi, t) \\ u_z &= az, \end{aligned} \quad (3.49)$$

wobei  $v_r$  und  $v_\varphi$  nur durch  $\mathbf{u}^{2D}$  hervorgerufen werden. Unter diesen Annahmen nimmt die Wirbeltransportgleichung eine modifizierte Gestalt an,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \left(-\frac{a}{2} + v_r\right) \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} = a\omega + \nu \Delta \omega. \quad (3.50)$$

Da  $\mathbf{u}^{3D}$  schon allein die Kontinuitätsgleichung erfüllt, muss dies auch für  $\mathbf{u}^{2D}$  gelten, als Folge gilt

$$\frac{\partial r v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.51)$$

was die Existenz einer Stromfunktion  $\psi$  zu diesem zweidimensionalen Anteil sichert. Für diese gilt

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad (3.52)$$

$$v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3.53)$$

$$\omega = -\Delta \psi. \quad (3.54)$$

Die Gleichung 3.50 suggeriert nun die Einführung neuer Variablen,

$$\begin{aligned} \xi &= S(t)^{1/2} r \\ T &= \int_0^t S(t') dt' \quad \text{mit} \quad S(t) = \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right), \end{aligned} \quad (3.55)$$

und mit der Bezeichnung  $\psi(r, \varphi, t) = \psi_2(\xi, \varphi, T)$  rechnet man leicht nach, dass Gleichung (3.50) in diesen Variablen die Form

$$\frac{\partial \omega_2}{\partial T} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \psi_2}{\partial \varphi} \frac{\partial \omega_2}{\partial \xi} - \frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} \frac{1}{\xi} \frac{\partial \omega_2}{\partial \varphi} = \nu \Delta_\xi \omega_2 \quad (3.56)$$

annimmt. Für die zweidimensionale Vortizität  $\omega_2(\xi, \varphi, T)$  gilt in diesen Variablen

$$\omega_2 = -\Delta_\xi \psi_2. \quad (3.57)$$

Das sind jedoch genau die Gleichungen, die zu einem rein zweidimensionalen Problem gehören. Durch die Transformation 3.55 ist die dreidimensionale Gleichung effektiv auf eine zweidimensionale zurückgeführt worden. Nötig ist dazu lediglich die spezielle Annahme von  $\mathbf{u}^{3D}$ . Andersherum kann man unter der Transformation natürlich auch aus jeder zweidimensionalen Lösung eine dreidimensionale generieren. In diesem Fall berechnet sich die dreidimensionale Vortizität nach

$$\omega(r, \varphi, t) = S(t) \omega_2\left(S(t)^{1/2} r, \varphi, \int_0^t S(t') dt'\right). \quad (3.58)$$

## Vortizität und Geschwindigkeitsfeld

Um einen Eindruck von der Struktur der zweidimensionalen Lundgrenspirale zu geben, wird nun die Lösung der Eulergleichung in Form von der Vortizität vorgestellt (siehe [Lun82]). Da wir uns an dieser Stelle ausschließlich mit zweidimensionalen Lösungen beschäftigen, lassen wir den Index aus dem letzten Abschnitt weg und verwenden die üblichen Buchstaben für die Polarkoordinaten.

Befindet sich eine Linie von nicht allzu hoher Vortizität im Geschwindigkeitsfeld eines starken Wirbels, so verhält sie sich in erster Näherung wie ein passiver Skalar. Aufgrund der differentiellen Rotation wird diese Linie zu einer Spirale geschert und in Polarkoordinaten gilt für jeden Punkt auf der Linie  $\varphi = \Omega(r)t$ , wobei  $\Omega(r) = \frac{v_\varphi}{r}$  durch die radial gemittelte Geschwindigkeit, die vom zentralen Wirbel erzeugt wird, gegeben ist. Die Vortizität solch einer einzelnen Linie ist dann gegeben durch

$$\omega_2(r, \varphi, t) = 2\pi \gamma(r) \delta(\varphi - \Omega(r)t). \quad (3.59)$$

Zwischen der gemittelten Vortizität  $\gamma(r)$  und der gemittelten Winkelgeschwindigkeit besteht der Zusammenhang

$$r\gamma(r) = \frac{d}{dr}r^2\Omega(r), \quad (3.60)$$

da die Zirkulation durch  $2\pi r^2\Omega(r)$  gegeben ist. Um für differentielle Rotation zu sorgen, muss lediglich  $\frac{d}{dr}\Omega(r) < 0$  gelten. Mit der passenden Wahl von  $\Omega(r)$  ist die Lösung dann also vollständig bestimmt. Besteht der Wirbel nicht aus einem einzigen Spiralarm, sondern aus einer ganzen Menge, so lautet die Verallgemeinerung

$$\omega_2(r, \varphi, t) = 2\pi \sum_j \gamma_j(r) \delta(\varphi - \phi_j - \Omega(r)t). \quad (3.61)$$

Lundgren verallgemeinert diesen nicht viskosen Fall in [Lun82] weiter und erhält viskose Korrekturen zu diesen Lösungen. Damit erhält er eine asymptotische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung. Darüber hinaus unterwirft er die Vortizität dann der Transformation, um eine dreidimensionale Lösung für sein Modell zu erhalten.

Da wir uns für die Entwicklung eines Teilchens in der zweidimensionalen Lundgrenspirale interessieren, verlassen wir an dieser Stelle diesen Weg und wenden uns dem Versuch zu, das Geschwindigkeitsfeld zu bestimmen. Aufgrund der azimuthalen Periodizität lässt sich die Vortizität in eine Fourierreihe entwickeln,

$$\omega(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_n(r, t) e^{in\varphi}. \quad (3.62)$$

Die Fourierkoeffizienten sind dabei gegeben durch

$$\omega_n = \gamma(r) e^{in\Omega(r)t}. \quad (3.63)$$

Ebenso kann man die Stromfunktion in eine Fourierreihe entwickeln und erhält

$$\psi(r, \varphi, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(r, t) e^{in\varphi}. \quad (3.64)$$

Die Gleichung (3.57) aus dem letzten Abschnitt lautet in Polarkoordinaten

$$\omega = - \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} \right). \quad (3.65)$$

Setzt man nun die Fourierentwicklungen für  $\omega$  und  $\psi$  ein, so erhält man nach einem Koeffizientenvergleich

$$\omega_n = - \left( \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2} \psi_n \right). \quad (3.66)$$

Vassilicos erhält in [VB96] eine asymptotische Lösung für diese Gleichung, sie lautet im Falle  $n \neq 0$

$$\psi_n(r, t) \approx \frac{\gamma(r)}{t^2 n^2 \left( \frac{d\Omega(r)}{dr} \right)^2} e^{-in\Omega(r)t}. \quad (3.67)$$

Für die nullte Harmonische erhält man aus Gleichung (3.66) mit Hilfe von Gleichung (3.60)

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial r} = -r\Omega(r), \quad (3.68)$$

so dass sich insgesamt für große Zeiten  $t$

$$\psi(r, \varphi, t) \approx \psi_0 + \sum_{n \neq 0} \frac{\gamma(r)}{t^2 n^2 \left( \frac{d\Omega(r)}{dr} \right)^2} e^{-in(\varphi - \Omega(r)t)} \quad (3.69)$$

ergibt. Nach [VB96] lässt sich dieser Ausdruck weiter auswerten. Mit den Identitäten

$$\begin{aligned} \sum_{n \neq 0} \frac{e^{inx}}{n^2} &= 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} \quad \text{und} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2} &= \frac{\pi^2}{6} + \frac{1}{4} [x]_{\text{mod } 2\pi}^2 - \frac{\pi}{2} [x]_{\text{mod } 2\pi} \end{aligned} \quad (3.70)$$

ergibt sich schließlich ein geschlossener Ausdruck für die Stromfunktion

$$\psi \approx \psi_0 + \frac{\gamma(r)}{t^2 \left( \frac{d\Omega(r)}{dr} \right)^2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} [\varphi - \Omega(r)t]_{\text{mod } 2\pi}^2 - \pi [\varphi - \Omega(r)t]_{\text{mod } 2\pi} \right\}. \quad (3.71)$$

An dieser Lösung kann man bereits sehen, dass sich für lange Zeiten ein rein axialsymmetrisches Feld ausbilden wird, für das es keine radiale Geschwindigkeitskomponente mehr



gibt. Korrekturen dazu fallen proportional zum Quadrat der Zeit ab. Die Geschwindigkeitskomponenten ergeben sich durch Differentiation der Stromfunktion,

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} \quad \text{und} \quad v_\varphi = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3.72)$$

Für den radialen Anteil ergibt sich

$$v_r \approx \frac{\gamma}{t^2 r \left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2} \{ [\varphi - \Omega(r)t]_{\text{mod } 2\pi} - \pi \}. \quad (3.73)$$

Die azimuthale Geschwindigkeitskomponente beträgt

$$\begin{aligned} v_\varphi \approx & -\frac{\partial \psi_0}{\partial r} - \frac{1}{t^2} \left( \left\{ \frac{\frac{d\gamma}{dr}}{\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2} - \frac{2\gamma}{\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^3} \right\} \left\{ \frac{\pi^2}{3} + \frac{1}{2} [\varphi - \Omega t]_{\text{mod } 2\pi}^2 - \pi [\varphi - \Omega t]_{\text{mod } 2\pi} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma}{\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)^2} \left\{ [\varphi - \Omega t]_{\text{mod } 2\pi} \frac{d\Omega}{dr} + \pi \frac{d\Omega}{dr} \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.74)$$

Beide Lösungen werden für große Zeiten also durch den radialsymmetrischen Anteil dominiert. Formal kann man nun die Lagrangegleichungen für die Bewegung eines Teilchens hinschreiben,

$$\dot{\varphi}(t) \approx \left[ \frac{v_\varphi}{r} \right]_{[r(t), \varphi(t)]} \quad \text{und} \quad \dot{r}(t) \approx [v_r(t)]_{[r(t), \varphi(t)]}. \quad (3.75)$$

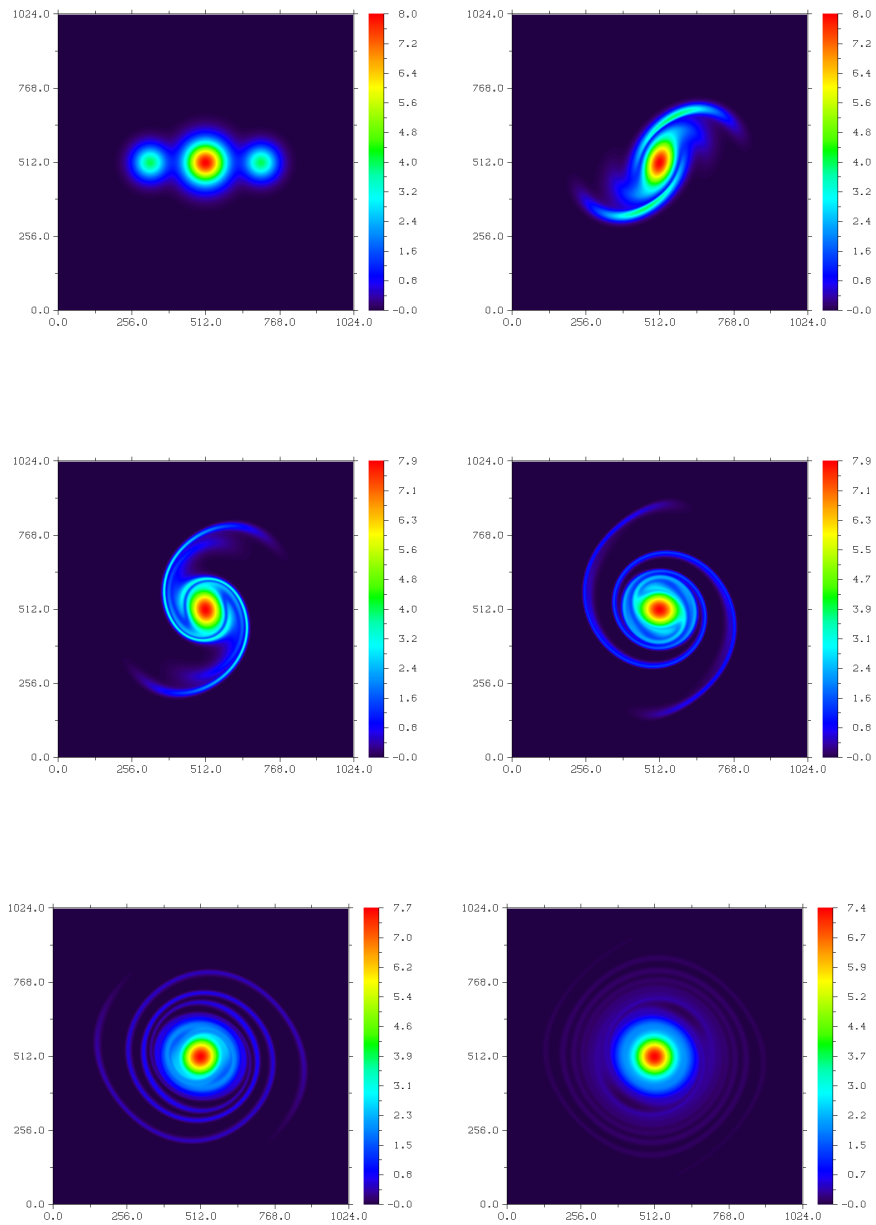
Für große Zeiten verschwindet die radiale Geschwindigkeitskomponente und es gilt  $r(t) \approx \text{const.}$  Zugleich wird der Beitrag zur azimuthalen Geschwindigkeitskomponente nur noch von dem axialsymmetrischen Anteil der Vortizität dominiert, folglich bewegt sich das Teilchen wie im Geschwindigkeitsfeld eines Punkt- oder Lambwirbels auf einer Kreisbahn. Aufgrund der Komplexität der Bewegungsgleichungen wird im Folgenden die Bewegung von Lagrangeteilchen im Feld der Lundgrenspirale mit numerischen Methoden untersucht.

## Numerische Ergebnisse

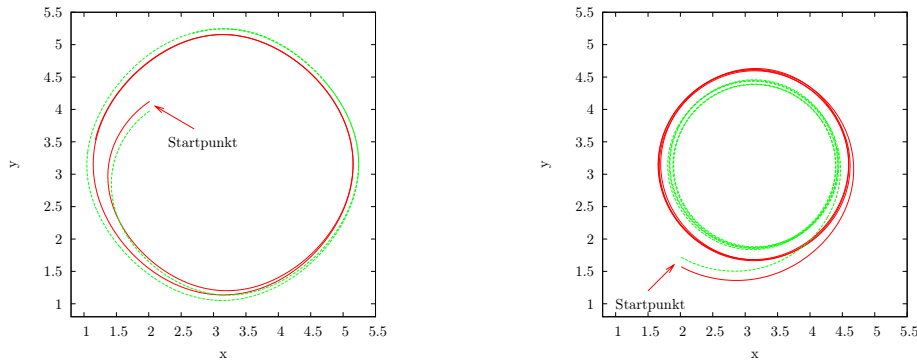
### Entwicklung der Vortizität

Ähnlich wie bei der numerischen Untersuchung des Lambwirbels wird auf dem Gitter eine Vortizitätsanfangsbedingung initialisiert. Diese besteht aus einem zentralen Wirbel, der von zwei schwächeren Wirbeln flankiert wird. In Formeln bedeutet das

$$\begin{aligned} \omega(i, k) = & 8 \cdot \exp \left( -\frac{\left(i - \frac{dm}{2}\right)^2 + \left(k - \frac{dm}{2}\right)^2}{0.005 \text{ dm}^2} \right) \\ & + 4 \cdot \exp \left( -\frac{\left(i - \frac{11dm}{16}\right)^2 + \left(k - \frac{dm}{2}\right)^2}{0.003 \text{ dm}^2} \right) \\ & + 4 \cdot \exp \left( -\frac{\left(i - \frac{5dm}{16}\right)^2 + \left(k - \frac{dm}{2}\right)^2}{0.003 \text{ dm}^2} \right). \end{aligned} \quad (3.76)$$



**Abbildung 3.17:** Zeitliche Entwicklung des Vortizitätsfeldes einer Lundgrenspirale für  $t \in \{0, 2, 4, 8, 16, 40\}$  Zeiteinheiten. Für eine Animation siehe Simulationsindex `lundgren-1`.

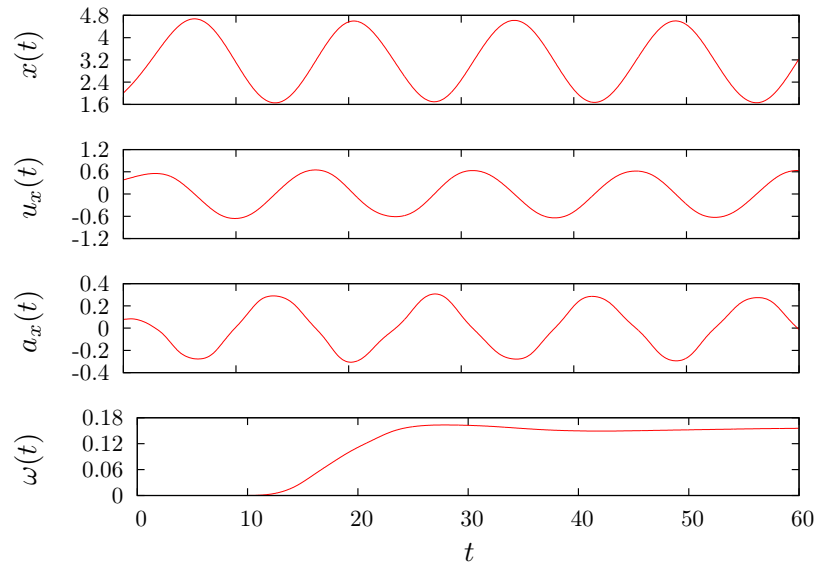


**Abbildung 3.18:** Teilchen im Geschwindigkeitsfeld der Lundgrenspirale. Im Feld gibt es Bereiche, in denen eine radiale Bewegung nach außen bzw. innen möglich ist.

Der innere Wirbel besitzt damit eine Zirkulation von  $\Gamma \approx 4.916$ , wobei die beiden flankierenden Wirbel jeweils eine Zirkulation von  $\Gamma \approx 1.488$  aufweisen. Abbildung 3.17 zeigt die zeitliche Entwicklung des Vortizitätsfeldes. Zu Beginn wird der zentrale Wirbel wie erläutert von den beiden schwächeren Wirbeln flankiert. Dann beginnen die kleinen Wirbel im Geschwindigkeitsfeld des zentralen Wirbels aufgrund der differentiellen Rotation zu dünneren Filamenten verzerrt zu werden. Da die beiden Wirbel ihrerseits ein Geschwindigkeitsfeld erzeugen, wird auch der zentrale Wirbel leicht verzerrt. Nach einiger Zeit werden die begleitenden Wirbel zu einer feinen Spirale verzerrt. Sobald die Spiralarme fein genug sind, werden sie durch die viskosen Effekte schnell dissipiert; im Vergleich zum Zentralwirbel fällt ihre Amplitude deutlich schneller ab. Noch etwas später sind die Spiralarme nahezu ausgestorben und der Wirbel zeigt eine fast axialsymmetrische Form, nur leichte Fluktuationen im Vortizitätsfeld erinnern an die Spiralstruktur. Mit fortschreitender Zeit werden auch diese Strukturen durch die Diffusion geglättet.

### Trajektorien

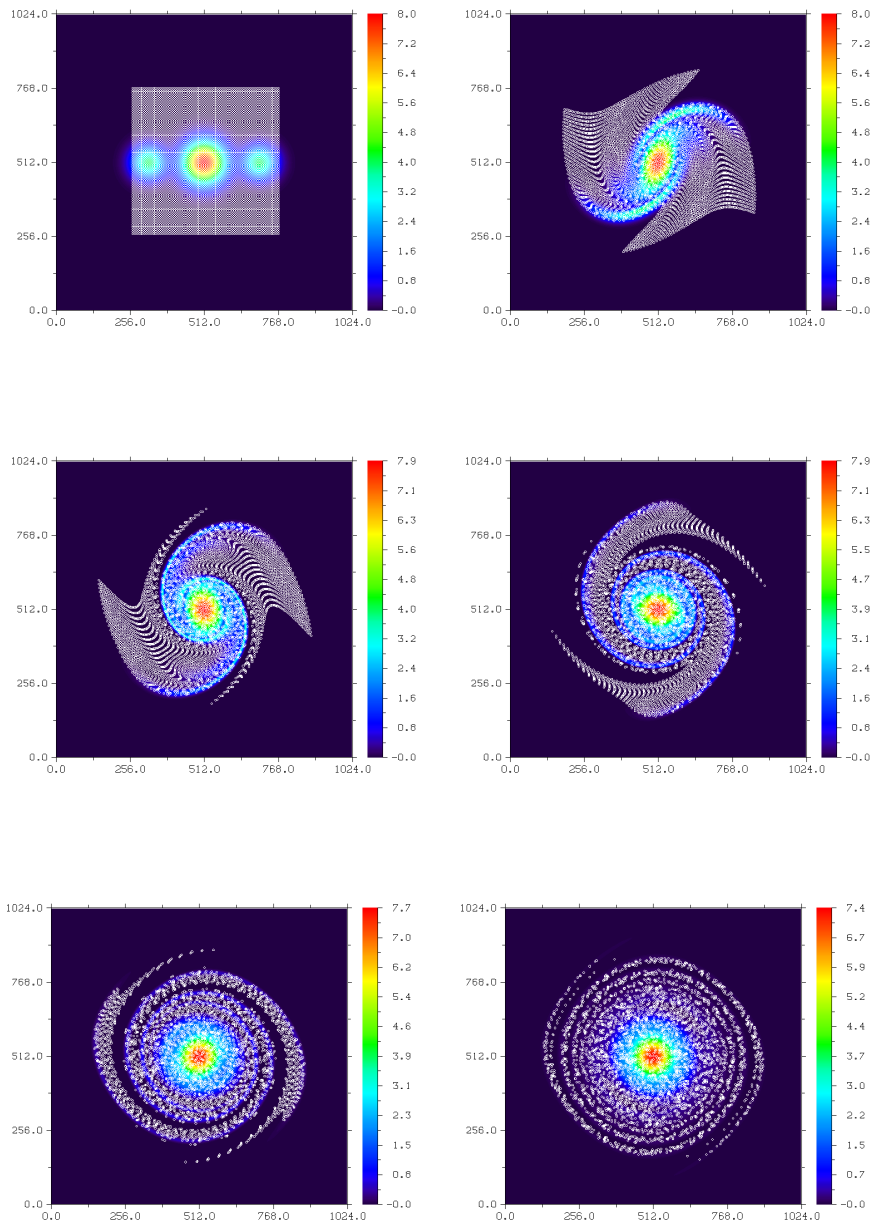
Wie zwei Abschnitte zuvor anhand der analytischen Lösung für das Geschwindigkeitsfeld motiviert, gibt es im Falle des Lundgrenwirbels eine nichtverschwindende Geschwindigkeitskomponente in radialer Richtung. Das ist qualitativ einfach zu verstehen, wenn man sich in der oben diskutierten Anfangsbedingung die Überlagerung der verschiedenen Geschwindigkeitsfelder der drei Wirbel vorstellt (vgl. Abb. 3.17). Alle dort abgebildeten Wirbel erzeugen ein Geschwindigkeitsfeld, das im mathematisch positiven Sinne orientiert ist. Nimmt man beispielsweise den linken begleitenden Wirbel, so gibt es oberhalb dieses Wirbels einen Bereich, in dem sich sein Geschwindigkeitsfeld mit dem Geschwindigkeitsfeld des zentralen Wirbels derart überlagert, dass sich ein Lagrangeteilchen radial nach außen bewegt, wie Abbildung 3.18 illustriert. Man kann sich die Bewegung zusammengesetzt aus einer Bahn um den begleitenden Wirbel und zusätzlich einer Bewegung um den zentralen Wirbel vorstellen. Der begleitende Wirbel wird dabei durch das Geschwindigkeitsfeld des zentralen Wirbels auseinandergeschert. Unterhalb des begleiten-



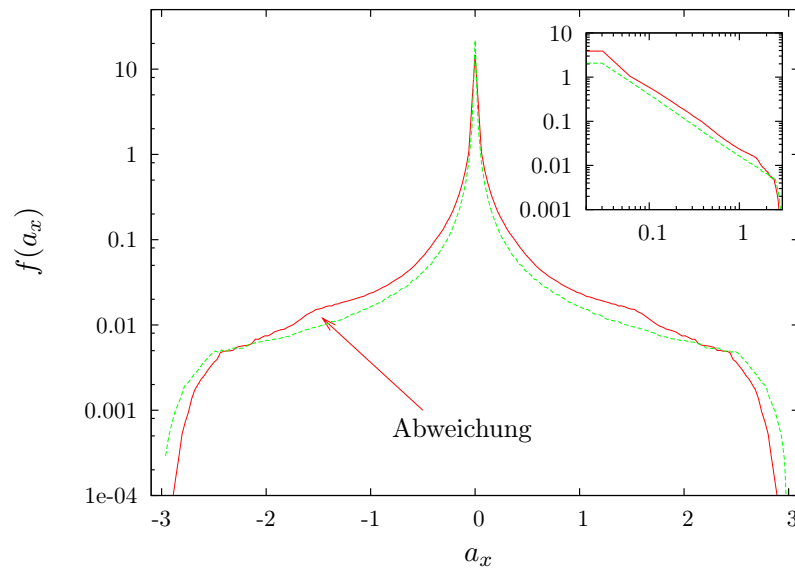
**Abbildung 3.19:** Trajektorie eines Teilchens im Lundgrenwirbel. Die verschiedenen Komponenten zeigen Abweichungen von der sinusoidalen Form im Lambwirbel. Die Vortizität ist keine monoton fallende Funktion der Zeit mehr.

den Wirbels gibt es wiederum einen Bereich, in dem das Geschwindigkeitsfeld zu einer Bewegung in radialer Richtung nach innen führt (Abb. 3.18). In beiden Fällen ist die radiale Bewegung am deutlichsten während der Spiralbildungsprozess noch nicht vollständig abgeschlossen ist. Hat sich erst eine deutliche Spirale ausgebildet, so bewegen sich die Teilchen nahezu auf einer Kreisbahn. Abbildung 3.19 zeigt die  $x$ -Komponente des Ortes, der Geschwindigkeit, der Beschleunigung und der Vortizität einer Trajektorie. Im Gegensatz zur Lambkonfiguration zeigt die funktionale Form der Komponenten keinen sinusoidalen Verlauf mehr, besonders die Beschleunigung zeigt Abweichungen. Durch die Spiralstruktur wird das Geschwindigkeitsfeld in azimuthaler Richtung moduliert und die zeitlich nicht stationäre Konfiguration führt zu einer ständigen Änderung der Situation. Bemerkenswert ist insbesondere, dass die Vortizität entlang der Trajektorie keine monoton fallende Funktion der Zeit mehr ist. So sieht man, dass zu  $t \approx 10$  die Vortizität zu steigen beginnt. Das bedeutet, dass das Teilchen von einem Spiralarm erfasst wird. Dieser Effekt kann nur im viskosen Fall auftreten, da die kurze Rechnung in Kapitel 2 zeigt, dass sich im Falle der Eulergleichung die Vortizität entlang einer Trajektorie nicht ändern kann.

Die zeitliche Entwicklung einer quadratförmigen Menge von Teilchen wird in Abbildung 3.20 gezeigt. Man erkennt deutliche qualitative Unterschiede zur analogen Situation im Fall des Lambwirbels. Durch die Anwesenheit der Spiralstruktur wird die Axialsymmetrie des Geschwindigkeitsfeldes gebrochen, so dass es nicht mehr zu der gleichmäßigen differentiellen Rotation wie im Fall des Lambwirbels kommt. Vielmehr werden die Spiralarme in azimuthaler Richtung nicht von den Teilchen überschritten. Befindet sich ein Teilchen



**Abbildung 3.20:** Zeitliche Entwicklung eines Quadrats von Teilchen in einer Lundgrenspirale für  $t \in \{0, 2, 4, 8, 16, 40\}$  Zeiteinheiten. Für eine Animation siehe Simulationsindex `lundgren-2`.

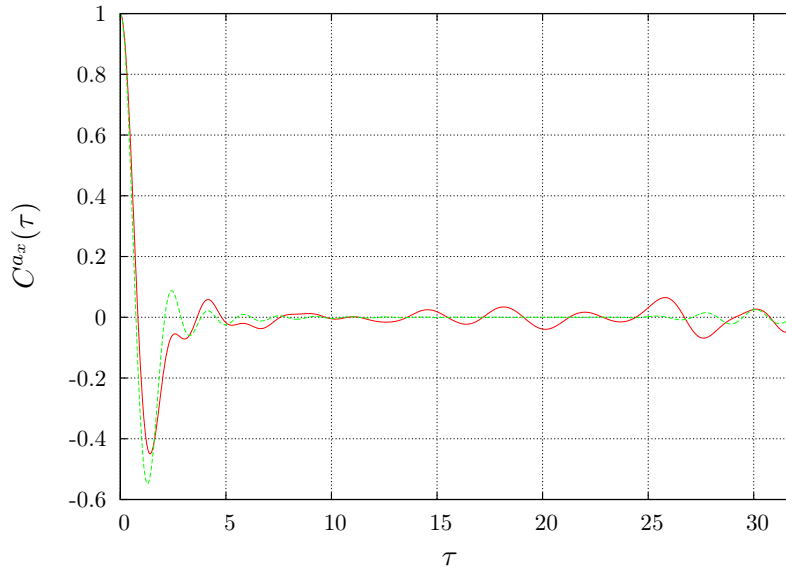


**Abbildung 3.21:** Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungsfunktion für  $a_x$  im Lundgrenwirbel in logarithmischer bzw. doppeltlogarithmischer Darstellung. Die entsprechenden Verteilungsfunktionen im Falle des Lambwirbels sind grün dargestellt.

in der Nähe eines solchen Spiralarms, so bewegt es sich wie oben erläutert nicht in rein azimuthaler, sondern auch in radialer Richtung. Aufgrund des Abschirmungseffektes der Spiralarme kommt es zu tiefen „Einschnitten“ in der vormals quadratischen Struktur. Mit der Zeit sterben die nichtaxialsymmetrischen Anteile der Vortizitätsverteilung immer weiter aus. In der Konsequenz haben sie auch keinen Einfluss auf die Lagrangeschen Trajektorien mehr. Für große Zeiten erkennt man daher die schon im Falle des Lambwirbels diskutierte Verzerrung des Quadrats zu einer nahezu axialsymmetrischen Form. Exemplarisch werden nun einige statistische Eigenschaften der Lundgrenkonfiguration untersucht.

### Verteilungsfunktion und Autokorrelation

Abbildung 3.21 zeigt die Verteilungsfunktion für die Beschleunigungskomponente  $a_x$ . Im Vergleich zum Lambwirbel zeigt sie im Bereich von  $a_x \approx 1,5$  eine deutliche Abweichung. Diese lässt sich qualitativ mit dem Vergleich zweier Lambwirbel in Abschnitt 3.2 erklären. Dort wurde gezeigt, dass Wirbel unterschiedlicher Zirkulation eine unterschiedlich breite Verteilungsfunktion für z.B. die Beschleunigung zeigen. Bei der vorliegenden Lundgrenspirale handelt es sich im Prinzip um ein Feld, in dem gleichzeitig Wirbel unterschiedlicher Zirkulationen anwesend sind. Die in der Statistik beobachtete Abweichung rührt also von der Überlagerung dieser Statistiken her. Natürlich ist das nur in grober Approximation so zu verstehen, da die Wirbel miteinander wechselwirken und im Falle der flankierenden Wirbel mit der Zeit deformiert und zerstört werden. Wie die doppeltlo-



**Abbildung 3.22:** Autokorrelationsfunktion für  $a_x$ . Im Vergleich zum Lambwirbel (grüne Kurve) zeigt die Autokorrelationsfunktion für den Lundgrenwirbel stärkere Oszillationen.

garithmische Darstellung zeigt, stört die komplexere Struktur der Lundgrenspirale auch den algebraischen Abfall der Verteilungsfunktion. Dies ist ein erster Hinweis darauf, dass sich in einem turbulenten System, das aus vielen wechselwirkenden Wirbeln besteht, neue Effekte und funktionale Formen der Verteilungsfunktionen herausbilden können.

In Abbildung 3.22 wird die Autokorrelationsfunktion für die Beschleunigungskomponente  $a_x$  dargestellt. Diese zeigt zunächst einen ähnlichen Abfall wie beim Lambwirbel, ohne jedoch beim ersten Nulldurchgang eine so ausgeprägte Antikorrelation zu zeigen. Während sich dann die Autokorrelationsfunktion des Lambwirbels lange im Bereich von Null bewegt, oszilliert sie im Fall des Lundgrenwirbels durchgehend stärker, was nur dadurch zu erklären ist, dass scheinbar viele Teilchen sich länger mit gleicher Winkelgeschwindigkeit und ähnlicher Amplitude bewegen.

Insgesamt modifiziert die Lundgrenspirale die bisher betrachteten Größen leicht, ohne zu grundlegenden neuen Effekten zu führen. Gerade aber durch die deutlichen Unterschiede im Bezug auf die zeitliche Entwicklung einer Menge von Teilchen ist es möglich, dass dieser Wirbel im Vergleich zum Punkt- oder Lambwirbel andere Eigenschaften im Bezug auf den Teilchentransport zeigt. Dieser Punkt wird jedoch im Rahmen dieser Arbeit nicht untersucht.

### 3.4 Burgerswirbel

Im Gegensatz zu den bisher vorgestellten Wirbellösungen handelt es sich beim Burgerswirbel um eine Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung. Genaugenommen spricht man von einer  $2^{1/2}$ -dimensionalen Lösung, da die Vortizitätsverteilung durch die Lundgrentransformation aus dem zweidimensionalen Lamb-Oseen-Wirbel hervorgeht. Da dieser Wirbel im kommenden Kapitel gewissermaßen als Grundbaustein für ein Modell für dreidimensionale Turbulenz dienen wird, sei er an dieser Stelle kurz vorgestellt.

#### Vortizität und Geschwindigkeitsfeld

In zwei Dimensionen lautet das Vortizitätsfeld des Lambwirbels (siehe Kapitel 3.2)

$$\omega_2(\xi, T) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu T} e^{-\frac{\xi^2}{4\nu T}}. \quad (3.77)$$

Mit der Lundgrentransformation ersetzt man die Variablen,

$$\begin{aligned} \xi &\longrightarrow e^{-\frac{a}{2}t} r \\ T &\longrightarrow \frac{1}{a}[e^{at} - 1] \end{aligned} \quad (3.78)$$

und erhält wie in Abschnitt 3.3 erläutert das dreidimensionale Vortizitätsfeld

$$\omega(r, t) = \frac{\Gamma}{4\pi\nu} \frac{a}{1 - e^{-at}} \exp\left(-\frac{ar^2}{4\nu[1 - e^{-at}]}\right). \quad (3.79)$$

Bei dieser Transformation wurde ein zeitunabhängiger *strain*-Parameter  $a$  angenommen. Im Grenzfall großer Zeiten erhält man das Vortizitätsfeld des Burgerswirbel,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega(r, t) = \frac{\Gamma a}{4\pi\nu} e^{-\frac{ar^2}{4\nu}}. \quad (3.80)$$

Bei dem Burgerswirbel handelt es sich also um eine zeitunabhängige Gleichgewichtslösung, bei der der Einfluss der Diffusion durch das zusätzliche *strain*-Feld ausbalanciert wird. Physikalisch stellt man sich unter dem *strain*-Feld den über alle Wirbel gemittelten Einfluss auf den einzelnen Wirbel vor. Im Ergebnis wirkt dieses Feld ähnlich wie der Wirbelstreckungsmechanismus in der Navier-Stokes-Gleichung. Gleichung (3.80) definiert als typischen Radius für den Burgerswirbel

$$r_B = \left(\frac{4\nu}{a}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.81)$$

Die azimuthale Komponente des Geschwindigkeitsfeldes kann nun analog zum Lambwirbel über den Satz von Stokes bestimmt werden, und man erhält

$$u_\varphi(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left(1 - e^{-\frac{ar^2}{4\nu}}\right). \quad (3.82)$$



Genau wie beim Lambwirbel steigt das Geschwindigkeitsfeld für kleine Radien  $r$  linear an und fällt für große Radien wie  $\frac{1}{r}$  ab. Weit außerhalb verhält sich das Geschwindigkeitsfeld also wie das des Punktwirbels. Für die entsprechenden Bewegungsgleichungen eines Lagrangeteilchens muss zusätzlich das *strain*-Feld beachtet werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}\dot{r}(t) &= -\frac{a}{2} r(t) \\ \dot{\varphi}(t) &= \frac{1}{r} u_{\varphi}(t) \\ \dot{z}(t) &= a z(t).\end{aligned}\tag{3.83}$$

Die Lösungen für die radiale und die  $z$ -Komponente lassen sich unmittelbar ablesen

$$r(t) = r_0 e^{-\frac{a}{2}t}\tag{3.84}$$

$$z(t) = z_0 e^{at}.\tag{3.85}$$

Ein Lagrangeteilchen bewegt sich im Geschwindigkeitsfeld eines Burgerswirbel also exponentiell gebremst in radialer Richtung, während es sich mit zunehmender Geschwindigkeit entlang der Wirbelachse bewegt. Da die  $\varphi$ -Komponente nur implizit über den radialen Anteil von der Zeit abhängt, vereinfacht sich die Lösung der Differentialgleichung für die Winkelkomponente auf die Lösung eines Integrals. Die Differentialgleichung lautet

$$\dot{\varphi} = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} e^{at} \left(1 - e^{-\frac{a}{4\nu} r_0^2 e^{-at}}\right).\tag{3.86}$$

Da die rechte Seite nicht mehr von  $\varphi$  abhängt, gilt es lediglich ein Integral zu lösen. Es stellt sich jedoch heraus, dass man für dieses Integral keine geschlossene Lösung angeben kann, eine Näherungslösung ist jedoch leicht bestimmbar. Da sich aufgrund der Bewegungsgleichungen (3.83) das Teilchen radial nach innen bewegt, bietet sich für große Zeiten eine Näherung für kleine radiale Abstände an. Eine Taylorentwicklung der Exponentialfunktion in der Klammer bis zur ersten Ordnung ergibt unmittelbar

$$\dot{\varphi} = \frac{\Gamma a}{8\pi\nu},\tag{3.87}$$

was sich einfach integrieren lässt,

$$\varphi(t) = \frac{\Gamma a}{8\pi\nu} t + \varphi_0.\tag{3.88}$$

Für große Zeiten bewegt sich das Lagrangeteilchen also näherungsweise mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Da sich keine geschlossene Lösung für die Winkelkomponente angeben lässt, werden im Folgenden die Bewegungsgleichungen numerisch integriert.

## Trajektorien

Abbildung 3.23 gibt einen Eindruck über die Dynamik eines Teilchens im Burgerswirbel. Die Teilchen führen unter dem Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes Spiralbewegungen um die Wirbelachse aus. Man erkennt, dass die Zirkulation  $\Gamma$  im Wesentlichen die Frequenz der Oszillation um die Wirbelachse vorgibt, während der *strain*-Parameter  $a$  bestimmt, wie schnell sich das Teilchen in radialer Richtung und entlang der Wirbelachse bewegt. Gerade die untere Abbildung zeigt qualitative Übereinstimmung mit den in Kapitel 1 vorgestellten Einfangereignissen. Der Burgerswirbel scheint daher eine geeignete Wahl zur Modellierung dieser Ereignisse zu sein.

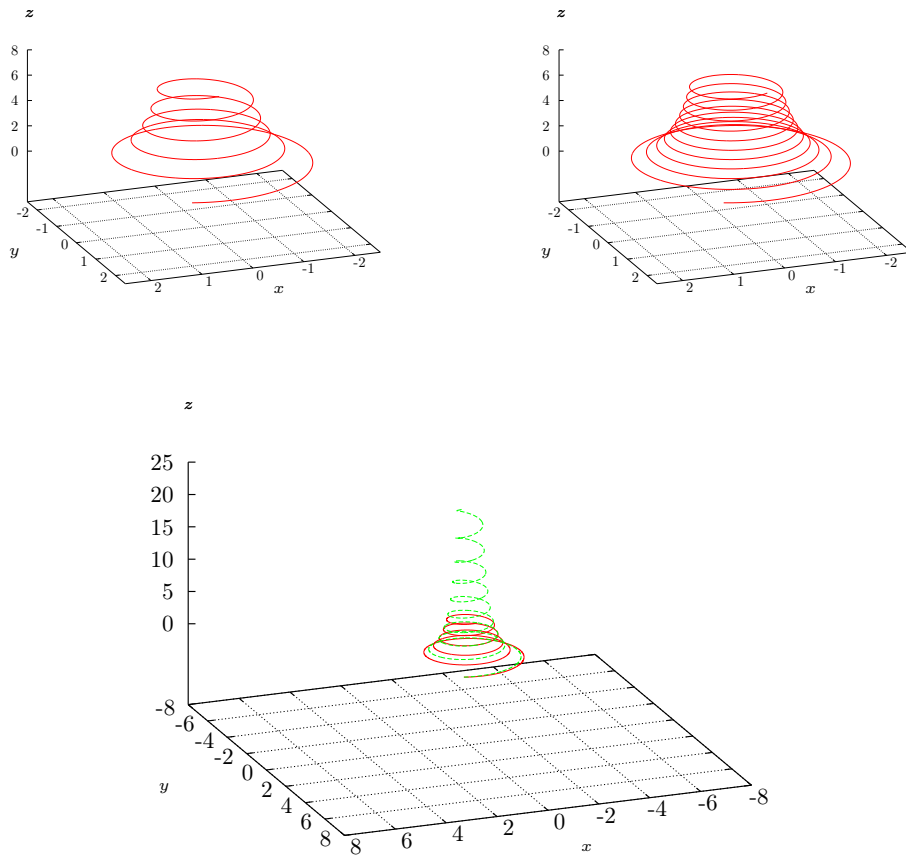
Der Verfasser untersucht an dieser Stelle keine weiteren Eigenschaften eines einzelnen Burgerswirbels. Statistische Eigenschaften eines Ensembles aus Burgerswirbeln werden in Kapitel 4 untersucht.

## 3.5 Fazit

Ziel dieses Kapitels war es, einzelne Wirbelstrukturen zu untersuchen. Im Fokus stand dabei die Fragestellung, welchen Einfluss diese Strukturen auf Lagrangesche Teilchenbahnen haben. Für den Punkt-, den Lamb-Oseen- und den Lundgrenwirbel wurden exemplarisch Trajektorien und die zeitliche Entwicklung ganzer Mengen von Lagrangeteilchen vorgestellt. Des Weiteren wurden statistische Eigenschaften wie z.B. Verteilungsfunktionen und Autokorrelationsfunktionen diskutiert. Dabei stellte sich heraus, dass der Mittelungsprozess über eine Menge von Lagrangeteilchen zu qualitativ neuen Effekten führt. Unterschiede zwischen den verschiedenen Wirbellösungen wurden herausgestellt. Das einfache Konzept des Punktwirbels machte es möglich, viele der auftretenden Effekte mit analytischen Mitteln qualitativ zu verstehen. Für einen quantitativen Vergleich ist eine genauere Untersuchung der exakten Ergebnisse (3.24) und (3.28) notwendig. Weiteren Aufschluss könnte ein genauerer Vergleich der unterschiedlichen Geschwindigkeitsfelder und Teilchenensembles, über die gemittelt wird, geben.

Als Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung wurde der Burgerswirbel eingeführt. Teilchentrajektorien wurden qualitativ diskutiert.

Im Folgenden werden nun Eigenschaften von Ensembles von Wirbeln untersucht. Das geschieht in Kapitel 4 anhand eines einfachen Modells für die Einteilchenstatistik für dreidimensionale Turbulenz und in Kapitel 5 am Beispiel von zweidimensionaler zerfallender Turbulenz.



**Abbildung 3.23:** Trajektorien im Burgerswirbel über 400 Zeiteinheiten. Für alle Trajektorien gilt ein Zeitschritt von  $dt = 0.01$ , eine Viskosität von  $\nu = 0.001$  und ein Anfangsort  $\mathbf{x}_0 = (1, 2, 1)$  (alle Angaben in einheitenloser Form). Oben links:  $\Gamma = 1$  und  $a = 0.005$ , oben rechts:  $\Gamma = 2$  und  $a = 0.005$ ; unten: rote Kurve  $\Gamma = 1$  und  $a = 0.005$ , grüne Kurve  $\Gamma = 1$  und  $a = 0.008$ .

# 4 Ein Modell für die Einteilchenstatistik für vollentwickelte dreidimensionale Turbulenz

Im vorigen Kapitel wurde der Einfluss einzelner kohärenter Strukturen auf Lagrangeteilchen untersucht. Die Betrachtungen sollen nun auf ein Ensemble von Wirbeln ausgeweitet werden. Die in diesem Abschnitt vorgestellten Ergebnisse finden sich in zusammengefasster Form in [WJF06]. Wer mehr über die detaillierte Entwicklung des Modells erfahren möchte, sei an [Wil06]<sup>1</sup> verwiesen. Das Kapitel ist wie folgt aufgebaut. Zunächst wird die dem Modell zu Grunde liegende Idee erläutert, bevor die numerische Implementierung des Modells erläutert wird. Dann werden die numerischen Ergebnisse vorgestellt und um analytische Ergebnisse ergänzt. Zu Letzt werden die Ergebnisse diskutiert.

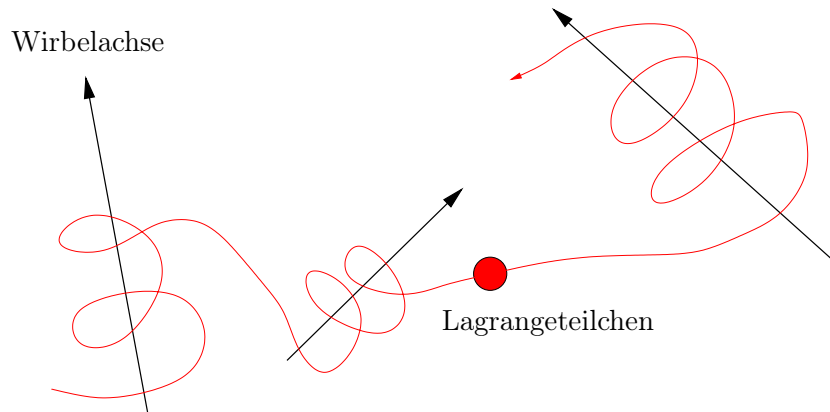
## 4.1 Die Idee

Wie in Kapitel 1 dargelegt wurde, zeigen experimentelle und numerische Untersuchungen dreidimensionaler turbulenter Strömungen die Signatur von Teilcheneinfängen in filamentartigen Wirbelstrukturen. In den Veröffentlichungen zum Thema werden intermittente Eigenschaften der Geschwindigkeitsinkrement- und Beschleunigungsstatistik immer wieder mit diesen Ereignissen in Zusammenhang gebracht, da während der Einfänge in die Wirbel extrem hohe Geschwindigkeiten und Beschleunigungen gemessen werden (siehe dazu [BBC<sup>+</sup>04b, BBC<sup>+</sup>05, MLP04, VLC<sup>+</sup>02] und Kapitel 1). Gleichzeitig zeigen die Trajektorien des Burgerswirbels in Kapitel 3 eine qualitative Ähnlichkeit mit den experimentell und numerisch beobachteten Einfangereignissen.

Heute existieren stochastische Modelle, die die genannten Verteilungsfunktion reproduzieren können (siehe z.B. [Fri03, FB02, Bau04, Bec06] oder [AM04] für einen Überblick) und somit wertvolle Einblicke in die statistischen Eigenschaften von Turbulenz geben. Allerdings berücksichtigen diese Modelle nicht die dynamischen Effekte, denen ein Lagrangeteilchen in einer Flüssigkeit unterliegt. Wie bereits in Kapitel 1 erwähnt, gab es in der Vergangenheit Versuche, Eigenschaften turbulenter Strömungen mit Hilfe von Ensembles kohärenter Strukturen zu modellieren. Zu erwähnen sind hier vor allem die Arbeit von Townsend [Tow51], der Wirbelröhren und -flächen nutzt, um Ausdrücke für das Energiespektrum herzuleiten. Eine zweiter wichtiger Beitrag gelang der Gruppe um Kambe [HK97], die mit Hilfe eines Ensembles von Burgerswirbeln das Verhalten der

---

<sup>1</sup>Das Dokument liegt auf der DVD bei.



**Abbildung 4.1:** Die Lagrangesche Teilchenbahn wird als zeitliche Sequenz von Wirbeleinfängen modelliert.

Eulerschen Strukturfunktionen untersuchten. Diese Arbeiten finden jedoch ausschließlich im Eulerschen Bild statt.

Unter diesen Voraussetzungen liegt es nahe, diese Ansätze auf die Lagrangesche Beschreibungsebene zu übertragen. Das soll in diesem Kapitel geschehen. Konkret bedeutet das, dass die Trajektorie eines Lagrangeschen Teilchens in voll entwickelter Turbulenz als zeitliche Sequenz von Wirbeleinfängen modelliert wird (siehe Abb. 4.1). Als „Bausteine“ dieser verschiedenen Ereignisse dienen die im letzten Abschnitt vorgestellten Burgerswirbel. Die Orientierung, die Zirkulation (im Folgenden auch als Wirbelstärke bezeichnet) und der *strain*-Parameter  $a$  werden dabei auf der Grundlage geeigneter Verteilungsfunktionen zufällig ausgewählt. Dabei werden die verschiedenen Einfänge als statistisch unabhängig angenommen. Der Übergang von einem zum anderen Wirbel geschieht einfach durch das Abschalten des einen und das Anschalten des anderen Wirbels. Die resultierenden Trajektorien werden qualitativ diskutiert und die statistischen Eigenschaften des Modells werden untersucht.

## 4.2 Numerische Implementierung

### Bewegungsgleichungen

Für die numerische Implementierung des Modells werden die Bewegungsgleichungen für ein Teilchen im Geschwindigkeitsfeld eines Burgerswirbel numerisch integriert. Dies geschieht mit dem in Anhang A vorgestellten Runge-Kutta-Algorithmus vierter Ordnung. Um beliebig orientierte Wirbel simulieren zu können, muss das Geschwindigkeitsfeld in koordinatensystemunabhängiger Form formuliert werden. In allgemeiner Form lautet es

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \frac{a}{2} \mathbf{v}_{rad} + a z \mathbf{e}_z + \frac{\Gamma}{2\pi r^2} \left( 1 - e^{-\frac{ar^2}{4\nu}} \right) \mathbf{v}_{tan}, \quad (4.1)$$

dabei sind der radiale Vektor  $\mathbf{v}_{rad}$  und der tangentielle Vektor  $\mathbf{v}_{tan}$  definiert über

$$\mathbf{v}_{tan} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{x} \quad \text{und} \quad \mathbf{v}_{rad} = \mathbf{e}_z \times \mathbf{v}_{tan}. \quad (4.2)$$

$r$  ist dabei die Länge des senkrechten Lotes des Ortsvektors  $\mathbf{x}$  auf die  $z$ -Achse  $\mathbf{e}_z$  (sie entspricht der Wirbelachse), und  $z$  ist gegeben durch  $z = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z$ . Es gilt für den Winkel zwischen dem lokalen Ortsvektor und der Wirbelachse

$$\alpha = \arccos \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_z}{|\mathbf{x}|} \quad (4.3)$$

und somit schließlich

$$r = |\mathbf{x}| \sin \alpha. \quad (4.4)$$

Die Wirbelstärke  $\Gamma$  und der *strain*-Parameter  $a$  werden zufällig gemäß den Überlegungen des folgenden Abschnitts gewählt. Dazu werden die Zufallsgeneratoren der Intel Math Kernel Library benutzt.<sup>2</sup>

### Wahl der Parameter

Bei dem in Abschnitt 3.4 vorgestellten Burgerswirbel handelt es sich zunächst um eine mathematische Lösung der Navier-Stokes-Gleichung mit frei wählbaren Parametern  $\Gamma$ ,  $a$  und  $\nu$ . So lässt sich beispielsweise mit dem Parameter  $\Gamma$  die Frequenz, mit der ein Teilchen um den Wirbel spiralt, einstellen, während der Parameter  $a$  die radiale Ausdehnung des Wirbels bestimmt und regelt, wie dominant die Bewegung entlang der Wirbelachse ist. Es gibt zunächst keinen Zusammenhang zwischen den Parametern und den typischen Eigenschaften von Wirbelstrukturen, wie sie in einer realen turbulenten Flüssigkeit beobachtet werden. Um ein physikalisch sinnvolles Modell zu schaffen, müssen also die Parameter in der Größenordnung der entsprechenden Größen in realen turbulenten Strömungen gewählt werden.

Der typische Radius eines Burgerswirbel wird im Modell mit  $10\eta$  angenommen, ein Wert, der mit den Beobachtungen in [MHK03] konsistent ist. In dieser Arbeit kommen die Autoren zu dem Ergebnis, dass die Länge der Wirbelfilamente von der Größenordnung der Systemausdehnung ist. Im Modell wird daher keine Beschränkung an die Länge der Wirbel gestellt. Weiterhin stellen die Autoren von [MHK03] fest, dass die Wirbel das Fluid nicht vollständig durchsetzen, sondern in einen zufälligen Hintergrundfluss eingebettet sind, sie füllen nur einen kleinen Teil des Volumens aus. Davidson gibt in [Dav04] für das von Wirbeln besetzte Volumen bei einer Reynoldszahl (auf der Taylorskala) von  $Re = 170$  einen Anteil von 13% an. Natürlich handelt es sich bei solchen Angaben immer um grobe Schätzungen, die auf Grundlage eines willkürlich gesetzten Schwellwertes zu Stande kommen. Im Modell ist diese Eigenschaft in dem Sinne zu berücksichtigen, dass nach dem Abschalten eines Wirbels in einem gewissen Abstand ein weiterer Wirbel anzuschalten ist. In dem vorgestellten Modell wird daher ein Volumenfaktor  $b = \frac{V_{Wirbel}}{V_{ges}}$

---

<sup>2</sup>Die hier beschriebene Routine wurde bereits in Abschnitt 3.4 benutzt, um die Trajektorien im Burgerswirbel zu berechnen.

eingeführt, um dieser Tatsache Rechnung zu tragen. Der Volumenfaktor gibt das Volumen eines einzelnen Wirbels im Verhältnis zum gesamten Volumen an, in dem sich nur ein Wirbel befinden soll. Nimmt man an, dass neben dem Wirbel auch die umgebende Zelle zylinderförmig und von der Höhe  $h$  ist, erhält man die Abschätzung

$$b = \frac{\pi r_B^2 h}{\pi r^2 h}, \quad (4.5)$$

was den typischen Radius des Burgerswirbels  $r_B$  mit dem gesuchten Abstand  $r$  zum nächsten Wirbel verknüpft,

$$r = \frac{1}{\sqrt{b}} r_B = \frac{10}{\sqrt{b}} \eta. \quad (4.6)$$

Im Modell wird  $b = 0.1$  gesetzt.

Die typische Lebenszeit eines Wirbels wird in [MHK03] im Bereich einiger *large eddy turnover times* angegeben. Für das vorliegende Modell ist jedoch die Dauer eines Einfangereignisses von Bedeutung. Diese Dauer definiert im Modell die Lebensdauer der Wirbel. Die Autoren von [BBC<sup>+</sup>04b] geben dafür etwa  $10 \tau_\eta$  an. Die passende Modellierung der Wirbellebensdauer ist im vorliegenden Modell besonders wichtig, da mit zunehmender Lebensdauer auch das *straining* eine immer dominantere Rolle gegenüber der Spiralbewegung um die Wirbelachse einnimmt. Die Lebensdauer der Burgerswirbel wird im Modell mit  $10 \tau_\eta$  angenommen.

Um realistische Größenordnungen der simulierten Geschwindigkeiten und von den Teilchen zurückgelegten Wege zu erreichen, und um zusätzlich zumindest eine qualitative Vergleichbarkeit mit experimentellen Daten zu gewährleisten, müssen alle Parameter in Abhängigkeit der kinematischen Viskosität  $\nu$  und der mittleren Energiedissipationsrate  $\varepsilon$  formuliert werden. Im Experiment ist  $\nu$  durch die verwendete Flüssigkeit vorgegeben, während unter der Annahme eines im gesamten Inertialbereich konstanten Energieübertrags  $\varepsilon$  durch die in das System gefütterte Energie gegeben ist. Für die Reynoldszahl auf der Dissipationsskala gilt die bekannte Abschätzung [Dav04]

$$\text{Re}_{\text{diss}} = \frac{\eta v}{\nu} \approx 1, \quad (4.7)$$

wobei es sich bei  $v$  um eine typische Geschwindigkeit auf der der Skala  $\eta$  handelt. Wie man mit Hilfe von Dimensionsüberlegungen herleiten kann, gilt für die Kolmogorovlänge und die Kolmogorovgeschwindigkeit (s. Kapitel 2)

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\varepsilon} \right)^{1/4} \quad \text{und} \quad v = (\varepsilon \nu)^{1/4}. \quad (4.8)$$

Um nun  $\Gamma$  und  $a$  mit diesen Größen in Verbindung zu bringen, muss eine typische Geschwindigkeit abgeschätzt werden. Es bietet sich die azimuthale Geschwindigkeitskomponente  $u_\varphi$  des Geschwindigkeitsfeldes des Burgerswirbel an der Stelle  $\eta$  an. Bricht man die Reihenentwicklung der Exponentialfunktion nach dem linearen Term ab, so ergibt sich ein einfacher Zusammenhang

$$v = u_\varphi(\eta) = \frac{\Gamma}{2\pi\eta} \left( 1 - e^{-\frac{a\eta^2}{4\nu}} \right) \approx \frac{\Gamma a \eta}{8\pi\nu}. \quad (4.9)$$

Zusammen mit der Definition der Kolmogorovlänge  $\eta$  ergibt sich

$$\Gamma \approx \frac{8\pi}{a} (\varepsilon\nu)^{1/2}. \quad (4.10)$$

Für den typischen Radius  $r_B$  des Burgerswirbel gilt

$$r_B = \left( \frac{4\nu}{a} \right)^{1/2}, \quad (4.11)$$

das bedeutet für den *strain*-Parameter

$$a = \frac{4\nu}{r_B^2}, \quad (4.12)$$

was sich wieder in die Abschätzung für die Wirbelstärke einsetzen lässt,

$$\Gamma \approx 2\pi r_B^2 \left( \frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} = 2\pi r_B^2 \frac{1}{\tau_\eta}, \quad (4.13)$$

wobei  $\tau_\eta$  die Kolmogorovsche Zeitskala bezeichnet. Bei einem typischen Wirbelradius von  $r_B = 10\eta$  folgt insgesamt für die Wirbelstärke

$$\Gamma \approx 200\pi\nu. \quad (4.14)$$

Wie bereits erwähnt, werden in experimentellen und numerischen Untersuchungen intermittente Eigenschaften der Geschwindigkeitsinkrementverteilungen mit Wirbeleinfängen in Zusammenhang gebracht. Der Burgerswirbel bietet zunächst zwei dynamische Einflüsse, die zu hohen Geschwindigkeiten führen können. Zum einen sind da die Oszillationen um die Wirbelachse, die durch den Parameter  $\Gamma$  kontrolliert werden, zum anderen gibt es den *strain*-Parameter  $a$ . Setzt man nun für die Größe des Wirbels den im Modell gewählten Wert von  $r_B = 10\eta$  ein, so erhält man unmittelbar

$$a = \frac{1}{25} \frac{1}{\tau_\eta}. \quad (4.15)$$

Da in den Exponentialfunktionen der Bewegungsgleichungen (3.83) das Produkt aus  $a$  und der Zeit vorkommt, lässt sich abschätzen, dass das *straining* eine untergeordnete Rolle spielt, solange die Lebensdauer kleiner als  $25\tau_\eta$  ist. Bei der für die Ergebnisse gewählten Lebensdauer von  $10\tau_\eta$  ist dies der Fall.

Insgesamt sind mit der Lebenszeit und den Parametern  $a$  und  $\Gamma$  alle notwendigen Größen spezifiziert und in Abhängigkeit der Viskosität und der mittleren Energiedissipation ausgedrückt worden. Um im Modell Wirbel verschiedener Stärke und Größe zuzulassen, werden  $\Gamma$  und  $a$  mit geeigneten Statistiken belegt. Die oben motivierten Werte dienen somit als Erwartungswerte der Statistiken. Einen Hinweis, wie die Verteilungsfunktion für die Wirbelstärke  $\Gamma$  zu wählen ist, gibt [JWSR93]. In dieser Arbeit wurde die Verteilungsfunktion der Zirkulation aus einer direkten numerischen Simulation bestimmt. Die dort



dargestellten Grafiken motivieren für das Modell die Wahl einer Lognormalverteilung für den Parameter  $\Gamma$ . Die Dichtefunktion dieser Verteilung ist gegeben durch

$$f(\Gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_L\Gamma} e^{-\frac{(\ln\Gamma - \mu_L)^2}{2\sigma_L^2}} \quad (4.16)$$

mit den wählbaren Parametern  $\mu_L$  und  $\sigma_L$ . Der Mittelwert und die Standardabweichung dieser Verteilung sind gegeben über

$$\mu = \exp\left(\mu_L + \frac{\sigma_L^2}{2}\right) \quad \text{und} \quad (4.17)$$

$$\sigma^2 = (\exp\sigma_L^2 - 1) \exp(2\mu_L + \sigma_L^2). \quad (4.18)$$

Der Parameter  $\sigma_L = 0.4$  wird so gewählt, dass sich die typische asymmetrische Form der Verteilungsfunktion aus [JWSR93] ergibt. Schließlich wird  $\mu_L$  so angepasst, dass  $\mu$  dem typischen Wert der Wirbelstärke gemäß den oben erbrachten physikalischen Argumenten entspricht.

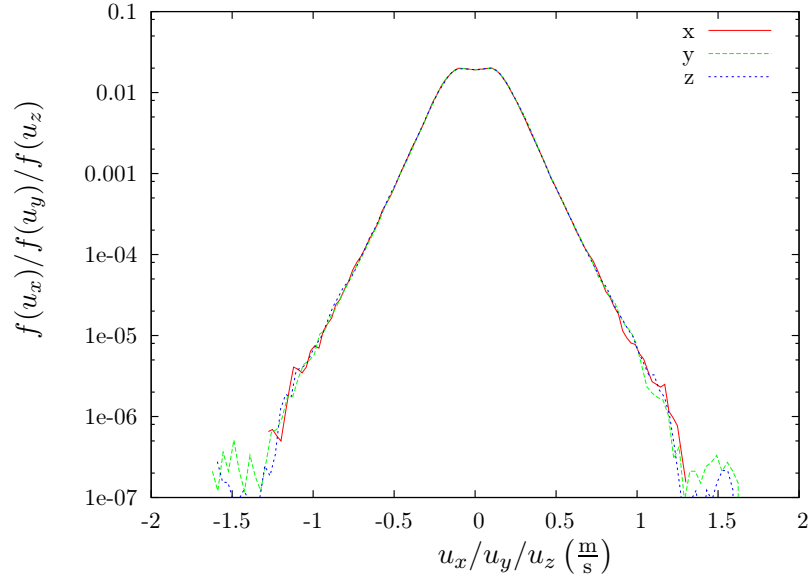
Für den Parameter  $a$  wurde keine vergleichbare Motivation in der Literatur gefunden. Da dieser Parameter jedoch den Wirbelradius festlegt, soll auch er fluktuieren können, um im Modell Wirbel unterschiedlicher Größe zuzulassen. Als Verteilung wird eine Normalverteilung angenommen, die um den oben motivierten typischen Wert von  $a$  zentriert ist. Zusätzlich wird eine Standardabweichung von  $\sigma_a = 1$  gewählt. Es wurde jedoch sichergestellt, dass eine Variation dieses Parameters keine signifikanten Einflüsse auf das Ergebnis hat.

## Entwicklung und Tests

Während der Entwicklung des Modells wurden zahlreiche Versuche und Tests durchgeführt. Deren detaillierte Dokumentation würde den Rahmen der vorliegenden Arbeit übersteigen, doch der interessierte Leser sei auf [Wil06] verwiesen.

Zum einen werden dort verschiedene numerische Werte für die Parameter  $a$  und  $\Gamma$  untersucht. Es ergibt sich, dass die vorliegenden Ergebnisse robust gegen leichte Änderungen der Parameterwerte sind, solange diese in einem physikalisch sinnvollen Bereich gewählt werden. Desweiteren werden unterschiedliche Verteilungsfunktionen für  $a$  und  $\Gamma$  untersucht. Eine Variation der Verteilungsfunktionen für  $a$  und  $\Gamma$  lässt nicht den Schluss zu, dass die im Folgenden gewählten die einzig möglichen sind. Lediglich ein Modell mit festem  $a$  und  $\Gamma$  lieferte unzureichende Ergebnisse. Auf Grundlage dieser Tests kann man jedoch behaupten, dass die vorliegenden Werte für die Parameter und die Wahl der Statistiken physikalisch begründbar sind und im Vergleich mit anderen qualitativ die besten Ergebnisse liefern.

Im Folgenden sollen einige der durchgeführten Tests vorgestellt werden. Die Orientierung der Wirbelachsen wird im Programm beliebig und gleichverteilt gewählt. Die statistischen Ergebnisse sollten also isotrop sein. Abbildung 4.2 demonstriert dies am Beispiel der Geschwindigkeitskomponenten. Wie man sieht, ist die Isotropie gut erfüllt.

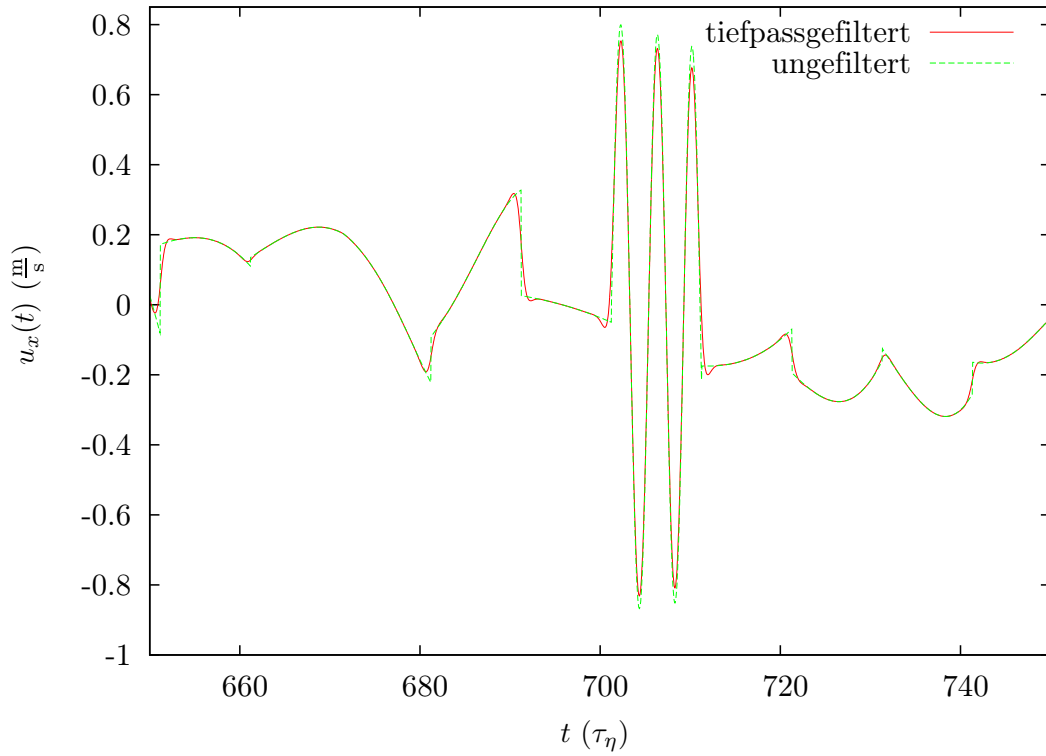


**Abbildung 4.2:** Isotropie der Geschwindigkeitskomponenten im Modell.

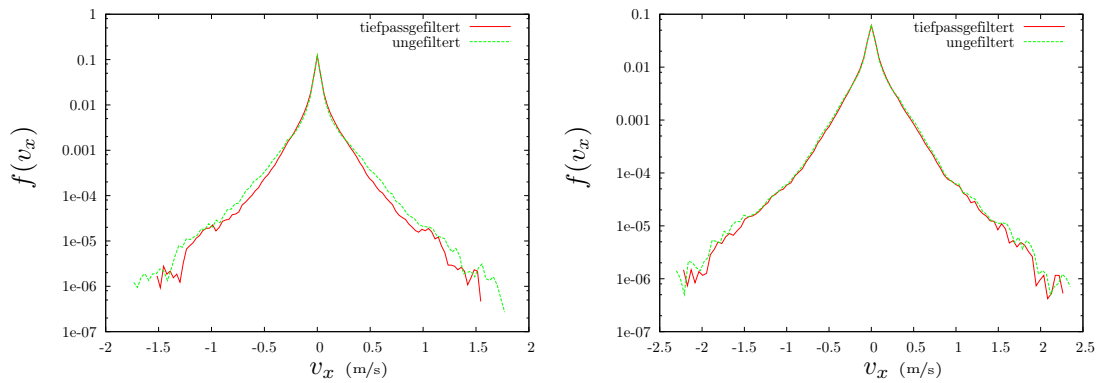
Ein wichtiger Test betrifft die Wirbelwechsel. Wie erläutert wird der Wechsel zwischen zwei Wirbeln durch ein einfaches Abschalten des alten und ein Anschalten des neuen Wirbels simuliert. Dadurch werden die Geschwindigkeitskomponenten beim Wechsel unstetig. Um zu quantifizieren, inwieweit diese Unstetigkeiten die Statistik beeinflussen, wurde eine Simulation mit  $2^{21}$  Iterationen durchgeführt und die Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  tiefpassgefiltert. Die Unstetigkeitsstellen verursachen im Fourierraum hohe Frequenzanteile und können somit durch Filtern dieser Frequenzen geglättet werden. Nach der Rücktransformation in den Realraum ist das Signal dann erheblich glatter. Als Filter wurde ein Butterworthfilter verwendet. Dieser Filter hat gegenüber einem idealen Tiefpassfilter den Vorteil, dass er eine glatte Filtercharakteristik besitzt und somit die sonst auftretenden Überschwinger im rücktransformierten Signal unterdrückt. Die Filterfunktion für ein Butterworthfilter  $n$ -ter Ordnung ist im Fourierraum definiert über

$$B(k) = \frac{1}{1 + \left(\frac{k}{k_0}\right)^{2n}}. \quad (4.19)$$

Für den Test wurde  $n = 2$  und als Abschneidewellenzahl  $k_0 = 5 \cdot 10^4$  gewählt. Ein typisches Geschwindigkeitssignal ist in Abbildung 4.3 zu sehen. Im Ergebnis glättet die Filterung die Unstetigkeitsstellen, erhält dabei jedoch die wesentlichen Charakteristika des Signals. Der Einfluss auf die Geschwindigkeitsinkrementstatistik ist in Abbildung 4.4 zu sehen. So sind die Inkrementverteilungsfunktionen für eine kleine Zeitdifferenz im gefilterten Fall etwas weniger intermittent, für eine etwas größere Zeitdifferenz sind bereits keine Unterschiede mehr zu erkennen. Dieser Test zeigt, dass die Unstetigkeitstellen keinen signifikanten Einfluss auf die statistischen Ergebnisse haben. Für die Ergebnisse



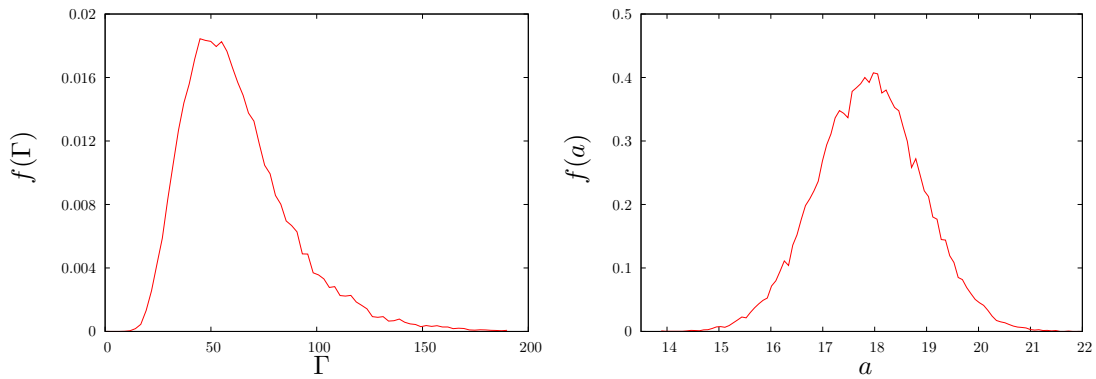
**Abbildung 4.3:** Tiefpassgefilterte Geschwindigkeitskomponente. Bei einer passend gewählten Abschneidewellenzahl glättet der Tiefpassfilter die Unstetigkeitsstellen, ohne die starken Fluktuationen während eines starken Wirbeleinfangs signifikant zu verfälschen.



**Abbildung 4.4:** Tiefpassgefilterte Geschwindigkeitsinkrementverteilungen für  $v_x$ . Links:  $\tau \approx 1\tau_\eta$ , rechts:  $\tau \approx 2\tau_\eta$ . Für eine kleine Zeitdifferenz sind Abweichungen zu erkennen, aber schon ab  $\tau \approx 2\tau_\eta$  sind die Verteilungsfunktionen nahezu identisch.

Parameter	Wert
$\nu$	$0.1 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
$\varepsilon$	$2 \cdot 10^4 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}^3}$
$\mu_a$	$17.89 \frac{1}{\text{s}}$
$\sigma_a$	1.0
$\mu_\Gamma$	$62.83 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$
$\sigma_{L,\Gamma}$	0.4
Zeitschritt dt	0.0001 s
$b$	0.1
Lebensdauer	$10 \tau_\eta$
Anzahl Wirbel	44643
Iterationen	$10^7$

**Tabelle 4.1:** Parameterwerte für das Modell. Die Wahl von Nicht-SI-Einheiten hat lediglich numerische Gründe.



**Abbildung 4.5:** Verteilungsfunktionen für  $\Gamma$  und  $a$ . Für  $\Gamma$  wird eine Lognormalverteilung gewählt,  $a$  ist normalverteilt.

des folgenden Abschnittes wurde daher auf eine Tiefpassfilterung verzichtet. Für die folgenden Ergebnisse soll nun noch ein Überblick über die Parameter gegeben werden, diese sind in Tabelle 4.1 aufgelistet. Abbildung 4.5 zeigt die in der Simulation zur Verwendung kommenden Verteilungsfunktionen für die Parameter  $\Gamma$  und  $a$ .

## 4.3 Ergebnisse

Nachdem alle für das Modell wichtigen Spezifikationen festgelegt worden sind, werden im Folgenden die numerischen Ergebnisse vorgestellt.

### Trajektorien

Abbildung 4.6 zeigt einen Ausschnitt aus der dreidimensionalen Trajektorie sowie zeit-aufgelöst die  $x$ - und  $u_x$ -Komponente der Trajektorie. Man sieht, wie die ständigen Wirbelwechsel zu einer verschlungenen Bahn führen. Teilweise sind deutliche Spiralabschnitte zu erkennen, welche von Wirbeln hoher Zirkulation herrühren. Bei schwächeren Wirbeln führt das Teilchen keine Spiralbahn aus, sondern bewegt sich eher geradlinig. Besonders in den zeitaufgelösten Komponenten sind Abschnitte zu erkennen, in denen sich das Lagrangeteilchen in einem schwachen Wirbel befindet oder weit entfernt von der Wirbelachse ist. Ein Einfang in einem Wirbel hoher Stärke schlägt sich in den typisch oszillierenden Komponenten nieder. An dieser Stelle bietet sich ein Vergleich mit den experimentellen bzw. numerischen Daten an. Vergleicht man die vorgestellte Trajektorie mit den Abbildungen 1.2, 1.5 und 1.6, so sind deutlich qualitative Ähnlichkeiten zu erkennen. Wie auch bei den dort dargestellten Trajektorien, zeigt das Modell Abschnitte ohne extreme Ereignisse, die sich mit Perioden starker Oszillation abwechseln.

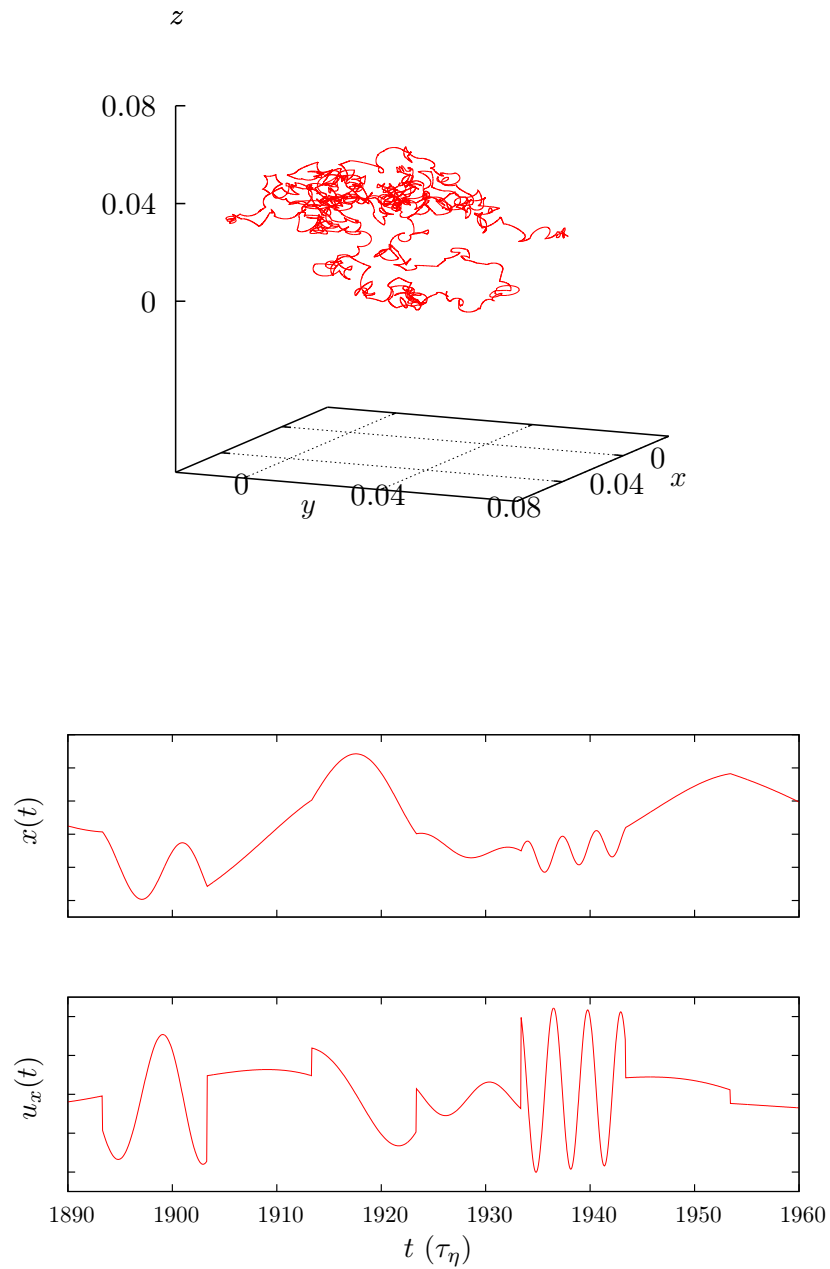
### Statistische Größen

#### Verteilungsfunktionen

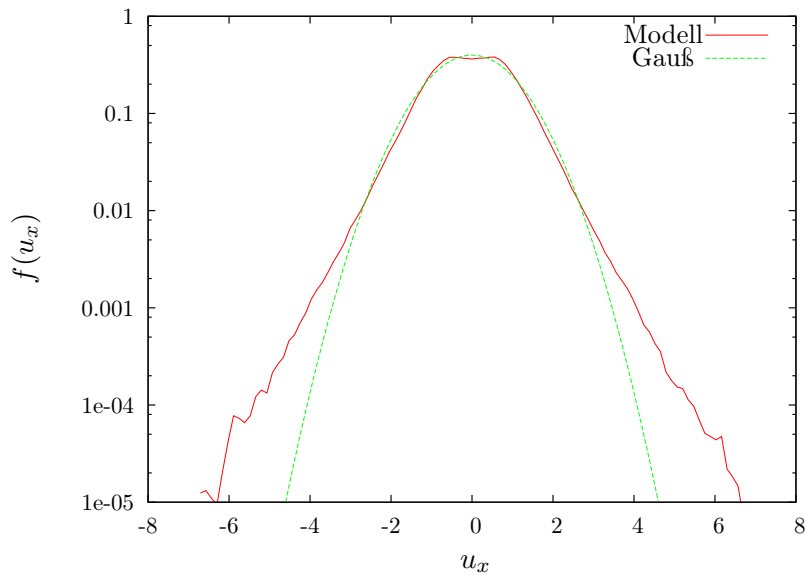
Als nächstes wird ein Blick auf die Geschwindigkeitsverteilung und die Geschwindigkeitsinkrementverteilungen geworfen. Alle in diesem Abschnitt vorgestellten Verteilungsfunktionen sind auf  $\sigma = 1$  und  $\mu = 0$  normiert, um eine Vergleichbarkeit der funktionalen Form zu gewährleisten.

In Abbildung 4.7 wird die Verteilungsform von  $u_x$  im Vergleich zu einer Gaußverteilung dargestellt. Die Verteilungsfunktion des Modells hat etwas stärkere Flügel als eine Gaußverteilung und ein lokales Minimum bei  $u_x \approx 0$ . Das Modell zeigt also leichte Abweichungen von der in realer Turbulenz beobachteten Gaußverteilung der Geschwindigkeitskomponenten. Das stellt allerdings kein Problem dar, da auf die korrekte Modellierung dieser Größe kein Wert gelegt wurde.

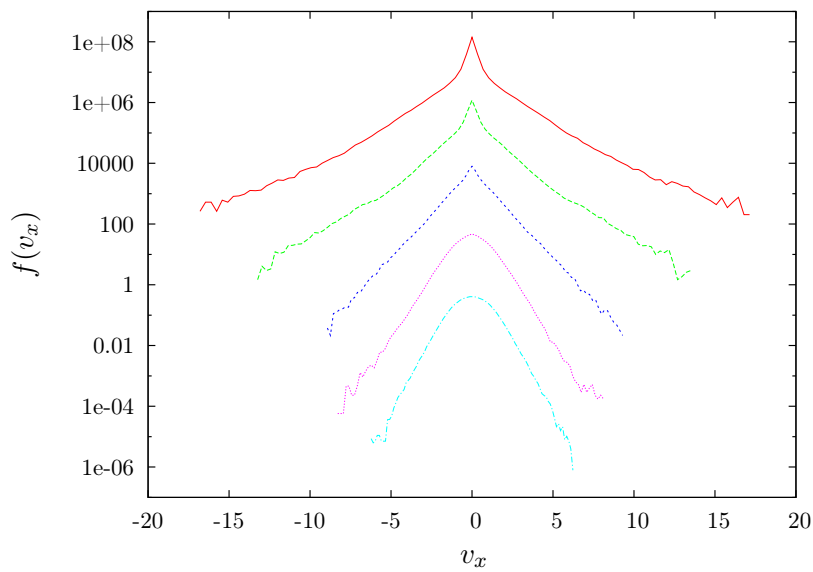
Von Interesse ist hingegen die Frage, ob dieses Modell die in turbulenten Strömungen beobachtete Intermittenz aufweist. Dazu werden die Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente  $v_x(\tau) = u_x(t + \tau) - u_x(t)$  untersucht, die in Abbildung 4.8 zu sehen sind. Deutlich zu erkennen ist ein Übergang von einer stark intermittenten Form für kleine Zeitinkremente zu einer eher gaußischen Form für große Zeitdifferenzen. Im Vergleich dieses Ergebnisses mit den experimentellen und numerischen Ergebnissen aus Kapitel 1 (siehe Abbildungen 1.2, 1.5 und 1.6) lässt sich eine gute qualitative Übereinstimmung feststellen. Somit reproduziert das Modell eine wichtige Charakteristik turbulenter Strömungen, die Intermittenz. Darüberhinaus zeigt es, dass Intermittenz mit



**Abbildung 4.6:** Trajektorie in einer Sequenz aus Burgerswirbeln. Oben: Gezeigt werden die ersten  $10^5$  Datenpunkte der Simulation (Achsen­einheit: m). Unten: In den einzelnen Komponenten lässt sich gut der Einfluss eines starken Wirbels erkennen.



**Abbildung 4.7:** Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  im Vergleich zu einer Gaußverteilung.



**Abbildung 4.8:** Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsinkremente  $v_x$ . Die Verteilungsfunktionen sind aus Darstellungsgründen vertikal verschoben. Von oben nach unten:  $\tau \in \{0.98, 1.97, 3.94, 7.87, 15.74\} \tau_\eta$ . Die Verteilungsfunktionen zeigen einen Übergang von stark intermittenter Form hin zu einer eher gaußischen Form.

kohärenten Strukturen in Zusammenhang gebracht werden kann, wie auch in den zahlreichen Veröffentlichungen, die in Kapitel 1 zitiert werden, vermutet wird. Die für das Auftreten von Intermittenz nötigen „extremen Ereignisse“ finden in diesem Modell drei mögliche Ursachen:

- die Spiralbewegung im Wirbel,
- die Bewegung aufgrund des *strain*-Feldes entlang der Wirbelachse,
- plötzliche Wirbelwechsel.

Wie im Abschnitt 4.4 gezeigt wird, lässt sich die Struktur der Verteilungsfunktionen auf das Punktwirbelkonzept zurückführen, das in Abschnitt 3.1 untersucht wurde. Dort wurde gezeigt, dass sich bei einer Mittelung über eine Menge von Lagrangeteilchen hochgradig nichtgaußische Verteilungsfunktionen ergeben, die die typischen breiten Flügel zeigen. Zwar wird im vorgestellten Modell nicht über eine Menge von Lagrangeteilchen gemittelt, jedoch durchläuft das Lagrangeteilchen viele Wirbel auf unterschiedlichen Abständen zur Wirbelachse. Zusätzlich hat es aufgrund des *strain*-Feldes auch immer einen radialen Geschwindigkeitsanteil, der dafür sorgt, dass das Teilchen kontinuierlich seine Winkelgeschwindigkeit ändert. Im Ergebnis führen diese beiden Einflüsse auf eine zu einer dem Mittelungsprozess beim Punktwirbel vergleichbaren Situation.

Dass durch die Bewegung entlang der Wirbelachse hohe Geschwindigkeitsinremente erzeugt werden, kann bei der vorliegenden Wahl der Parameter ausgeschlossen werden, wie in Abschnitt 4.2 erläutert wurde. Die Wahl der Lebensdauer der Wirbel auf  $10\tau_\eta$  sorgt dafür, dass dieser Effekt subdominant bleibt.

Als letzte Möglichkeit muss man die plötzlichen Wechsel zwischen zwei Wirbeln als Ursache für Intermittenz in Betracht ziehen. Wie in Abschnitt 4.2 gezeigt wurde, können die Unstetigkeitsstellen als Ursache ausgeschlossen werden, jedoch bleiben auch nach der Tiefpassfilterung bei den Wirbelwechseln starke Änderungen im Geschwindigkeitssignal erhalten, die teilweise zu hohen Werten für das Geschwindigkeitsinkrement führen können. Wie in Bild 4.6 gezeigt wird, sorgen die Oszillationen während eines Einfangs in einen starken Wirbel für die höchsten Werte für die Geschwindigkeitskomponente, und führen somit auch potentiell zu den höchsten Werten in den Inkrementen.

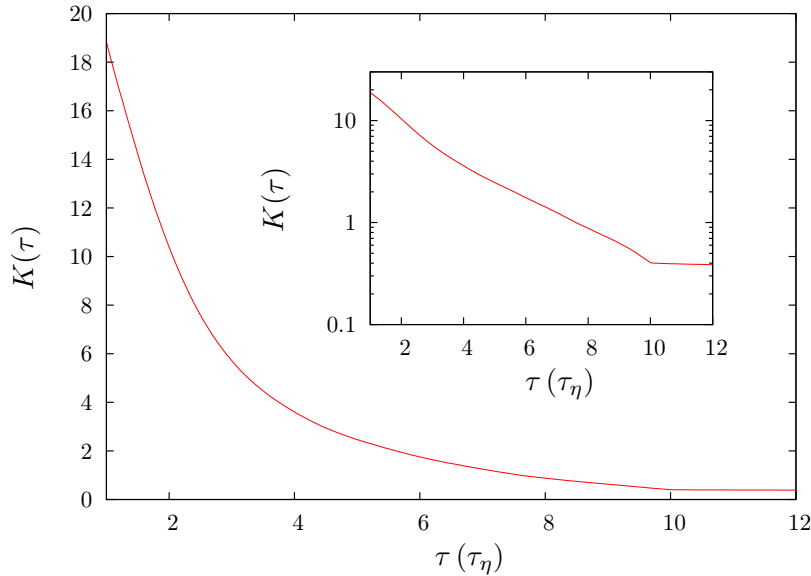
### Kurtosis

Um weiter den Übergang der Verteilungsfunktionen von starken Flügeln hin zu eher gaußischen Verteilungsfunktionen zu charakterisieren, wird die Kurtosis der Geschwindigkeitsinkrementverteilungen untersucht. Wir definieren die Kurtosis über

$$K(\tau) = \frac{\langle v_x(\tau)^4 \rangle}{\langle v_x(\tau)^2 \rangle^2} - 3. \quad (4.20)$$

Die Kurtosis ist in Abbildung 4.9 dargestellt. Sie zeigt einen exponentiellen Abfall von hohen Werten, die für Verteilungsfunktionen mit weiten Flügeln typisch sind, bis fast



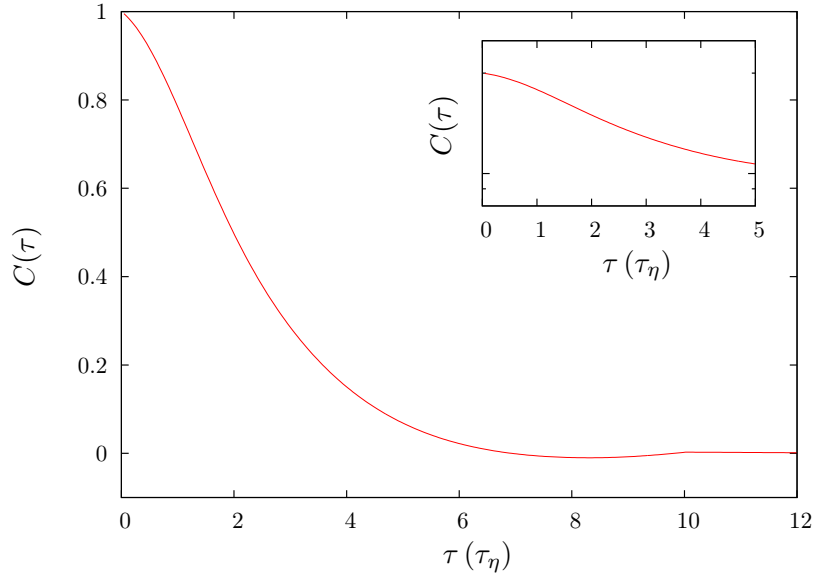


**Abbildung 4.9:** Kurtosis der Geschwindigkeitsinkrementverteilungen. Die Kurtosis fällt von hohen Werten innerhalb von  $10\tau_\eta$  fast bis auf den für eine Gaußverteilung typischen Wert von Null. Inlet: Der logarithmische Plot zeigt den nahezu exponentiellen Abfall der Kurtosis.

zu einem Wert von Null, der für Gaußverteilungen angenommen wird. Nach  $10\tau_\eta$ , der Lebenszeit eines einzelnen Wirbels im Modell, hat die Kurtosis dann einen in etwa konstanten Wert. Wie Abbildung 4.8 zeigt, finden sich in diesem Bereich die nahezu gaußförmigen Verteilungsfunktionen.

### Autokorrelationsfunktion

Abbildung 4.10 zeigt die Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$ . Auch diese zeigt einen Abfall innerhalb von  $10\tau_\eta$ . Nach etwa  $7\tau_\eta$  zeigt die Autokorrelationsfunktion einen Nulldurchgang und anschließend leichte Antikorrelationen. Physikalisch lassen sich diese erklären, wenn man in Betracht zieht, dass das Lagrangeteilchen in starken Wirbeln eine oder mehrere volle Oszillationen durchführt. Nach einer halben Periode ist das Geschwindigkeitssignal dann völlig antikorreliert, was negativ zur Autokorrelationsfunktion beiträgt. Nach  $10\tau_\eta$  ist das Geschwindigkeitssignal dann vollkommen dekorreliert, was dadurch zu Stande kommt, dass ein neuer Wirbel angeschaltet wird. Da dieser gegenüber dem alten Wirbel zufällig orientiert wird und zufällige Werte für  $a$  und  $\Gamma$  besitzt, ist für diese Zeitdifferenz  $\tau$  das Geschwindigkeitssignal  $u_x(t + \tau)$  statistisch unabhängig vom Geschwindigkeitssignal  $u_x(t)$ . Zusätzlich zu diesen Erklärungen für den funktionalen Verlauf der Geschwindigkeitsautokorrelationsfunktion muss der Dephasierungseffekt, der im Zusammenhang mit dem Punktwirbel in Abschnitt 3.1 besprochen wurde, beachtet werden. Im vorliegenden Modell sorgt die radiale Bewegung des Teilchens für eine sich kontinuierlich ändernde Winkelgeschwindigkeit, was, wie erläutert,



**Abbildung 4.10:** Autokorrelationsfunktion für  $u_x$ . Nach  $10 \tau_\eta$  ist das Signal vollkommen de-korreliert.

auch zu einer abfallenden Autokorrelationsfunktion führen kann.

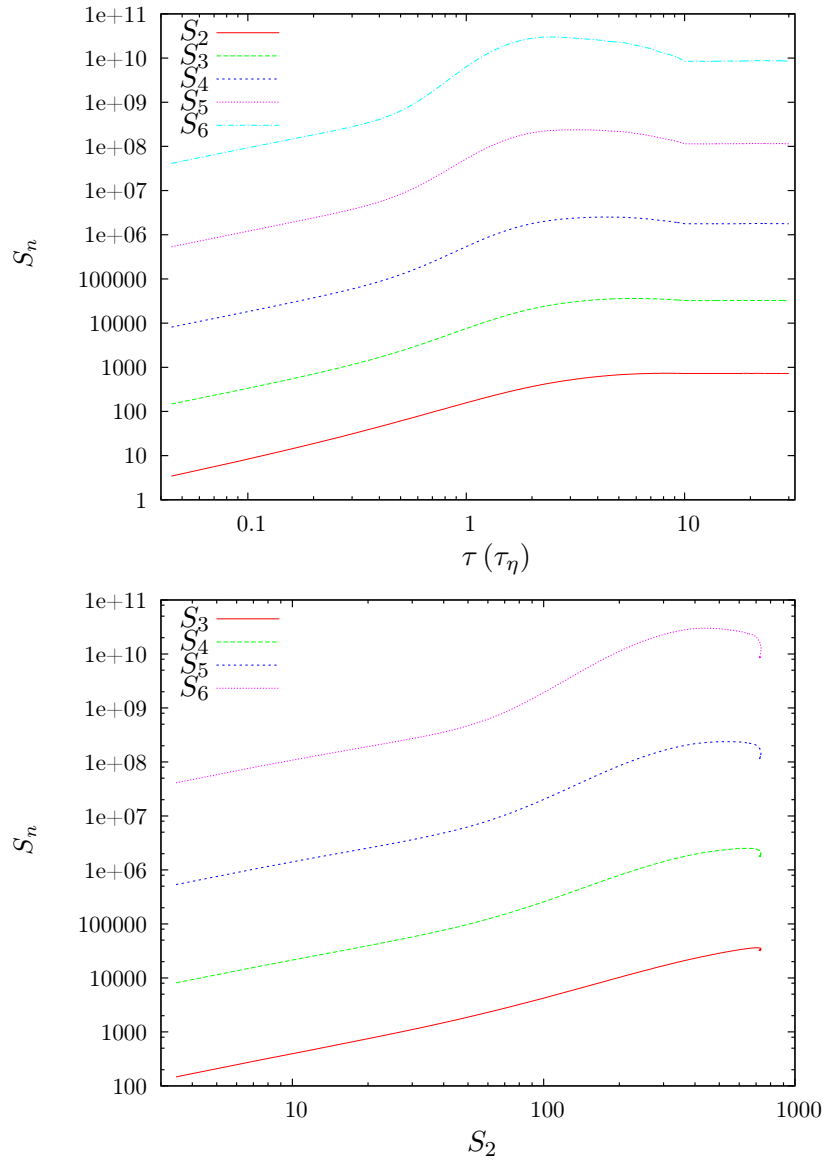
Die Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente zeigen also für *die* Zeitdifferenzen  $\tau$  eine nahezu gaußische Form, für die das Geschwindigkeitssignal de-korreliert ist. Als Begründung liegt nahe, dass das Inkrement  $v_x(\tau) = u_x(t + \tau) - u_x(t)$  aufgrund der statistischen Unabhängigkeit von  $u_x(t + \tau)$  und  $u_x(t)$  ab einer Zeitdifferenz von  $10 \tau_\eta$  zu einer Zufallsgröße geworden ist, obwohl  $u_x(t + \tau)$  und  $u_x(t)$  jeweils deterministischen Bewegungsgleichungen gehorchen. Durch die Überlagerung vieler solcher Zufallsgrößen durch die zeitliche Sequenz von Burgerswirbeln führt das, ähnlich wie mathematisch im zentralen Grenzwertsatz formuliert, zu einer Gaußverteilung. Natürlich ist das in dieser Form vorgebrachte Argument nicht mathematisch streng, eine strenge Herleitung ist für dieses Modell allerdings bisher nicht gelungen.

### Strukturfunktionen

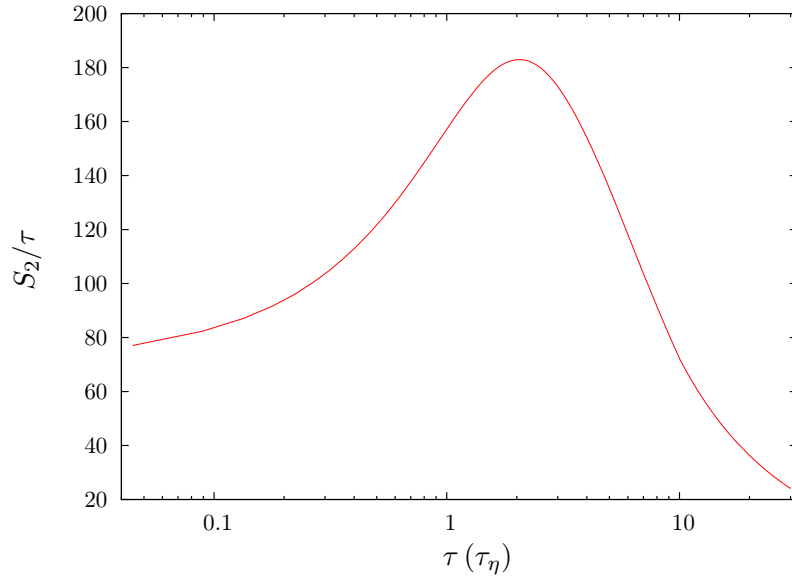
Bei den Strukturfunktionen handelt es sich um die Momente der Geschwindigkeitsinkrementverteilungsfunktionen.

$$S_n(\tau) = \langle |v_x(\tau)|^n \rangle \tag{4.21}$$

bezeichnet die Strukturfunktion  $n$ -ter Ordnung. In Abbildung 4.11 werden einige Strukturfunktionen in Abhängigkeit der Zeitdifferenz  $\tau$  und unter Ausnutzung der *extended self-similarity* [BCT<sup>+</sup>93] abgebildet. Die Strukturfunktionen zeigen keinen ausgeprägten Skalierungsbereich, so dass im vorliegenden Modell kein klarer Inertialbereich definiert werden kann. Nach  $10 \tau_\eta$  saturieren die Strukturfunktionen, was mit einem einfachen Argument zu verstehen ist. Über die Definition des Geschwindigkeitsinkrements kann man



**Abbildung 4.11:** Strukturfunktionen im Modell ( $y$ -Achse in willkürlichen Einheiten). Oben: Die Strukturfunktionen zeigen keinen ausgeprägten Skalierungsbereich. Unten: Auch unter Ausnutzung der *extended self-similarity* [BCT<sup>+</sup>93] ist kein deutlicher Skalierungsbereich zu erkennen, vgl. Abb. (4.12).



**Abbildung 4.12:** Kompensierte zweite Strukturfunktion im Modell. Es zeigt sich kein Plateau.

den Ausdruck für die zweite Strukturfunktion leicht umformen zu

$$S_2(\tau) = \langle u_x(t + \tau)^2 + u_x(t)^2 + 2u_x(t + \tau)u_x(t) \rangle. \quad (4.22)$$

Aufgrund der Stationarität der Zeitreihe der Geschwindigkeitskomponente erhält man  $\langle u_x(t + \tau)^2 \rangle = \langle u_x(t)^2 \rangle$ . Wie die Untersuchung der Autokorrelationsfunktion gezeigt hat, gilt für  $\tau > 10 \tau_\eta$  jedoch  $\langle u_x(t + \tau)u_x(t) \rangle \approx 0$ , sodass insgesamt folgt

$$S_2 \approx 2\langle u_x^2 \rangle \quad \text{für} \quad \tau > 10 \tau_\eta. \quad (4.23)$$

Um das Fehlen eines ausgeprägten Inertialbereiches weiter zu dokumentieren, wird in Abbildung 4.12 die kompensierte zweite Strukturfunktion gezeigt. Wäre ein Skalierungsbereich vorhanden, so müsste sich in dieser Darstellung ein Plateau zeigen, was nicht der Fall ist. Interessanterweise sind jedoch dem Verfasser weder Experimente noch Simulationen bekannt, in denen das Skalierungsverhalten zweifelsfrei nachgewiesen werden konnte. Vielmehr zeigt die Abbildung 4.12 qualitative Ähnlichkeit mit der entsprechenden Abbildung in [MMMP01]. Die Frage nach der Existenz eines solchen Inertialbereiches ist Gegenstand aktueller Diskussionen in der Fachliteratur.

## 4.4 Analytische Beschreibungsansätze

Die vorgestellten numerischen Ergebnisse können durch einige analytische Rechnungen ergänzt werden, wie im Folgenden erläutert wird.

### Struktur der Verteilungsfunktionen

Die Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente können etwas genauer untersucht und mit den Berechnungen zum Punktwirbel (Abschnitt 3.1) in Verbindung gebracht werden. Für kleine Zeiten findet im Modell kein Wechsel zwischen zwei Wirbeln statt. Dementsprechend kann die Verteilungsfunktion für kurze Zeitinkremente aus einem einzelnen Wirbel berechnet werden. Um die im Modell beobachteten Verteilungsfunktionen zu erhalten, muss dann schließlich über die vorkommenden Parameter gemittelt werden.

Für den Fall, dass die Wirbelachse der  $z$ -Achse entspricht, gilt für die  $x$ -Komponente der Position eines Lagrangeteilchens

$$x(t) = r_0 e^{-\frac{a}{2}t} \cos \varphi(t), \quad (4.24)$$

dabei bezeichnet  $r_0$  den radialen Abstand zum Wirbel zum Startzeitpunkt und  $\varphi(t)$  ist durch die Lösung der Bewegungsgleichungen (3.83) für ein Lagrangeteilchen im Burgerswirbel gegeben. Da die Parameterwahl einen kleinen Wert für den *strain*-Parameter  $a$  vorsieht und die Rechnung für kleine Zeiten gelten soll, wird die Exponentialfunktion durch Eins angenähert. Weil das Integral zur Bestimmung von  $\varphi(t)$  nicht geschlossen angegeben werden kann, setzen wir  $\varphi(t) = \omega t$ , wobei es sich bei  $\omega$  um eine genäherte Winkelgeschwindigkeit handelt. Für große Entfernungen zur Wirbelachse lässt sich die Winkelgeschwindigkeit mit der des Punktwirbels nähern,  $\omega = \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2}$ . Alternativ kann man die in Abschnitt 3.4 hergeleitete Langzeitnäherung (3.88) benutzen. Diese Näherung entspricht dem Fall, dass sich das Teilchen nahe an der Wirbelachse befindet. Damit lautet die Gleichung für die Position des Teilchens

$$x(t) = r_0 \cos \omega t. \quad (4.25)$$

Durch Differentiation erhält man unmittelbar die Geschwindigkeits- und die Beschleunigungskomponente

$$u_x(t) = -r_0 \omega \sin \omega t \quad (4.26)$$

$$a_x(t) = -r_0 \omega^2 \cos \omega t. \quad (4.27)$$

Für das Geschwindigkeitsinkrement ergibt sich unter Ausnutzung eines Additionstheorems

$$v_x(\tau) = -2r_0 \left| \sin \frac{\omega\tau}{2} \right| \sin(\omega\tau + \psi) \equiv A \sin(\omega\tau + \psi), \quad (4.28)$$

mit einer Phase  $\psi$ , die von den Anfangsbedingungen abhängt. Man kann nun analog zu den statistischen Rechnungen im Falle des Punktwirbels in Abschnitt 3.1 über die

Phase des Arguments mitteln und erhält für das Geschwindigkeitsinkrement eine formal ähnliche Elementarverteilung. Für den Fall  $v_x < A$  erhält man

$$\langle v_x(\tau) \rangle = \frac{1}{\pi \sqrt{A^2 - v_x^2}}. \quad (4.29)$$

Weiter muss man über die Parameter  $\Gamma$ ,  $a$  und die Anfangspositionen  $r_0$  mitteln, da in der Sequenz aus Burgerswirbeln jeder Wirbel mit unterschiedlichen Parametern versehen ist. Setzt man für  $\Gamma$ ,  $a$  und  $r_0$  die Verteilungsfunktionen  $f(\Gamma)$ ,  $g(a)$  und  $h(r_0)$  an, so erhält man für die Inkrementverteilungsfunktionen

$$f(v_x) = \Re \left\{ \int \frac{f(\Gamma)g(a)h(r_0) d\Gamma da dr_0}{\pi \sqrt{4r_0^2 \sin^2\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) - v_x^2}} \right\}. \quad (4.30)$$

Das offenbart, dass sich die Inkrementverteilungsfunktionen, formal ähnlich wie beim Punktwirbel, aus der Überlagerung der Elementarverteilungen, gewichtet mit den Verteilungsfunktionen für die physikalischen Parameter des Modells, ergeben. Ganz analog lässt sich ein Ausdruck für die Verteilungsfunktion der Beschleunigungskomponente  $a_x$  ableiten. Man erhält

$$f(a_x) = \Re \left\{ \int \frac{f(\Gamma)g(a)h(r_0)}{\pi \sqrt{r_0^2 \omega^4 - a_x^2}} d\Gamma da dr_0 \right\}. \quad (4.31)$$

Auch dieser Ausdruck zeigt, dass es sich bei der Gesamtstatistik um eine Überlagerung der verschiedenen Elementarverteilungen handelt. Formal kann man nun einen Schritt weiter gehen und die Momente dieser beiden Verteilungsfunktionen berechnen. Unter der Voraussetzung, dass man das Produkt der Verteilungsfunktionen zu einer Funktion

$$F(\zeta) := f(\Gamma)g(a)h(r_0), \quad (4.32)$$

zusammen fassen kann, sind bei geeigneter Wahl der Variablen  $\zeta$  die Verteilungsfunktionen für  $v_x$  und  $a_x$  beide von der Form

$$f(\xi) = \Re \left\{ \int \frac{F(\zeta)}{\sqrt{\zeta - \xi^2}} d\zeta \right\}. \quad (4.33)$$

Das  $n$ -te Moment dieser Verteilungsfunktionen berechnet sich gemäß

$$\langle \xi^n \rangle = \int d\xi \xi^n f(\xi). \quad (4.34)$$

Bezüglich  $\xi$  handelt es sich um eine gerade Funktion, über die bei der Momentenberechnung in symmetrischen Grenzen integriert wird. Die ungeraden Momente verschwinden also, und man erhält

$$\langle \xi^{2n} \rangle = \int F(\zeta) d\zeta \underbrace{\int_0^{\sqrt{\zeta}} d\xi \frac{\xi^{2n}}{\sqrt{\zeta - \xi^2}}}_{I(\zeta)}. \quad (4.35)$$

Durch die Substitution  $\varrho = \xi^2$  erhält man

$$I(\zeta) = \frac{1}{2} \int_0^\zeta d\varrho \frac{\varrho^{n-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\zeta-\varrho}}, \quad (4.36)$$

was sich als eine Faltung  $f_1 * f_2$  der Funktionen  $f_1 = \zeta^{n-\frac{1}{2}}$  und  $f_2 = \zeta^{-\frac{1}{2}}$  auffassen lässt. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass sich eine Faltung im Laplaceraum zu einer Multiplikation vereinfacht, lässt sich das vorliegende Integral durch eine Laplace-Transformation lösen und man erhält

$$I(\zeta) = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \zeta^n. \quad (4.37)$$

Für die Momente bedeutet dies insgesamt

$$\langle \xi^{2n} \rangle = \frac{(2n)! \pi}{(n!)^2 2^{2n+1}} \langle \zeta^n \rangle. \quad (4.38)$$

Dadurch wird ein Zusammenhang zwischen den Momenten der Verteilungsfunktionen für  $v_x$  bzw.  $a_x$  und den Momenten der Verteilungsfunktionen für die physikalischen Parameter hergestellt. Im Falle der Punktwirbelnäherung für das Geschwindigkeitsfeld gilt dann  $\zeta = \left(\frac{\Gamma}{2\pi}\right)^4 \frac{1}{r_0^6}$  und man kann identifizieren

$$\langle a_x^{2n} \rangle \sim \langle \Gamma^{4n} \rangle, \quad (4.39)$$

wobei die Mittelungsklammern sich nur auf den Parameter  $\Gamma$  beziehen, und die Mittelung über  $r_0$  noch durchzuführen ist. Analog kann man für die Inkremente ableiten

$$\langle v_x(\tau)^{2n} \rangle \sim \langle \Gamma^{2n} \sin^{2n} \frac{\Gamma\tau}{4\pi r_0^2} \rangle. \quad (4.40)$$

Diese Ausdrücke zeigen den direkten Zusammenhang zwischen den statistisch gesuchten Größen und den Parametern, die in das Modell eingehen.

### Ein Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeit

Das Hintereinanderschalten der verschiedenen Wirbel im Modell lässt sich als eine iterative Abbildung auffassen. Für die Übergangswahrscheinlichkeit eines Teilchens von einem Ort zum nächsten kann ein Ausdruck mittels der Frobenius-Perron-Gleichung gefunden werden, was im Folgenden erläutert wird.

Das Durchlaufen eines Wirbels wird als Abbildung aufgefasst, die auf den Ortsvektor eines Teilchens wirkt. In Matrixschreibweise ist diese Abbildung gegeben durch

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(t) &= \begin{pmatrix} e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \varphi(t) & e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \varphi(t) & 0 \\ -e^{-\frac{\alpha}{2}t} \sin \varphi(t) & e^{-\frac{\alpha}{2}t} \cos \varphi(t) & 0 \\ 0 & 0 & e^{at} \end{pmatrix} \mathbf{r}_0 \\ &= A \mathbf{r}_0. \end{aligned} \quad (4.41)$$

$\varphi(t)$  ist bestimmt als Lösung der Differentialgleichung für ein Teilchen im Geschwindigkeitsfeld eines Burgerswirbel,

$$\varphi(t) = \int_{t_0}^t dt' \frac{\Gamma}{2\pi r_0^2} e^{at'} \left(1 - e^{-\frac{a}{4\nu} r_0^2 e^{-at'}}\right). \quad (4.42)$$

Um exakte Ergebnisse erzielen zu können, bietet sich eventuell auch die Näherungslösung für große Zeiten  $t$  an,

$$\varphi(t) \approx \frac{\Gamma a}{8\pi\nu} t + \varphi_0, \quad (4.43)$$

wobei  $\varphi_0$  eine durch die Anfangsbedingungen gegebene Phasenverschiebung ist. Fixiert man nun noch die Variable  $t$  als Lebenszeit  $\tau_L$  des Wirbels, hat man eine Abbildung gefunden, die den Ort eines Teilchens nach Durchlaufen des Wirbels angibt.

Um nun eine zufällige Sequenz von Burgerswirbeln beschreiben zu können, muß man daraus eine koordinatensystemunabhängige iterative Abbildung ableiten, die darüber hinaus berücksichtigt, dass die Wirbelachse zufällig im Raum gedreht wird. Dies geschieht durch eine Hintereinanderschaltung von Drehmatrizen. Die allgemeinste Form der Raumdrehung erhält man, indem man zuerst um die  $x$ -Achse dreht, dann um die neue  $y$ -Achse und dann wieder um die neue  $x$ -Achse. Die Drehung wird also durch die Transformationsmatrix

$$T = D_{x'}(\gamma) D_y(\beta) D_x(\alpha) \quad (4.44)$$

beschrieben, wobei

$$D_x(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad D_y(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

gilt, und  $D_{x'}(\gamma)$  entsprechend definiert ist.  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  sind dabei die Winkel, die die Drehung im Raum parametrisieren. Um eine zufällige Ausrichtung im Raum zu beschreiben, wird später über diese Winkel gemittelt. Sei  $\mathbf{R}_n$  nun der Aufvektor des  $n$ -ten Wirbels, dann lautet die iterative Abbildung für den Ort des Lagrangeteilchens nach Durchlaufen des  $n$ -ten Wirbels

$$\mathbf{r}_{n+1} = \mathbf{R}_n + T A T^{-1}(\mathbf{r}_n - \mathbf{R}_n). \quad (4.46)$$

Nun ist eine statistische Behandlung mittels der Frobenius-Perron-Gleichung möglich. Sie lautet

$$p(\mathbf{r}, n+1) = \int d\mathbf{r}' P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') p(\mathbf{r}', n). \quad (4.47)$$

Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach dem  $(n+1)$ -ten Wirbel am Ort  $\mathbf{r}$  zu finden, ergibt sich also als das mit der Übergangswahrscheinlichkeit gewichtete Integral über die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen nach dem  $n$ -ten Wirbel am Ort  $\mathbf{r}'$  zu finden. Diese Übergangswahrscheinlichkeit kann formal bestimmt werden. Sei  $\varphi_n$  der im  $n$ -ten Wirbel überstrichene Winkel. Dann lautet die Frobenius-Perron-Gleichung in diesem Fall

$$p(\mathbf{r}, n+1) = \int d\mathbf{r}' \int d\alpha d\beta d\gamma \int d\varphi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n - T A T^{-1}(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_n)) \delta(\varphi - \varphi_n) p(\mathbf{r}', n). \quad (4.48)$$



Aus Gründen der Übersichtlichkeit wurden in diesem Zusammenhang sämtliche Argumente weggelassen. Es ist jedoch wichtig zu wissen, dass  $A = A(\varphi_n)$  mit  $\varphi_n = \varphi_n(\tau_L, a, \Gamma, r_0)$  gilt. Die Mittelung über die drei Drehwinkel wird im Folgenden mit  $\langle \cdot \rangle$  abgekürzt. Als nächstes kann eine Mittelung über  $\mathbf{R}_n$  mit einer geeigneten Verteilungsfunktion  $f(\mathbf{R}_n)$  durchgeführt werden,

$$p(\mathbf{r}, n+1) = \left\langle \int d\mathbf{r}' \int d\varphi \int d\mathbf{R}_n f(\mathbf{R}_n) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n - TAT^{-1}(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_n)) \delta(\varphi - \varphi_n) p(\mathbf{r}', n) \right\rangle. \quad (4.49)$$

Um diese Integration auszuführen, kann die erste Deltafunktion umgeschrieben werden. Es gilt

$$\begin{aligned} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n + TAT^{-1}(\mathbf{r}' - \mathbf{R}_n)) &= \delta((I - TAT^{-1})\mathbf{R}_n - (\mathbf{r} - TAT^{-1}\mathbf{r}')) \\ &= \frac{1}{\det(I - TAT^{-1})} \delta(\mathbf{R}_n - (I - TAT^{-1})^{-1}(\mathbf{r} - TAT^{-1}\mathbf{r}')). \end{aligned} \quad (4.50)$$

Die Determinante kann bestimmt werden. Das Ergebnis lautet

$$\begin{aligned} \det(I - TAT^{-1}) &= e^{-a\tau_L} - e^{a\tau_L} - 2e^{-\frac{a}{2}\tau_L} \cos(\varphi) + 2e^{\frac{a}{2}\tau_L} \cos(\varphi) \\ &= 4 \cosh\left(\frac{1}{2}a\tau_L\right) \cos(\varphi) - 2 \sinh(a\tau_L). \end{aligned} \quad (4.51)$$

Die Abhängigkeit von den Drehwinkeln fällt also heraus, so dass nur noch das Argument der Deltafunktion davon abhängt. Mittelt man nun noch über den *strain*-Parameter  $a$  und die Wirbelstärke  $\Gamma$  mit den Verteilungsfunktionen  $g(a)$  und  $h(\Gamma)$ , so kann man unter Vertauschung der Integrationen einen Ausdruck für die Übergangswahrscheinlichkeiten identifizieren,

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') &= \left\langle \frac{1}{\cosh\left(\frac{1}{2}a\tau_L\right) \cos(\varphi) - 2 \sinh(a\tau_L)} \right. \\ &\cdot \left. \delta(\mathbf{R}_n - (I - TAT^{-1})^{-1}(\mathbf{r} - TAT^{-1}\mathbf{r}')) \delta(\varphi - \varphi_n) \right\rangle_P. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Dabei bedeutet

$$\langle \cdot \rangle_P = \int d\varphi \int d\mathbf{R}_n \int da \int d\Gamma f(\mathbf{R}_n) g(a) h(\Gamma). \quad (4.53)$$

Unter der Annahme bestimmter Verteilungsfunktionen für die entsprechenden Parameter kann dieses Integral nun weiter ausgewertet und die Übergangswahrscheinlichkeit bestimmt werden.

Der Einfachheit halber kann nun zunächst die Langzeitnäherung für  $\varphi_n$  betrachtet werden,

$$\varphi_n = \frac{\Gamma a}{8\pi\nu} \tau_L, \quad (4.54)$$

wobei hier die durch die Anfangsbedingung gegebene Phase vernachlässigt wurde.  $\varphi_n$  ist durch diese Näherung unabhängig von  $\mathbf{R}_n$  wodurch die Integrationen bezüglich  $\varphi$  und  $\mathbf{R}_n$  ausgeführt werden können. Das Ergebnis lautet

$$P(\mathbf{r}|\mathbf{r}') = \left\langle \int da \int d\Gamma \frac{f((I - TAT^{-1})^{-1}(\mathbf{r} - TAT^{-1}\mathbf{r}')) g(a) h(\Gamma)}{\cosh\left(\frac{1}{2}a\tau_L\right) \cos\left(\frac{\Gamma a}{8\pi\nu} \tau_L\right) - 2 \sinh(a\tau_L)} \right\rangle. \quad (4.55)$$

## 4.5 Fazit

In diesem Kapitel wurde ein Modell vorgestellt, das qualitativ die in voll entwickelter Turbulenz beobachtete Intermittenz zeigt. Im Speziellen offenbart es einen kontinuierlichen Übergang von stark intermittenten Geschwindigkeitsinkrementverteilungen für kleine Zeitdifferenzen hin zu nahezu gaußförmigen Verteilungsfunktionen für große Zeitdifferenzen. Dieses Modell zeigt, dass intermittente Eigenschaften mit dem Vorhandensein kohärenter Strukturen in Zusammenhang gebracht werden können, ähnlich wie es in der in Kapitel 1 vorgestellten Literatur vermutet wird. Gleichzeitig haben umfangreiche Tests jedoch gezeigt, dass die Anwesenheit von Wirbeln allein nicht zielführend ist, und man geeignete Verteilungsfunktionen für die physikalischen Parameter annehmen muss, um im Rahmen des Modells die qualitative Übereinstimmung zu erreichen.

Im Rahmen des Modells lassen sich viele statistische Effekte anhand der dynamischen Ingredienzien verstehen. So zeigen sich gaußartige Verteilungen für die Zeitdifferenzen, für die mehrere Wirbel zum Geschwindigkeitssignal beitragen. Der Nulldurchgang der Autokorrelationsfunktion kann dynamisch durch Ereignisse erklärt werden, in denen das Lagrangeteilchen eine oder mehrere volle Wirbeloszillationen durchführt.

Analytische Ansätze zeigen, dass das Entstehen der statistischen Größen teilweise mit den Ergebnissen in Kapitel 3 in Zusammenhang gebracht werden kann. Formal wird man auf Gleichungen geführt, die den Rechnungen zum Punktwirbel ähneln. Der Zugang über die Frobenius-Perron-Gleichung verknüpft das Modell mit iterativen Abbildungen, muss jedoch noch tiefergehend untersucht werden.

Über die vorgestellten Ergebnisse hinaus stellt das Modell auch die Frage in den Raum, ob die in Kapitel 1 experimentell oder numerisch beobachteten Größen ausreichen, um ein turbulentes Feld vollständig zu charakterisieren, schließlich sind einige wesentliche Merkmale auch in diesem einfachen Modell vorhanden.

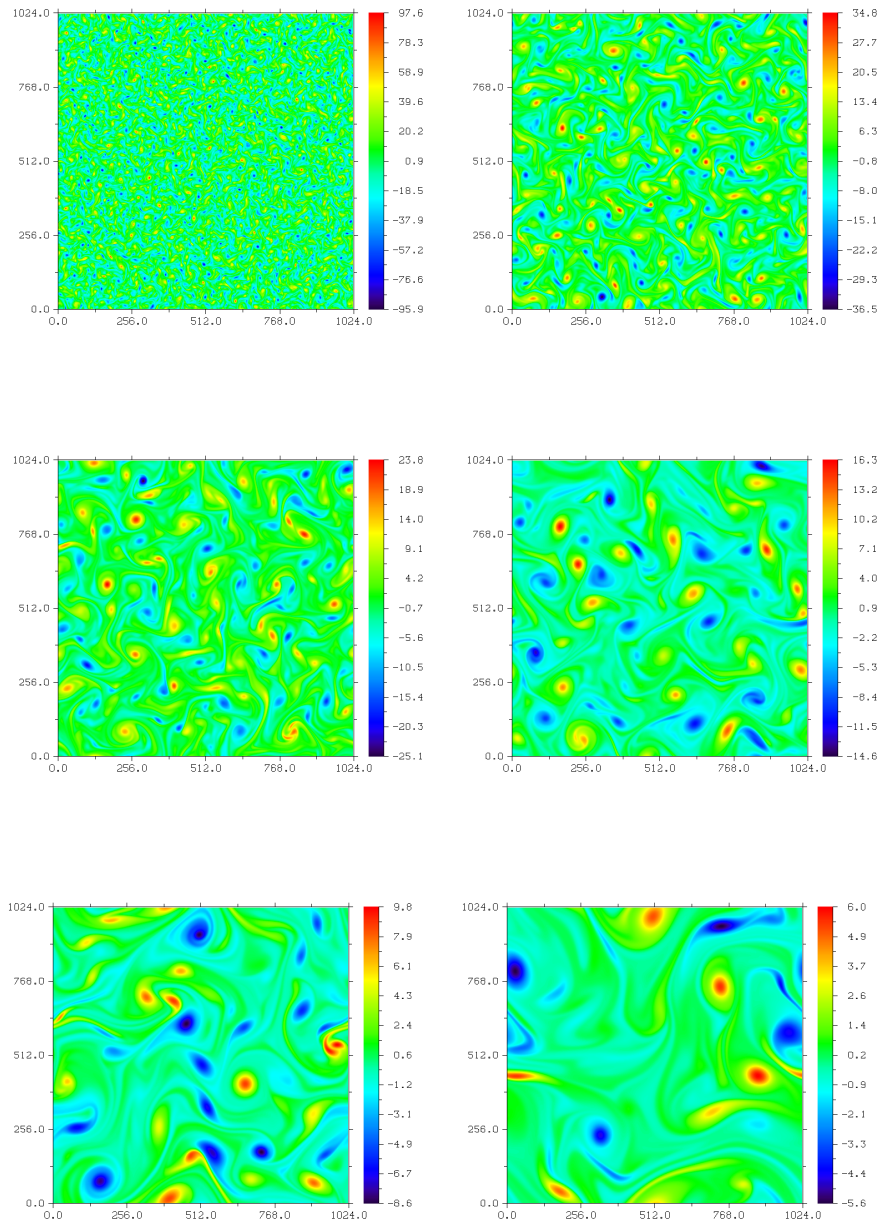
## 5 Zerfallende zweidimensionale Turbulenz

Als weiteres Beispiel für ein Ensemble von kohärenten Strukturen wird in diesem Kapitel zweidimensionale zerfallende Turbulenz vorgestellt. Im Gegensatz zu getriebener zweidimensionaler Turbulenz, in der großskalige Wirbelstrukturen durch die antreibende Kraft unterdrückt werden, bilden sich in zerfallender Turbulenz ausgeprägte Wirbelstrukturen aus [Tab02]. Da die Navier-Stokes-Gleichung ein dissipatives System beschreibt, handelt es sich bei dem vorgestellten System nicht um ein System im Fließgleichgewicht, die ermittelten Lagrangeschen Trajektorien befinden sich also nicht in einem statistisch stationären Zustand.

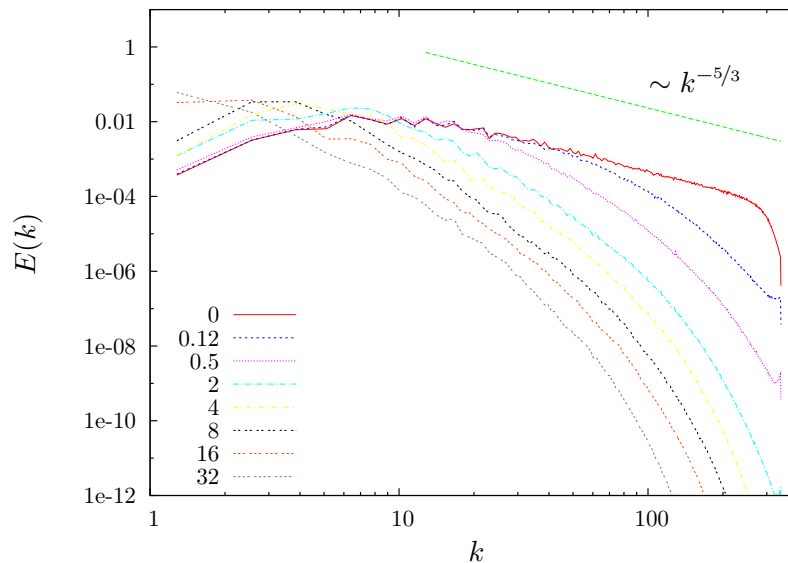
Dennoch ist seit einiger Zeit bekannt, dass zweidimensionale zerfallende Turbulenz universelle Gesetzmäßigkeiten zeigt. Viele der statistischen Größen zeigen selbstähnliches Verhalten. So belegen die in [BPS88] vorgestellten Ergebnisse, dass die Anzahl der Wirbel in der turbulenten Strömung Potenzgesetze in Bezug auf Wirbelradius, Energie und Enstrophie zeigen. Ähnliche Untersuchungen werden in [LCDS00] durchgeführt. Arbeiten zur Lagrangeschen Betrachtung zweidimensionaler zerfallender Turbulenz sind sehr spärlich gesät, was das vorliegende Kapitel motiviert. Es ist wie folgt aufgebaut: Um zunächst zerfallende Turbulenz phänomenologisch vorzustellen, wird die zeitliche Entwicklung des Vortizitätsfeldes dargestellt und diskutiert. Zusätzlich wird die zeitliche Entwicklung des Eulerschen Energiespektrums untersucht. Es folgt eine qualitative Diskussion Lagrangescher Teilcentrajektorien in diesem turbulenten Feld, bevor einige statistische Betrachtungen durchgeführt werden. Als zentrale Lagrangesche Messgröße fokussieren wir auf die Statistik der Beschleunigung entlang der Trajektorien. Diese wird auf selbstähnliches Verhalten untersucht. Zu guter Letzt wird versucht, einige statistische Größen mit dynamischen Effekten in Wirbelstrukturen in Zusammenhang zu bringen.

### 5.1 Entwicklung von Vortizität und Energiespektrum

Für die vorliegenden Untersuchungen wurde als Anfangsbedingung eine Vortizitätsverteilung getriebener Turbulenz gewählt ([Kam06a], Index `decay-1`). Diese Anfangsbedingung zeichnet sich gegenüber einer rein zufälligen durch das Kolmogorovsche Energiespektrum  $E(k) \sim k^{-5/3}$  aus. Es wurde sichergestellt, dass veränderte Anfangsbedingungen zu qualitativ ähnlichen Ergebnissen führen. So wurde die vorliegende Anfangsbedingung mit unterschiedlichen Werten für die kinematische Viskosität  $\nu$  zerfallen gelassen. Zusätzlich wurde ein Vortizitätsfeld im Ortsraum rein zufällig initialisiert, was zu einem Energiespektrum von  $E(k) \sim k^{-1}$  führt. Stellvertretend für diese Menge an Experimenten wird an dieser Stelle nur ein Datensatz ausführlich ausgewertet. Eine systematisch vergleichende Studie findet im Rahmen dieser Arbeit nicht statt.



**Abbildung 5.1:** Entwicklung der Vortizität bei zerfallender Turbulenz für verschiedene Zeitpunkte  $t \in \{0.3, 2, 4, 8, 16, 32\}$ . Es bilden sich großskalige kohärente Strukturen. Eine Animation findet sich auf der beiliegenden DVD (Simulationsindex `decay-1`).

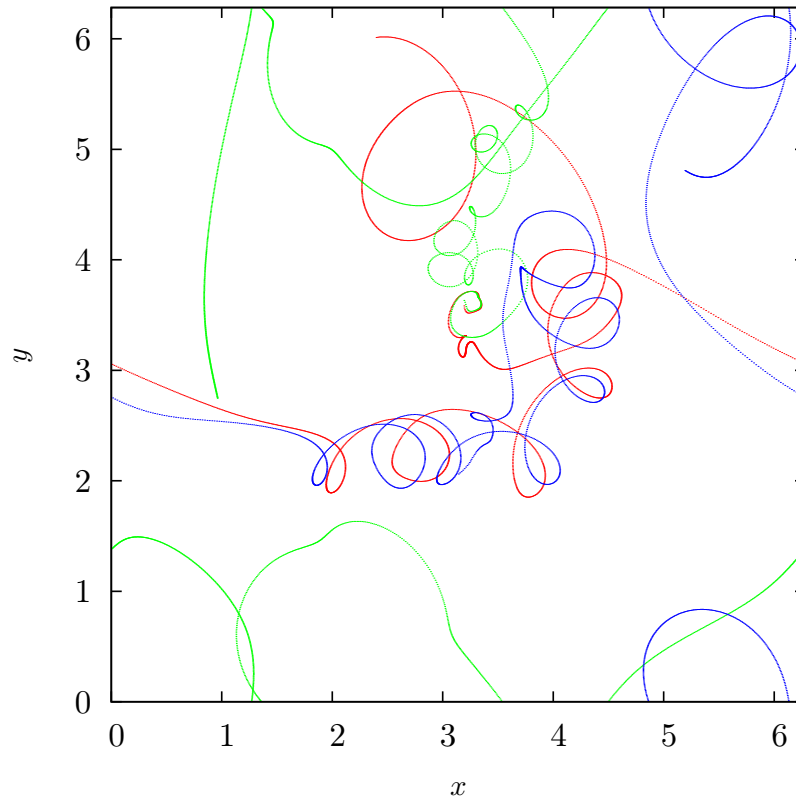


**Abbildung 5.2:** Entwicklung des Energiespektrums für verschiedene Zeitpunkte. Zunächst verlieren die kleinen Skalen Energie, zusätzlich wird den großen Skalen Energie zugeführt. Das Spektrum steilt sich mit der Zeit auf.

Abbildung 5.1 zeigt die zeitliche Entwicklung der Vortizität  $\omega(\boldsymbol{x}, t)$  für zerfallende Turbulenz. Zu Beginn wird das Feld von einer Vielzahl kleiner Wirbel bevölkert, die sich sehr schnell durch Verschmelzungsprozesse zu größeren Wirbeln zusammenschließen. Die maximale Vortizität fällt währenddessen rapide ab. Dabei zeigen die Wirbel eine komplexe Dynamik, ähnlich der von Punktwirbeln [BPS88]. Im Gegensatz zu Punktwirbeln haben die Wirbel eine begrenzte Lebensdauer. Entweder verschmelzen sie mit anderen Wirbeln gleichen Vorzeichens oder werden im Geschwindigkeitsfeld anderer Wirbel so stark in dünne Filamente verzerrt, dass sie durch den Einfluss der Viskosität zerstört werden. Dieser Prozess setzt sich solange fort, bis nur noch zwei Wirbel unterschiedlichen Vorzeichens übrigbleiben. Man spricht in diesem Zusammenhang daher auch vom finalen Dipol [Tab02].

Abbildung 5.2 zeigt die zeitliche Entwicklung des Energiespektrums. Zunächst werden die hohen Wellenzahlen gedämpft, mit der Zeit erkennt man jedoch auch, dass den niedrigen Moden Energie zugeführt wird, ein Anzeichen für die inverse Energiekaskade. Das Spektrum geht dabei von seiner anfänglichen  $k^{-5/3}$ -Form in eine steilere Form über. Anschaulich ist die Entwicklung leicht zu interpretieren. Hohe Moden korrespondieren zu feinen Strukturen im Ortsraum, also zu kleinen Wirbeln. Verschmelzen diese zu größeren Strukturen, so verlieren diese hohen Moden Energie, gleichzeitig wird niedrigeren Moden Energie zugeführt. Darüber hinaus verlieren alle Moden aufgrund dissipativer Effekte Energie.<sup>1</sup>

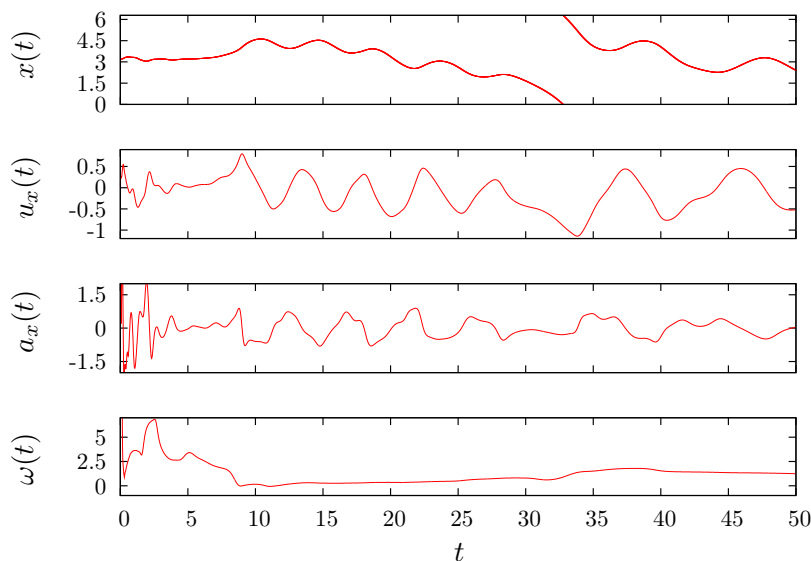
<sup>1</sup>Der zeitliche Verlauf der Gesamtenergie ist in Abb. A.9 zu sehen.



**Abbildung 5.3:** Trajektorien in zerfallender Turbulenz. Gut zu erkennen ist, dass die Lagrangeteilchen häufig für mehr als einen Umlauf in einer Wirbelstruktur bleiben und neben der Bewegung um das Wirbelzentrum sich mit dem Wirbel durch die Ebene bewegen.

## 5.2 Trajektorien

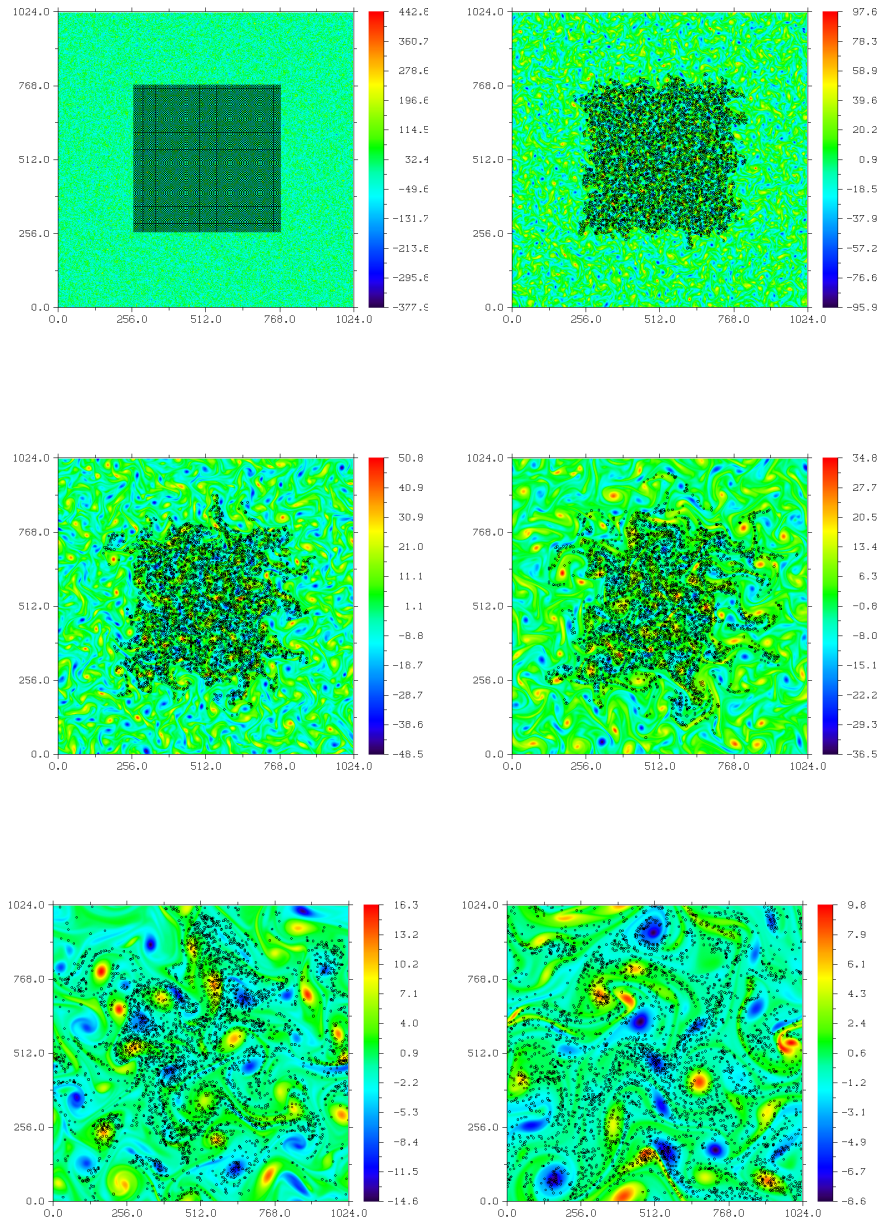
Als nächstes sollen die Teilchentrajektorien qualitativ untersucht werden. In Abbildung 5.3 sind typische Trajektorien zu sehen. Die Trajektorien zeigen einen ausgeprägten spiralförmigen Verlauf, der andeutet, dass eine Bewegung innerhalb von Wirbeln generisch für dieses System ist. Eine genaue Betrachtung offenbart, dass zwei anfänglich dicht benachbarte Lagrangeteilchen (rot und grün) sich schon nach kurzer Zeit weit voneinander entfernen können. Diese Eigenschaft ist typisch für Systeme, die komplexes oder raumzeitlich chaotisches Verhalten zeigen. Ein Vergleich der anfänglich weiter voneinander entfernten roten und blauen Trajektorie offenbart jedoch, dass durch einen zeitlich leicht versetzten Eingang in denselben Wirbel zwei Trajektorien auch für lange Zeit benachbart bleiben können. Qualitativ kann man auch eine Zunahme der mittleren Radien der Trajektorien mit der Zeit erkennen, was durch die zunehmende Größe der einzelnen Wirbel zu erklären ist. Abbildung 5.4 zeigt die rote Trajektorie aus Abbildung 5.3 zeitaufgelöst. Während der Bewegung um einen Wirbel zeigen die einzelnen Komponenten ein oszillie-



**Abbildung 5.4:** Trajektorie in zerfallender Turbulenz. Während eines Wirbeleinfangs oszillieren die Komponenten von Geschwindigkeit und Beschleunigung.

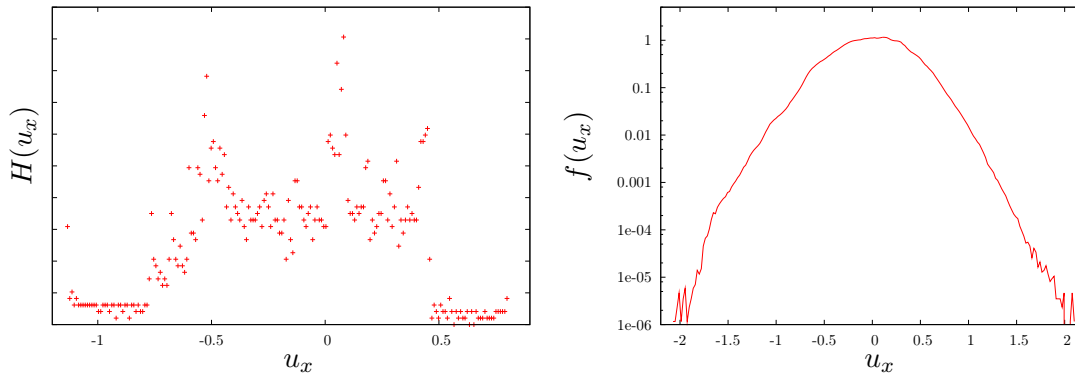
rendes Verhalten. Diese Sequenzen sollten also ähnlich zu den Betrachtungen in Kapitel 3 zu den betreffenden statistischen Größen beitragen. Auch diese Abbildung bestätigt, dass die Bewegung innerhalb von Wirbeln typisch für dieses System ist. Zusätzlich erkennt man die starken Fluktuationen in Beschleunigung und Vortizität zu Beginn der Simulation. Zu diesem Zeitpunkt ist das Feld noch sehr rau und hat kaum etwas von seiner Gesamtenergie verloren.

Die qualitative Diskussion der Trajektorien wird mit der Untersuchung der zeitlichen Entwicklung einer Menge von Lagrangeteilchen abgeschlossen, siehe Abbildung 5.5. Diese Abbildung zeigt, dass die anfänglich quadratförmige Menge von Lagrangeteilchen unter dem Einfluss des Geschwindigkeitsfeldes stark verzerrt wird. Bildet sich lokal ein starker Wirbel, so bewegen sich die umliegenden Tracerteilchen eine Zeit lang in seinem Geschwindigkeitsfeld, ähnlich zu der in Kapitel 3 betrachteten Einzelwirbelsituation. Zusätzlich führen die Wirbel eine Translationsbewegung durch die Ebene aus. Zwischen zwei Wirbeln unterschiedlichen Vorzeichens liegt topologisch gesehen ein Sattel. Verschiedene Wirbel gleichen Vorzeichens werden somit von Separatrizen getrennt. So können zwei anfänglich dicht benachbarte Teilchen, die durch solch eine topologische Grenze getrennt werden, sich weit voneinander entfernen, da ihre Dynamik hauptsächlich von nur einem der beiden verschiedenen Wirbel beeinflusst wird. So wird die gesamte Menge „auseinandergerissen“ und verteilt sich nach kurzer Zeit über das gesamte Simulationsgebiet. Diese Betrachtungen lassen vermuten, dass das gute Durchmischungsvermögen turbulenter Strömungen von der topologischen Mischung aus Wirbeln und begrenzenden Separatrizen herrührt.



**Abbildung 5.5:** Entwicklung einer Menge von Lagrangeteilchen bei zerfallender Turbulenz für verschiedene Zeitpunkte  $t \in \{0, 0.3, 1, 2, 8, 16\}$ . Die Menge wird unter dem Einfluss der Strömung stark verzerrt und verteilt sich schließlich über das gesamte Simulationsgebiet. Eine Animation findet sich auf der beiliegenden DVD (Simulationsindex `decay-2`).





**Abbildung 5.6:** Links: Histogramm der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  einer einzelnen Trajektorie. Rechts: Verteilungsfunktion  $f(u_x)$ .

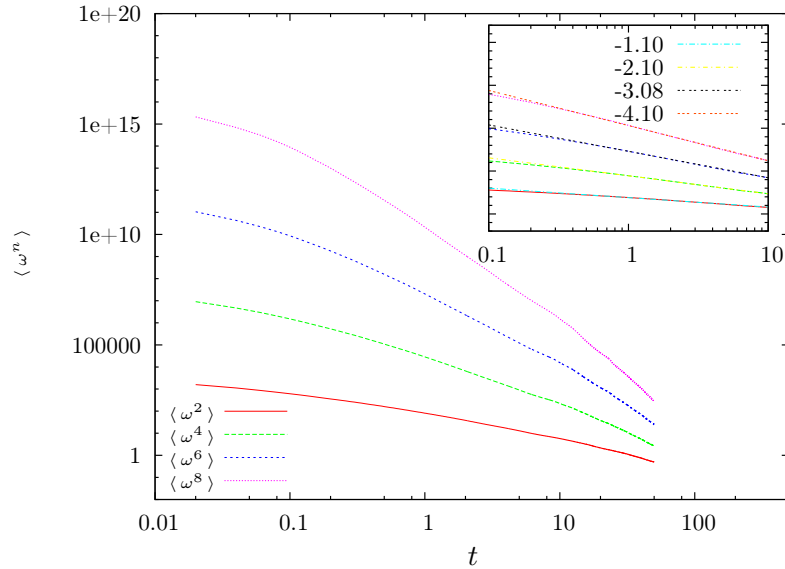
### 5.3 Statistische Eigenschaften

Nach diesen qualitativen Betrachtungen werden einige statistische Eigenschaften zerfallender zweidimensionaler Turbulenz untersucht. Nach einigen Vorbemerkungen werden wir unser Hauptaugenmerk auf die Beschleunigung entlang der Trajektorien richten und diese Größe auf Selbstähnlichkeit untersuchen.

#### Beitrag einer einzelnen Trajektorie zur Statistik

Als eine Art Randbemerkung beginnen wir mit der Frage, inwiefern eine einzelne Trajektorie zur Gesamtstatistik beiträgt, schließlich erhält man Verteilungsfunktionen in der Regel durch einen Mittelungsprozess über eine Menge von Trajektorien und gegebenenfalls durch zusätzliche Zeitmittelung.<sup>2</sup> In Abbildung 5.6 wird das über die gesamte Simulationsdauer gemittelte Histogramm der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  der im letzten Abschnitt vorgestellten roten Trajektorie gezeigt. Neben einem ausgeprägten Maximum in der Nähe von Null zeigt dieses Histogramm weitere Maxima in der Nähe von  $\pm 0.5$ . Ein Vergleich mit Abbildung 5.4 und dem in Abschnitt 3.1 eingeführten Konzept der Elementarverteilungen lässt schlussfolgern, dass diese Maxima von dem Zeitabschnitt stammen, in dem die Geschwindigkeitskomponente ein oszillierendes Verhalten zeigt. Rechts in Abbildung 5.6 ist die über alle Lagrangeteilchen und Zeitschritte gemittelte Verteilungsfunktion  $f(u_x)$  zu sehen, welche nahezu gaußverteilt ist. Ähnlich wie in Abschnitt 3.1 zeigt die über eine Menge gemittelte Verteilungsfunktion keine Ähnlichkeit mit den Histogrammen der einzelnen Lagrangeteilchen. Im Gegensatz zu den in Kapitel 3 vorgestellten Untersuchungen wird im Falle der zweidimensionalen zerfallenden Turbulenz jedoch nicht nur über eine Menge von Lagrangeteilchen in einem einzelnen Wirbel gemittelt, sondern über ein interagierendes Ensemble von Wirbeln.

<sup>2</sup>Für diese Betrachtung wird vernachlässigt, dass es sich bei der Geschwindigkeitskomponente  $u_x$  um keine Zeitreihe handelt, die statistisch stationär ist.



**Abbildung 5.7:** Zeitaufgelöste Momente  $\langle \omega^n \rangle$ . Die Momente zeigen für  $t \in [0.1, 10]$  einen ausgeprägten algebraischen Abfall. Das Inlet zeigt einen Fit gemäß Potenzgesetzen  $\langle \omega^n \rangle \sim x^\alpha$ . Die Exponenten  $\alpha$  werden angegeben.

### Anzeichen für Selbstähnlichkeit

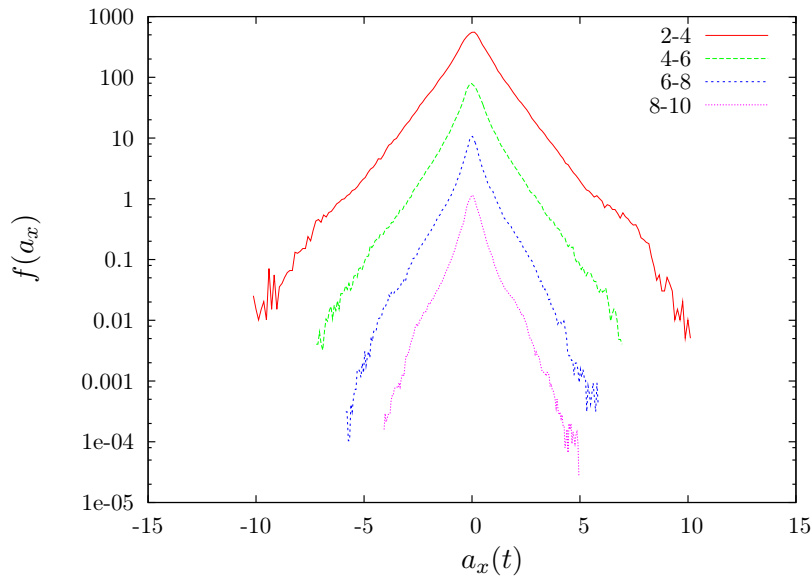
Wir wenden uns nun Anzeichen für selbstähnliches Verhalten von statistischen Größen in zweidimensionaler zerfallender Turbulenz zu. Wir untersuchen dazu die zeitaufgelösten Momente der Verteilungsfunktion für die Vortizität entlang der Trajektorien,

$$\langle \omega(t)^n \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \omega_i(t)^n, \quad (5.1)$$

wobei  $N$  die Gesamtzahl der Trajektorien und  $\omega_i(t)$  die Vortizität entlang der Trajektorie des  $i$ -ten Lagrangeteilchens bezeichnet. Einige dieser Momente sind in Abbildung 5.7 dargestellt. Für  $t \in [0.1, 10]$  zeigen die Momente einen deutlichen algebraischen Abfall und somit selbstähnliches Verhalten. Ein Fit mit Funktionen  $c \cdot x^\alpha$  zeigt, dass die Exponenten der höheren geraden Momente nahezu ganzzahlige Vielfache des Exponenten des zweiten Moments sind. Das ist ein erstes Anzeichen dafür, dass nicht nur die Momente selbstähnlich sind, sondern auch die gesamte zu Grunde liegende Verteilung, was jedoch hier nicht weiter untersucht wird.

Ab etwa  $t = 10$  fallen die Momente stärker ab, was ein Hinweis auf eine qualitative Änderung der dynamischen Vorgänge in der Strömung ist. Welche Ursachen hier zu Grunde liegen, bleibt zum jetzigen Zeitpunkt Spekulation.

Es sei darauf hingewiesen, dass diese Betrachtung der Vortizität entlang der Trajektorien keine Lagrangesche Besonderheit darstellt, da bei einer hinreichend guten statistischen Abdeckung des Eulerschen Feldes mit Lagrangeteilchen diese Größe mit der



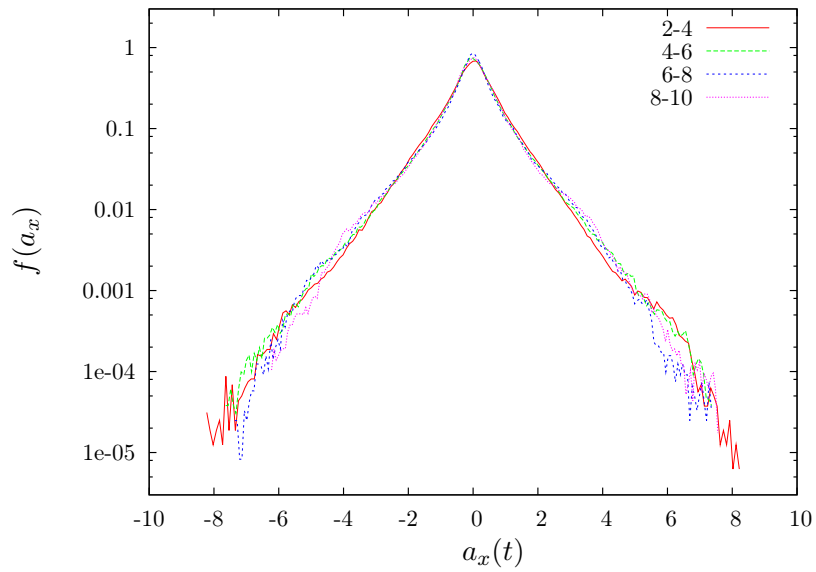
**Abbildung 5.8:** Zeitaufgelöste Verteilungsfunktionen für  $a_x(t)$  (vertikal verschoben). Mit zunehmender Simulationszeit nimmt die Varianz dieser Verteilungsfunktionen ab. Die Zahlenwerte geben an, über welche Zeitfenster gemittelt wird.

über das gesamte Feld gemittelten Eulerschen übereinstimmt. Dasselbe gilt auch für die Geschwindigkeit. Wir untersuchen deshalb im Folgenden die nur im Lagrangebild zugängliche Beschleunigung entlang der Trajektorien.

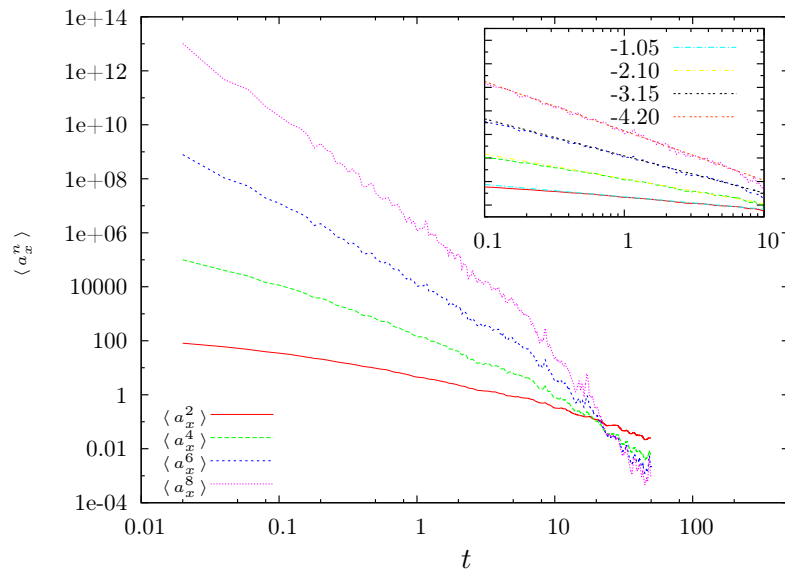
### Selbstähnlichkeit in der Beschleunigungsstatistik

Abbildung 5.8 zeigt die zeitaufgelöste Verteilungsfunktion der Beschleunigungskomponente  $a_x$ . Um eine bessere statistische Qualität der einzelnen Funktionen zu erreichen, wird jeweils über zwei Zeiteinheiten gemittelt. Bei den einzelnen Verteilungsfunktionen handelt es sich um hochgradig intermittente Verteilungsfunktionen mit weiten Flügeln. Die Varianz der Verteilungsfunktionen nimmt mit der Zeit ab. Das ist leicht zu verstehen, schließlich nehmen die Gesamtenergie des Geschwindigkeitsfeldes und die Vortizität mit der Zeit ab. Die Anwesenheit weniger starker Wirbel sorgt auch für weniger starke Beschleunigungen. In Abbildung 5.9 sind dieselben Verteilungsfunktionen auf Mittelwert Null und Standardabweichung Eins normiert zu sehen. Im Rahmen der statistischen Unsicherheiten kollabieren diese Kurven und belegen somit, dass im betrachteten Zeitraum die Beschleunigungsverteilungsfunktion für eine einzelne Komponente ein universelles, selbstähnliches Verhalten zeigt.

Unterstützt wird diese These durch Abbildung 5.10. Dort werden einige Momente der Verteilungsfunktion  $f(a_x)$  dargestellt. Diese zeigen ähnlich den Momenten der Vortizität einen Abfall gemäß eines Potenzgesetzes. Im Rahmen der statistischen Genauigkeit zeigt ein Fit, dass die Exponenten der höheren geraden Momente Vielfache des zweiten Mo-



**Abbildung 5.9:** Zeit aufgelöste normierte Verteilungsfunktionen für  $a_x(t)$ . Im Rahmen der statistischen Genauigkeit kollabieren die Kurven.



**Abbildung 5.10:** Momente der Verteilungsfunktion für  $a_x$ . Die Momente zeigen einen Verlauf gemäß eines Potenzgesetzes. Das Inlet zeigt einen Fit mit Potenzgesetzen, die Exponenten werden angegeben.

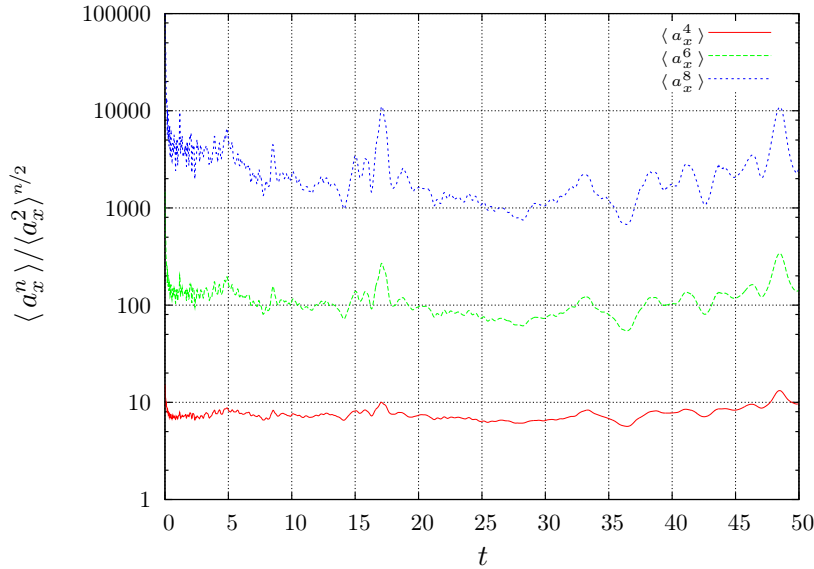


Abbildung 5.11: Kompensierte Momente der Verteilungsfunktion für  $a_x$ .

ments sind. Um das noch weiter zu dokumentieren, werden in Abbildung 5.11 einige mit der passenden Potenz des zweiten Moments kompenierte höhere Momente gezeigt. Dieser Plot bestätigt die bisherigen Beobachtungen, zeigt jedoch auch, dass in den höheren Momenten die statistische Unsicherheit recht groß ist.

### Dynamik und Statistik

Die Beschreibung dieses turbulenten Systems schließt mit dem Versuch, einen Zusammenhang zwischen dynamischen Effekten und statistischen Größen zu knüpfen. Als zentrale Größe wird wieder die Beschleunigungsstatistik betrachtet. Im Gegensatz zu den Betrachtungen des letzten Abschnitts wird für die Verteilungsfunktion über die gesamte Zeit gemittelt, die sich ergebende Verteilungsfunktion kann man sich daher als Überlagerung von zeitaufgelösten Verteilungsfunktionen wie in Abbildung 5.8 vorstellen.

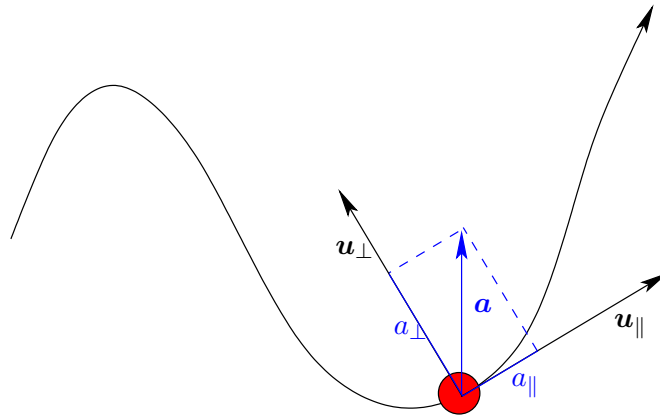
Man zerlegt nun den Beschleunigungsvektor in einen zur momentanen Geschwindigkeit parallelen, sowie einen senkrechten Anteil. Dazu definiert man

$$\mathbf{u}_{\parallel} = \frac{\mathbf{u}}{|\mathbf{u}|} \quad \text{und} \quad \mathbf{u}_{\perp} = \frac{(-u_y, u_x)}{|\mathbf{u}|}. \quad (5.2)$$

Die entsprechenden Beschleunigungskomponenten erhält man dann durch Projektion,

$$a_{\parallel} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_{\parallel} \quad \text{und} \quad a_{\perp} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_{\perp}. \quad (5.3)$$

Falls ein Teilchen immer nur in Richtung seiner Geschwindigkeit beschleunigt bewegt wird, gilt  $a_{\perp} \approx 0$ . Bewegt sich ein Teilchen ausschließlich auf einer Kreisbahn um einen



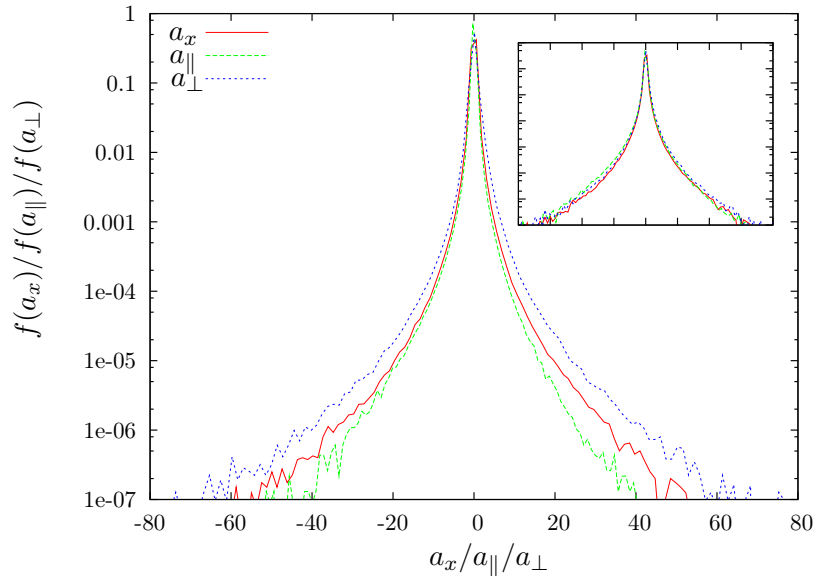
**Abbildung 5.12:** Zerlegung der Beschleunigung in einen Anteil parallel zur Geschwindigkeitsrichtung und einen Anteil senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung.

Wirbel, so gilt  $a_{\parallel} \approx 0$ . So gibt die Definition der Größen ein Maß, inwieweit die Bewegung durch das Spiralen um einen Wirbel beeinflusst wird, oder ob andere Effekte eine Rolle spielen. Einen nichtverschwindenden Wert für  $a_{\parallel}$  liefert zum Beispiel der Fall, dass sich ein Teilchen unter Einfluss eines schwachen Wirbels befindet, dieser jedoch im Geschwindigkeitsfeld der anderen Wirbel Beschleunigungen erfährt. Da die zweidimensionale zerfallende Turbulenz statistisch isotrop ist, sollte die Betrachtung der Beschleunigungskomponente  $a_x$  eine Mischung aus beiden Einflüssen offenbaren.

Abbildung 5.13 zeigt die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungsfunktionen für  $a_x$ ,  $a_{\parallel}$  und  $a_{\perp}$ . Die Verteilungsfunktion für  $a_{\perp}$  zeigt die höchste Varianz und damit, dass Beschleunigungen, die senkrecht zur Geschwindigkeit wirken, stärker zu den weiten Flügeln der Verteilungsfunktion für  $a_x$  beitragen als Beschleunigung in Richtung der momentanen Geschwindigkeit. Diese Art der Beschleunigung korrespondiert, wie erläutert, gerade zu Bewegungen der Lagrangeteilchen um einen Wirbel. Diese Betrachtung gibt also einen weiteren Hinweis darauf, dass kohärente Strukturen signifikant zu statistischen Größen beitragen. Normiert man die verschiedenen Verteilungsfunktionen auf die Standardabweichung  $\sigma = 1$ , so fallen sie nahezu zusammen. Das zeigt, dass die verschiedenen dynamischen Effekte nicht über verschiedene funktionale Formen der Verteilungsfunktionen, sondern lediglich über eine Überlagerung nahezu identischer Verteilungsfunktionen mit unterschiedlichen Varianzen beitragen.

## 5.4 Fazit

In diesem Kapitel wurde zerfallende zweidimensionale Turbulenz im Hinblick auf den Einfluß von Wirbelstrukturen auf Lagrangesche Teilchenbahnen untersucht. Schon eine qualitative Betrachtung der Eulerschen Felder zeigt, dass die Entwicklung dieses Systems von der Entstehung und Dynamik kohärenter Strukturen dominiert wird. Eine Untersuchung der Trajektorien zeigt, dass die Bewegung innerhalb von einzelnen Wirbeln typisch



**Abbildung 5.13:** Verteilungsfunktion für  $a_x$ ,  $a_{||}$  und  $a_{\perp}$ . Die Verteilungsfunktion für  $a_{\perp}$  zeigt die größte Varianz, die Verteilungsfunktion für  $a_{||}$  die kleinste. Inlet: bei Normierung auf  $\sigma = 1$  und  $\mu = 0$  kollabieren die Kurven nahezu.

für die Lagrangeteilchen in diesem System ist. Ein Vergleich mit den Untersuchungen der Einzelwirbellösungen der Navier-Stokes-Gleichung aus dem Kapitel 3 belegt, dass die dort untersuchten Szenarien auch in einem vollständig turbulenten Feld von Bedeutung sind. Zusätzlich spielen im vorgestellten System jedoch auch die Gebiete zwischen den Wirbeln eine wichtige topologische Rolle, da sie Bereiche topologisch trennen, in denen benachbarte Teilchen für längere Zeit benachbart bleiben.

Weiter wurde neben der Vortizitätsstatistik die Lagrangesche Beschleunigungsstatistik auf Selbstähnlichkeit untersucht. Es zeigt sich, dass sowohl die einzelnen Momente als auch die gesamte Verteilungsfunktion selbstähnliches Verhalten zeigen. Damit ist der Nachweis gelungen, dass für zerfallende Turbulenz auch im Lagrangebild universelle Gesetzmäßigkeiten gelten. Die physikalische Ursache bleibt indes unklar und muss weiter untersucht werden.

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

Auf Grundlage der in Kapitel 1 dargestellten experimentellen und numerischen Beobachtungen wurde, ausgehend von den dort motivierten Fragestellungen, das Verhalten von Lagrangeschen Testteilchen in kohärenten Strukturen untersucht. Das Augenmerk lag dabei auf der Frage, wie sich Teilchen qualitativ in Wirbelstrukturen bewegen und wie diese Bewegungen zu statistischen Größen wie Autokorrelationsfunktionen oder Beschleunigungsverteilungsfunktionen beitragen.

Methodisch wurde dabei wann immer möglich ein analytischer Zugang gesucht, allerdings erfordert bereits eine Untersuchung von Wirbellösungen wie dem Lamb-Oseen-Wirbel oder dem Lundgrenwirbel eine numerische Behandlung. Zu diesem Zweck wurde im Rahmen dieser Arbeit ein Programm zur Integration der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichungen erstellt, welches die Erzeugung von Lagrangeschen Trajektorien ermöglicht.

In Kapitel 3 wurden systematisch Einzelwirbellösungen der Grundgleichungen der Hydrodynamik untersucht. Als Lösung der Eulergleichung wurde der Punktwirbel betrachtet. Aufgrund der einfachen Struktur der Bewegungsgleichungen für ein Lagrangeteilchen ermöglicht der Punktwirbel, viele Effekte mit analytischen Mitteln zu verstehen. So konnte die funktionale Form der Verteilungsfunktion eines einzelnen Teilchens in einem einzelnen Punktwirbel für Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung abgeleitet werden. Gleiches gilt für die Autokorrelationsfunktion für eine Geschwindigkeitskomponente. Anschließend wurde der Einfluß einer Mittelung über eine Menge von Lagrangeteilchen untersucht, dabei ergaben sich qualitativ neue Eigenschaften. Es konnte gezeigt werden, dass dieser Mittelungsprozess zu Verteilungsfunktionen mit Potenzverhalten führt, und der Abfall von Autokorrelationsfunktionen mit Dephasierungseffekten in Zusammenhang zu bringen ist. Weiterhin wurden der Lamb-Oseen-Wirbel und der Lundgrenwirbel in Hinblick auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede untersucht. Gerade im Falle des Lamb-Oseen-Wirbels konnten analytische Ergebnisse des Punktwirbelkonzepts mit numerischen Methoden qualitativ bestätigt werden. Der Lundgrenwirbel zeigt besonders in Hinblick auf die Teilcentrajektorien Unterschiede, auch radial gerichtete Bewegungen von Lagrangeteilchen sind in dieser Wirbelkonfiguration möglich. In Vorbereitung auf das folgende Kapitel wurden dann als Lösung der dreidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung der Burgerswirbel eingeführt und Trajektorien diskutiert.

In den folgenden zwei Kapiteln wurden Ensembles von kohärenten Strukturen betrachtet. Als Modell für die Einteilchenstatistik in dreidimensionaler Turbulenz wurde in Kapitel 4 eine zeitliche Sequenz von Burgerswirbeln betrachtet, durch die sich ein Lagrangeteilchen bewegt. Das Modell reproduziert qualitativ den Übergang von intermittenten Verteilungsfunktionen für die Geschwindigkeitsinkremente hin zu eher gaußischen



---

Funktionen. Damit reproduziert dieses Modell eines der wichtigsten Ergebnisse aktueller Experimente zur Lagrangeschen Statistik. Weiterhin wurden Größen wie die Autokorrelationsfunktion der Geschwindigkeitskomponente untersucht und diskutiert. Der funktionale Verlauf konnte sowohl mit Dephasierungseffekten als auch mit der statistischen Unabhängigkeit zweier aufeinander folgender Wirbeleinfänge erklärt werden. Analytische Rechnungen verknüpfen dieses Modell mit den Ergebnissen zum Punktwirbel aus Kapitel 3. Ein Vergleich der numerischen Ergebnisse mit diesen Rechnungen zeigt, dass der Mittelungsprozess über viele Wirbel mit geeignet verteilten physikalischen Parametern entscheidend zur funktionalen Form der Verteilungsfunktionen beiträgt.

Abschließend wurde als weiteres Beispiel für ein Ensemble von kohärenten Strukturen zerfallende zweidimensionale Turbulenz betrachtet. Im Gegensatz zum modellierenden Zugang aus Kapitel 4 wurde hier die volle zeitliche Dynamik gemäß der zweidimensionalen Navier-Stokes-Gleichung simuliert. Dieses System zeichnet sich durch die Entstehung von großskaligen Wirbeln aus, die die gesamte Dynamik prägen. Bei einer qualitativen Diskussion der Trajektorien konnte der Einfluß dieser Wirbel auf die Teilchendynamik bestätigt werden. Definierte Wirbeleinfänge bestätigen darüberhinaus die Relevanz der Untersuchungen aus Kapitel 3. Eine statistische Untersuchung der Lagrangeschen Beschleunigung offenbarte selbstähnliches Verhalten sowohl der Momente als auch der Verteilungsfunktionen. Damit ist ein Nachweis von universellem statistischen Verhalten in Lagrangescher zweidimensionaler Turbulenz gelungen.

Insgesamt bestätigt die vorliegende Arbeit den zentralen Einfluß von Wirbeln auf die Lagrangesche Teilchendynamik und klärt an zahlreichen Stellen den Zusammenhang zwischen Teilchendynamik, Mittelungsprozess und Struktur der Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungsfunktionen. Besonders hervorzuheben sind im Bezug auf aktuelle Forschungsergebnisse die Ergebnisse des in Kapitel 4 vorgestellten Modells. Die guten qualitativen Übereinstimmungen mit Experimenten und direkter Numerik lassen die Frage aufkommen, ob die betrachteten Größen ausreichen, um turbulente Strömungen hinreichend zu charakterisieren.

Im Rahmen dieser Arbeit konnte die Fragestellung nach dem Zusammenhang zwischen dynamischen und statistischen Größen an vielen Stellen nur angerissen werden, weitergehende Arbeiten sind daher notwendig, sowohl auf Seiten der Statistik als auch auf Seiten der Dynamik. So ist zum Beispiel die Untersuchung von mehrzeitigen Verteilungen oder Mehrteilchenverteilungen vorstellbar. Des Weiteren könnte der Einfluß der Dynamik mehrerer Wirbel auf die Lagrangeschen Trajektorien weiter untersucht werden. Sicherlich wünschenswert ist eine direkte numerische Untersuchung dreidimensionaler turbulenter Strömungen.

Die analytischen Ergebnisse zum Punktwirbel könnten zu einer tiefergehenden Untersuchung zweidimensionaler turbulenter Strömungen auf Grundlage eines Punktwirbelmodells ermutigen.

# A Direkte numerische Simulation

In den vergangenen Jahrzehnten hat sich der Computer in der wissenschaftlichen Gemeinde als immer wertvolleres Hilfsmittel erwiesen. So kann man mit Hilfe von Computern große Datenmengen speichern, verarbeiten und auswerten. Dies ermöglicht beispielsweise Statistiken aus experimentell zugänglichen Daten zu erzeugen. Aber der Computer bietet eine weitere, möglicherweise noch bedeutendere Möglichkeit der wissenschaftlichen Arbeit.

Viele mathematische Fragestellungen oder physikalische Gesetze sind einer rein analytischen Behandlung oftmals nicht zugänglich. Gerade für den Fall nichtlinearer Bewegungsgleichungen ist es in der Regel nicht möglich, geschlossene Lösungen zu ermitteln. Eine numerische Lösung dagegen ist jedoch nicht selten mit den Mitteln moderner Computer zu berechnen. Oftmals ist dieser Zugang sogar die einzige Möglichkeit, bestimmte physikalische Größen zugänglich zu machen. Damit ist der Computer nicht mehr allein für die Auswertung experimenteller Daten zuständig, sondern bietet durch Simulation die Möglichkeit, physikalische Experimente durchzuführen. Große Vorteile dieser Herangehensweise sind die nahezu perfekte Reproduzierbarkeit gewonnener Daten und die Tatsache, dass durch geeignete Diagnostiken Messgrößen zugänglich sind, die in realen Experimenten nur schwer zu bestimmen sind. Darüber hinaus ist es möglich, mit Computern physikalische Zusammenhänge in ungeahnter Anschaulichkeit zu visualisieren. Somit kann der Computer nicht nur dazu dienen, physikalische Gesetze zugänglich zu machen, sondern ermöglicht es zusätzlich, die physikalische Intuition zu schulen. Insgesamt bietet der Computer durch die Methode der Simulation ein Hilfsmittel von unschätzbarem Wert zur Überprüfung theoretischer Vorhersagen und Visualisierung komplexer Zusammenhänge. Im Idealfall führen diese Möglichkeiten sogar zu neuen Denkanstößen bei der Weiterentwicklung bestehender physikalischer Theorien.

Die numerische Behandlung physikalischer Gleichungen ist ein komplexes Handwerk, und jeder, der selbst einmal ein etwas aufwändigeres numerisches Problem zu lösen versucht hat, weiß, dass die Anzahl möglicher Fehlerquellen nahezu unbegrenzt ist. Äußerste Sorgfalt und allzeit skeptische Überprüfung der eigenen Programme und der damit erzeugten Daten bestimmen daher letztlich die wissenschaftliche Qualität der Ergebnisse. Zudem sollte man nicht vergessen, dass die von Rechnern ermittelte Lösung von Bewegungsgleichungen immer nur approximativ ist, d.h. man macht gegenüber der mathematisch korrekten Lösung einen Fehler. Diesen Fehler einzuschätzen, zu kontrollieren und so weit wie möglich zu minimieren, gehört zum Handwerk der Numerik. Für eine hohe Qualität der erzeugten Daten ist es daher unabdingbar, dieser Problematik so tief wie möglich auf den Grund zu gehen.

Viele der in dieser Arbeit vorgestellten Ergebnisse sind numerisch erzeugt oder Ergeb-

nis direkter numerischer Simulation (DNS). Unter direkter numerischer Simulation versteht man in diesem Zusammenhang die numerische Lösung einer physikalischen Grundgleichung. Neben der Auswertung und der physikalischen Interpretation der Ergebnisse bestand ein beträchtlicher Teil der Arbeit darin, die betreffenden Programme zu schreiben und zu überprüfen. Letztgenannter Punkt erwies sich dabei als der zeitintensivere. Um diese Arbeit und die damit in Zusammenhang stehende Sorgfalt zu dokumentieren, dient dieses Kapitel. Darüberhinaus möchte es dem interessierten Neuling einen ersten Anhaltspunkt zum Einstieg in das Gebiet der Computersimulation liefern. Nicht selten haben sich für den Verfasser nämlich gerade Diplom- oder Doktorarbeiten als wertvolle und dem Neuling verständliche Quellen erwiesen.

Im Folgenden soll die konzeptionelle Entwicklung des Simulationscodes bis hin zu numerischen Tests Schritt für Schritt erläutert werden. Das fertige Programm soll die Wirbeltransportgleichung lösen und es ermöglichen, Lagrangesche Testteilchen in der Strömung zu verfolgen. Entlang ihrer Bahnen sollen die Geschwindigkeit, die Beschleunigung und die Vortizität aufgezeichnet werden.

Das Kapitel ist wie folgt organisiert: Nach einer kurzen Einführung in die verwendeten Zeitschrittverfahren wird die Lösung partieller Differentialgleichungen mittels des Pseudospektralverfahrens am Beispiel der Wirbeltransportgleichung erläutert. Im Weiteren werden zwei Verfahren zur kubischen Interpolation zweidimensionaler Felder auf äquidistanten Gittern diskutiert. Im Anschluss wird der generelle Aufbau des Programms zur Lösung der zweidimensionalen Wirbeltransportgleichung vorgestellt. Nach einer kurzen Diskussion der Grenzen der Numerik werden dann verschiedene Tests zur Bestimmung und Absicherung der numerischen Qualität vorgestellt.

## A.1 Zeitschrittverfahren

In diesem Abschnitt soll das benutzte Zeitintegrationsverfahren kurz vorgestellt werden. Dieses sogenannte Runge-Kutta-Verfahren wird in der direkten numerischen Simulation und zur Integration der Bewegungsgleichung des Wirbelmodells (s. Kapitel 4) benutzt. Es zeichnet sich durch einfache Implementation und hohe numerische Stabilität sowie Genauigkeit aus.

Die allgemeine Struktur von Bewegungsgleichungen lautet

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}). \quad (\text{A.1})$$

Dabei kann  $\boldsymbol{x}$  ein Skalar, ein Vektor oder ein Feld sein. Der Punkt deutet dabei die Zeitableitung an. Die Funktion  $\boldsymbol{f}$  kann dabei auch skalar, vektorwertig oder wie z.B im Falle der Navier-Stokes-Gleichung ein nichtlinearer Differentialoperator sein. Um diese Gleichung nun numerisch zu integrieren, muss die Zeit diskretisiert werden.

Zur Anschauung soll kurz das Eulerverfahren hergeleitet werden. Um zu einer diskretisierten Gleichung zu gelangen, kann der Differentialquotient durch den Differenzenquotienten approximiert werden:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\boldsymbol{x}(t + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t)}{\Delta t} \approx \frac{\boldsymbol{x}(t + \Delta t) - \boldsymbol{x}(t)}{\Delta t}. \quad (\text{A.2})$$

Zusammen mit Formel (A.1) ergibt sich

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \Delta t \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (\text{A.3})$$

Diese Formel kann dann iteriert werden und liefert eine approximative Lösung der Gleichung (A.1). Der Fehler, der bei der Verwendung dieser Methode entsteht, ist von der Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ ; man spricht daher von einer Genauigkeit erster Ordnung. Obgleich es sehr intuitiv ist, ist dieses Verfahren jedoch in der Regel keine gute Wahl, da andere Verfahren genauer und numerisch stabiler sind. Selbst wenn das Argument der Genauigkeit oftmals nicht entscheidend erscheint, muss man sich klarmachen, dass ein Verfahren höherer Ordnung die Möglichkeit bietet, den Zeitschritt bei gleichem Fehler wesentlich größer zu wählen. Man spart dadurch effektiv Rechenzeit. Zu weitergehenden Betrachtungen sei der Leser an [PFTV86] verwiesen. Der Verfasser folgt in den kommenden Zeilen diesem Buch.

Die nächst einfachere Möglichkeit, dieses Verfahren zu verbessern, ist, einen zweischrittigen Algorithmus einzuführen. Anstatt mit dem zum Zeitpunkt  $t$  ermittelten Funktionswert  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$  einen Schritt über das volle Intervall zu machen, kann man sich auch mit halber Schrittweite in die Mitte des Intervalls vortasten und dort den Wert von  $\mathbf{f}$  evaluieren. Nun kann man ausgehend vom ursprünglichen Punkt  $\mathbf{x}(t)$  den Zeitschritt  $\Delta t$  mit dem neu ermittelten Wert von  $\mathbf{f}$  durchführen. Man kann mathematisch zeigen, dass sich bei diesem Verfahren die Genauigkeit um eine Ordnung auf zwei erhöht.

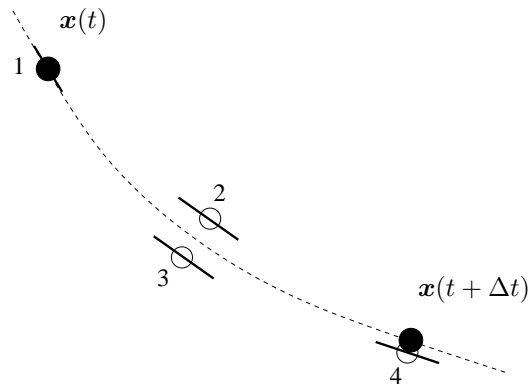
Eine Verallgemeinerung dieses Prinzips stellt das Runge-Kutta-Verfahren vierter Ordnung dar, das sogar eine Genauigkeit vierter Ordnung aufweist, d.h. der Fehler ist von Ordnung  $\mathcal{O}(\Delta t^5)$ . Damit wiegt es die Nachteile des Eulerverfahrens auf, ohne schwieriger zu implementieren zu sein. In einfachen Worten ausgedrückt lautet der Algorithmus:

1. Bestimme  $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t))$ .
2. Mache ausgehend vom Punkt  $\mathbf{x}(t)$  einen halben Zeitschritt  $\Delta t/2$  und ermittle dort  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \Delta t/2))$ .
3. Mache ausgehend vom Punkt  $\mathbf{x}(t)$  einen halben Zeitschritt  $\Delta t/2$  mit dem neu ermittelten Wert  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \Delta t/2))$  und ermittle dort ein neues  $\mathbf{k}_3 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \Delta t/2))$ .
4. Benutze nun dieses  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \Delta t/2))$ , um einen vollen Zeitschritt  $\Delta t$  zu machen, und bestimme  $\mathbf{k}_4 = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t + \Delta t))$ .

Der gewünschte Wert  $\mathbf{x}(t + \Delta t)$  ergibt sich dann als gewichtete Summe dieser vier evaluierten Funktionswerte:

$$\mathbf{x}(t + \Delta t) = \mathbf{x}(t) + \frac{\Delta t}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) + \mathcal{O}(\Delta t^5). \quad (\text{A.4})$$

Abbildung (A.1) verdeutlicht dieses Vorgehen.



**Abbildung A.1:** Schematische Darstellung des Runge-Kutta-Algorithmus. Skizze analog zu [PFTV86].

## A.2 Pseudospektralverfahren

### Einführung

Das pseudospektrale Verfahren bietet eine einfache und leistungsstarke Möglichkeit, partielle Differentialgleichungen numerisch zu integrieren. Besonders periodische Randbedingungen sind einfach zu realisieren.<sup>1</sup> Das Pseudospektralverfahren macht sich Eigenschaften der Fouriertransformation zu Nutze, was nun kurz erläutert werden soll. Der tiefgehend interessierte Leser sei auf [CHQZ87], [Boy00] und die Diplomarbeit [Zeg05] hingewiesen.

Die Fouriertransformation eines zweidimensionalen skalaren Feldes  $f(\mathbf{x}, t)$  ist definiert als

$$\hat{f}(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.5})$$

mit der entsprechenden Umkehrung

$$f(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \hat{f}(\mathbf{k}, t); \quad (\text{A.6})$$

$\mathbf{k}$  bezeichnet dabei die zweidimensionalen Wellenvektoren. Unter der Annahme periodischer Randbedingungen vereinfacht sich das Integral (A.6) zu einer Reihe, da nur noch diskrete Wellenvektoren  $\mathbf{k}_{ij}$  angenommen werden können,

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,j=-\infty}^{\infty} c_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij}\cdot\mathbf{x}}, \quad (\text{A.7})$$

mit zu bestimmenden Fourierkoeffizienten  $c_{ij}$ . Falls das Integrationsgebiet  $[2\pi \times 2\pi]$  beträgt, bestehen die Komponenten der Wellenvektoren aus ganzen Zahlen. Bisher sind

<sup>1</sup>Dieses Verfahren ist nicht auf periodische Randbedingungen beschränkt, allerdings ist es ungleich komplizierter komplexere Geometrien zu berücksichtigen.

alle Relationen exakt. Die Vereinfachung vom Integral zur Reihe bedeutet also keine Näherung, sondern ist lediglich eine Konsequenz der periodischen Randbedingungen. Die Einfachheit einer spektralen Methode besteht zum Teil darin, dass Ableitungen sehr einfach berechnet werden können. So gilt z.B. für die Übersetzung einer Ortsableitung in den Fourierraum der Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{x}) \xrightarrow{\mathcal{F}} i k_x \hat{f}(\mathbf{k}), \quad (\text{A.8})$$

wie leicht an Gleichung (A.7) abgelesen werden kann. Auch dieser Zusammenhang ist exakt, es entsteht hier also kein Diskretisierungsfehler wie z.B. bei der Methode der finiten Differenzen.

Wie auch die Zeit, so muss zur numerischen Integration auch der Ortsraum diskretisiert werden. Dazu wird das kontinuierliche Feld nur an diskreten Gitterpunkten berechnet. Durch diese Diskretisierung können im Fourierraum nur eine endliche Anzahl von Frequenzen aufgelöst werden, wodurch sich die Reihe (A.7) zu einer endlichen Summe vereinfacht,

$$f(\mathbf{x}, t) = \sum_{i,j=-n}^n c_{ij} e^{i\mathbf{k}_{ij} \cdot \mathbf{x}}. \quad (\text{A.9})$$

Beträgt die Anzahl der Gitterpunkte in einer Dimension  $d$ , so gilt  $n = \frac{d}{2}$ . Diese Diskretisierung führt zu potentiellen Fehlern und der Tatsache, dass nicht mehr beliebig feine Strukturen im Ortsraum aufgelöst werden können. Dieses Problem wird im Abschnitt A.6 weiter diskutiert.

Das Pseudospektralverfahren kann z.B. benutzt werden, um eine Gleichung der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) = \mathcal{L}(f(\mathbf{x}, t)) + \mathcal{N}(f(\mathbf{x}, t)) \quad (\text{A.10})$$

numerisch zu integrieren.  $\mathcal{L}$  bezeichnet dabei einen linearen Differentialoperator, während  $\mathcal{N}$  einen nichtlinearen Differentialoperator bezeichnet. Durch Fouriertransformation bezüglich der Ortskoordinate geht die Gleichung über in

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\mathbf{k}, t) = \hat{\mathcal{L}}(\hat{f}(\mathbf{k}, t)) + \mathcal{F}\{\mathcal{N}(f(\mathbf{x}, t))\}. \quad (\text{A.11})$$

Die Größen mit Hut bezeichnen dabei die fouriertransformierten Größen, während  $\mathcal{F}$  die durchzuführende Fouriertransformation andeutet. Die Fouriertransformation der Nichtlinearität kann nicht einfach durchgeführt werden. Eine Nichtlinearität, wie beispielsweise ein Produkt, wird zu einer Faltung im Fourierraum, die numerisch nur aufwändig zu bestimmen ist. Daher berechnet man die einzelnen Komponenten der Nichtlinearität im Fourierraum, transformiert diese dann zurück in den Ortsraum und führt dort die Multiplikation durch. Das gebildete Produkt kann dann wieder in den Fourierraum rücktransformiert werden. Da bei diesem Vorgehen die Größen nicht rein spektral berechnet werden, sondern auch Operationen im Ortsraum durchgeführt werden, spricht man von einem *Pseudospektralverfahren*. Der numerische Aufwand (die benötigte Rechenzeit)

dieser Methode wird in den meisten Fällen durch die diskrete Fouriertransformation verursacht. Durch den FFT-Algorithmus skaliert der Rechenaufwand dieses Verfahrens mit dem Faktor  $N \log N$ , wobei  $N = d^2$  der Anzahl der Gitterpunkte entspricht.

Die rechte Seite der Gleichung kann also gemäß dem Pseudospektralverfahren bestimmt werden. Die Zeitintegration kann mit den eben vorgestellten Methoden durchgeführt werden. Die in dieser Arbeit benutzten Programme nutzen dabei alle den Runge-Kutta-Algorithmus vierter Ordnung. Um einen Zeitschritt durchzuführen, muss also die rechte Seite der Gleichung viermal an den oben genannten Stützstellen bestimmt werden.

### Integration der Wirbeltransportgleichung

Die Wirbeltransportgleichung in zwei Dimensionen lautet (s. Kapitel 2)

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) = -(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \omega(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.12})$$

Bei  $\omega(\mathbf{x}, t)$  handelt es sich dabei um die skalare Vortizität,  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  bezeichnet die zweidimensionale Geschwindigkeit. Der konvektive Teil der Ableitung stellt in dieser Gleichung die Nichtlinearität dar. Durch Fouriertransformation geht diese Gleichung nun über in

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) = \mathcal{F}\{-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t)\} - \nu k^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.13})$$

Die Divergenzfreiheit des Geschwindigkeitsfeldes sichert in zwei Dimensionen die Existenz einer Stromfunktion  $\psi$ , die mit der Vortizität über eine Poissongleichung zusammenhängt,

$$\Delta \psi(\mathbf{x}, t) = -\omega(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.14})$$

Der Zusammenhang zur Geschwindigkeit ergibt sich mit

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \times \psi(\mathbf{x}, t) \mathbf{e}_z \quad , \text{d.h.} \quad u_x = \frac{\partial}{\partial y} \psi(\mathbf{x}, t) \quad \text{und} \quad u_y = -\frac{\partial}{\partial x} \psi(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.15})$$

Während die Berechnung des Diffusionsterms aus Gleichung (A.13) direkt abzulesen ist, erfolgt die Berechnung der Nichtlinearität schrittweise. Die Nichtlinearität lautet in Komponenten

$$(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \omega(\mathbf{x}, t) = \left( u_x(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + u_y(\mathbf{x}, t) \frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \right). \quad (\text{A.16})$$

Um nun die Geschwindigkeitskomponenten zu berechnen wird zunächst aus der Vortizität die Stromfunktion berechnet. Im Fourierraum lässt sich der Laplaceoperator einfach invertieren und man erhält

$$\hat{\psi}(\mathbf{k}, t) = \frac{\hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2}. \quad (\text{A.17})$$

Die einzelnen Komponenten der Geschwindigkeit ergeben sich im Fourierraum damit zu

$$\hat{u}_x(\mathbf{k}, t) = i k_y \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u_x(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.18})$$

$$\hat{u}_y(\mathbf{k}, t) = -i k_x \hat{\psi}(\mathbf{k}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u_y(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.19})$$

Für die Nichtlinearität sind des Weiteren die Ableitungen der Vortizität zu bestimmen,

$$i k_x \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \quad (\text{A.20})$$

$$i k_y \hat{\omega}(\mathbf{k}, t) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial \omega(\mathbf{x}, t)}{\partial y}. \quad (\text{A.21})$$

Wie bereits erwähnt, kann nach der Rücktransformation in den Ortsraum die Multiplikation der einzelnen Faktoren durchgeführt werden. Nach anschließender Transformation zurück in den Fourierraum liegt dann die spektrale Nichtlinearität vor. An dieser Stelle kann es zu Aliasing-Fehlern kommen. Dieser Effekt wird im Abschnitt A.3 diskutiert.

### Bestimmung der Beschleunigung

Da auch die Beschleunigung entlang der Trajektorien bekannt sein soll, muss die Beschleunigung berechnet werden. Das kann durch die Differentiation der Geschwindigkeiten entlang der Teilchenbahnen geschehen. Alternativ kann man die rechte Seite der Navier-Stokes-Gleichung berechnen,

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + (\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (\text{A.22})$$

Der Rechenaufwand hierfür ist äußerst hoch, allerdings ist dieses Verfahren genauer als die Differentiation der Trajektorien. Da die Beschleunigung auch nicht zum Iterieren der Gleichung benutzt wird, muss die Rechte-Hand-Seite nur einmal pro Zeitschritt (anstatt an den vier Stützstellen des Runge-Kutta-Verfahrens) ausgewertet werden. Das Vorgehen ist analog dem des letzten Abschnittes, man möchte die Gleichung im Fourierraum lösen. Die spektrale Darstellung der Navier-Stokes-Gleichung lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t) = -\mathcal{F}\{(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\} - i\mathbf{k} \hat{p} - \nu k^2 \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, t). \quad {}^2 \quad (\text{A.23})$$

Auch hier kann die Berechnung des Diffusionsterms direkt an der Gleichung abgelesen werden. Um den Druck zu berechnen, muss zunächst die Nichtlinearität bestimmt werden. Dies geschieht analog zum vorhergehenden Abschnitt. In Komponenten lautet sie

$$((\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))_x = u_x(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + u_y(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \quad (\text{A.24})$$

$$((\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))_y = u_x(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_y(\mathbf{x}, t)}{\partial x} + u_y(\mathbf{x}, t) \frac{\partial u_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y}. \quad (\text{A.25})$$

---

<sup>2</sup>Aus der Tatsache, dass der Diffusionsterm proportional zu  $k^2$  ist, ergibt sich, dass in einer Flüssigkeit zuerst die feinen Strukturen gedämpft werden.



Die einzelnen Komponenten berechnen sich dabei nach

$$\hat{u}_x(\mathbf{k}, t) = \frac{i k_y \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u_x(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.26})$$

$$\hat{u}_y(\mathbf{k}, t) = -\frac{i k_x \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} u_y(\mathbf{x}, t) \quad (\text{A.27})$$

$$i k_x \hat{u}_x(\mathbf{k}, t) = -\frac{k_x k_y \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \quad (\text{A.28})$$

$$i k_y \hat{u}_x(\mathbf{k}, t) = -\frac{k_y^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial u_x(\mathbf{x}, t)}{\partial y} \quad (\text{A.29})$$

$$i k_x \hat{u}_y(\mathbf{k}, t) = \frac{k_x^2 \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial u_y(\mathbf{x}, t)}{\partial x} \quad (\text{A.30})$$

$$i k_y \hat{u}_y(\mathbf{k}, t) = \frac{k_y k_x \hat{\omega}(\mathbf{k}, t)}{k^2} \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} \frac{\partial u_y(\mathbf{x}, t)}{\partial y}. \quad (\text{A.31})$$

Im Ortsraum kann dann wieder die Multiplikation durchgeführt werden, und nach einer weiteren Fouriertransformation der beiden Komponenten der Nichtlinearität liegt diese dann im Fourierraum vor. Wie man leicht aus der Navier-Stokes-Gleichung herleitet, genügt der Druck einer Poissongleichung,

$$\Delta p(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot ((\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)). \quad (\text{A.32})$$

Diese Gleichung ist im Fourierraum wieder einfach zu lösen. Das Ergebnis lautet

$$p = i \frac{k_x \mathcal{F}^{-1}\{((\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))_x\} + k_y \mathcal{F}^{-1}\{((\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t))_y\}}{k^2}. \quad (\text{A.33})$$

Damit ergeben sich die Komponenten des Beschleunigungsfeldes  $\hat{\mathbf{a}}(\mathbf{k}, t)$  nach

$$\hat{a}_x(\mathbf{k}, t) = -i k_x \hat{p}(\mathbf{k}, t) - \nu k^2 \hat{u}_x(\mathbf{k}, t) \quad (\text{A.34})$$

$$\hat{a}_y(\mathbf{k}, t) = -i k_y \hat{p}(\mathbf{k}, t) - \nu k^2 \hat{u}_y(\mathbf{k}, t). \quad (\text{A.35})$$

Zwei weitere Fouriertransformationen sind nötig, um das Feld im Ortsraum vorliegen zu haben.

## A.3 Stabilität des Verfahrens

Selbst wenn ein Programm fehlerfrei ist, heißt das nicht, dass es unter allen Umständen numerisch stabil laufen muss.<sup>3</sup> In jedem Fall ist eine Instabilität jedoch Indikator für eine schlechte numerische Qualität der erzielten Ergebnisse, denn bereits bevor es zu einem Programmabbruch durch eine numerische Instabilität kommt, ist der numerische Fehler in solch einem Fall schon vorher nicht mehr zu vernachlässigen. Ziel muss es daher sein, numerische Simulationen nur in Parameterbereichen durchzuführen, in denen die

<sup>3</sup>Dennoch sind Instabilitäten oftmals ein Hinweis auf nicht entdeckte Fehler.

Stabilität ausreichend getestet und gesichert ist. Dieser Abschnitt soll als Stabilitätskriterium die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung einführen. Desweiteren soll das Aliasing-Problem kurz erläutert werden. Unter Beachtung dieser beiden Punkte ist es möglich, die Navier-Stokes-Gleichung stabil zu integrieren. Weitere numerische Schwierigkeiten werden im Abschnitt A.6 diskutiert.

### Die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung

Die Courant-Friedrichs-Lewy-Bedingung bietet eine Abschätzung, wie groß ein Zeitschritt bei der numerischen Integration werden darf, um die Stabilität des Verfahrens zu sichern. Die Bedingung kann mathematisch rigoros abgeleitet werden, jedoch soll an dieser Stelle eine heuristische Begründung ausreichen.

Ausgangspunkt der Betrachtungen ist die einleuchtende Forderung, dass sich eine Information in einem Zeitschritt nicht weiter als einen Gitterpunkt bewegen soll; unter dieser Forderung bleibt das numerische Verfahren dann stabil. Im Falle der Navier-Stokes-Gleichung ist dieses Bild sogar besonders anschaulich, da hier das Geschwindigkeitsfeld bestimmt wird, man hier also tatsächlich von einer Informationsausbreitungsgeschwindigkeit sprechen kann. In diesem Fall lautet die Forderung nämlich, dass der Zeitschritt so klein sein soll, dass eine Information nicht weiter als einen Gitterpunkt mit dem Geschwindigkeitsfeld bewegt werden darf. Als Konsequenz bedeutet das, dass ein Feld, das höhere Geschwindigkeiten aufweist als ein anderes, mit einem kleineren Zeitschritt zu simulieren ist. Abbildung A.2 illustriert dies. Information kann bei der Navier-Stokes-Gleichung entweder durch Advektion oder Diffusion transportiert werden, was zu zwei unabhängigen Bedingungen an den Zeitschritt führt. Diese Bedingungen an den Zeitschritt können dann genutzt werden, um eine adaptive Schrittweitenkontrolle durchzuführen.

Sei  $\Delta x$  der kleinste Gitterabstand. Für den Fall, dass das simulierte physikalische Grundgebiet eine Seitenlänge von  $2\pi$  besitzt und das Gitter mit  $d^2$  vielen Punkten aufgelöst ist, gilt  $\Delta x = \frac{2\pi}{d}$ . Die Bedingung soll global für das ganze Feld gelten. Man definiert daher

$$u_{\max} = \max\{|u_x|, |u_y|\} \quad (\text{A.36})$$

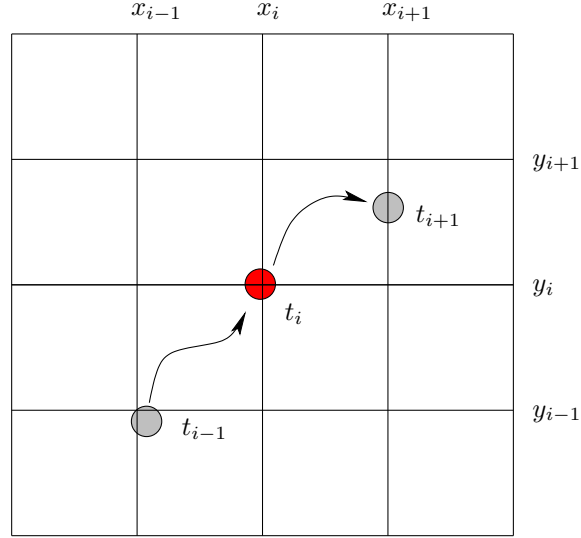
als Maximum des Betrags der beiden Geschwindigkeitskomponenten über alle Gitterpunkte. Der Gitterabstand  $\Delta x$  soll nun kleiner sein als der Weg, den eine Information advektiert werden kann, also

$$\Delta x < u_{\max} \Delta t_{\text{adv}} \quad \implies \quad 1 < \frac{u_{\max} \Delta t_{\text{adv}}}{\Delta x}. \quad (\text{A.37})$$

Dies kann man natürlich auch als Anforderung an den Zeitschritt formulieren. Definiert man  $\lambda$  als die Courant-Zahl, so lautet Bedingung (A.37) umformuliert

$$\Delta t_{\text{adv}} = \frac{\Delta x \lambda}{u_{\max}} = \frac{2\pi \lambda}{u_{\max} d}. \quad (\text{A.38})$$

Das Verfahren ist in diesem Fall genau dann numerisch stabil, falls  $\lambda < 1$  gilt. Der zweite Transportmechanismus in der Navier-Stokes-Gleichung ist die Diffusion. Für eine Menge



**Abbildung A.2:** Schematische Darstellung der CFL-Bedingung. Eine Information (z.B. in Form eines Lagrangeteilchens) befindet sich zum Zeitpunkt  $t_i$  an der Position  $(x_i, y_i)$ . Der gewählte Zeitschritt  $\Delta t$  muss so klein sein, dass die Information während eines Zeitschrittes nicht weiter als eine Zelle gelangen darf. In dieser Skizze ist der Zeitschritt also noch etwas zu groß gewählt.

von Partikeln, die einer Diffusionsgleichung in zwei Dimensionen mit Diffusionskonstante  $D$  unterliegt, gilt das bekannte Diffusionsgesetz

$$\langle x^2 \rangle = 4 D t. \quad (\text{A.39})$$

Als typischen Weg, den ein Teilchen im Mittel zurücklegt, kann die Wurzel dieses Ausdrucks angesehen werden. Im Falle der Navier-Stokes-Gleichung gilt  $D = \nu$ . Für einen einzelnen Zeitschritt gilt dann die Bedingung

$$\Delta x^2 > 4 \nu \Delta t_{\text{diff}} \implies 1 > \frac{4 \nu \Delta t_{\text{diff}}}{\Delta x^2}. \quad (\text{A.40})$$

Analog der obigen Argumentation erhält man nach Einführung der Courant-Zahl als zweites Kriterium

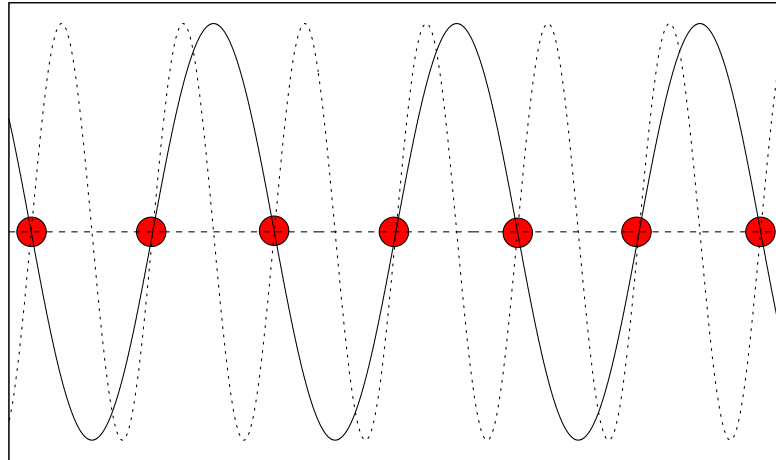
$$\Delta t_{\text{diff}} = \frac{\Delta x^2 \lambda}{4 \nu} = \frac{\pi^2 \lambda}{d^2 \nu}. \quad (\text{A.41})$$

Stabilität ist auch hier gewährleistet, falls  $\lambda < 1^4$ . Der insgesamt gesuchte Zeitschritt ergibt sich dann als

$$\Delta t = \min\{\Delta t_{\text{adv}}, \Delta t_{\text{diff}}\}. \quad (\text{A.42})$$

Damit ist effektiv eine adaptive Schrittweitenkontrolle erreicht. Für die statistische Auswertung der Trajektorien (z.B. Bestimmung von Geschwindigkeitsinkrementverteilungen)

<sup>4</sup>Zwar reicht es,  $\lambda$  nur etwas kleiner als eins zu wählen, damit das Verfahren stabil bleibt, allerdings wird in Abschnitt A.6 klar, dass ein deutlich kleiner als eins gewähltes  $\lambda$  die numerische Qualität der Lagrangetrajektorien beträchtlich verbessern kann.



**Abbildung A.3:** Fehlinterpretation durch Aliasing. Die roten Punkte symbolisieren die diskreten Gitterpunkte. Die schwarze Linie zeigt den Sinus höchster Frequenz, der durch dieses Gitter aufgelöst werden kann. Der gestrichelte Sinus zeigt einen Sinus doppelter Frequenz, der fehlinterpretiert wird; die zusätzlichen Nulldurchgänge können vom Gitter nicht aufgelöst werden.

ist hingegen ein fester Zeitschritt von Vorteil. Daher wurde in der Praxis zunächst mit der adaptiven Schrittweitenkontrolle die zeitliche Entwicklung der Schrittweite  $\Delta t$  beobachtet. Nach einiger Zeit wurde die Simulation dann abgebrochen und als feste Schrittweite ein Zeitschritt gewählt, der kleiner als alle beobachteten war. Dieses Verfahren ist in sofern gerechtfertigt, dass im Falle der untersuchten Wirbelstrukturen und der zerfallenden Turbulenz in der Regel das erste CFL-Kriterium (A.38) greift. Durch das zeitliche Abklingen der Vortizität und des Geschwindigkeitsfeldes ist der Zeitschritt bis auf Fluktuationen eine wachsende Funktion der Zeit. Das zweite CFL-Kriterium (A.41) kommt besonders bei hohen Viskositäten oder bei extrem langer Integrationsdauer, d.h. wenn Geschwindigkeitsfeld schon fast in den Gleichgewichtszustand relaxiert ist, zum Tragen.

### Aliasing

Ein weiterer Effekt, der zu Instabilitäten führen kann, ist das Aliasing. Hierbei handelt es sich um einen Diskretisierungsfehler. Da das simulierte Geschwindigkeitsfeld nicht kontinuierlich, sondern nur auf gewissen, diskreten Gitterpunkten bekannt ist, gibt es auch eine kleinste Struktur im Ortsraum, die aufgelöst werden kann. Zu der Länge dieser Struktur korrespondiert im Fourierraum eine größte Wellenzahl. Wird aus irgendeinem Grund durch die Numerik in der spektralen Domäne eine Wellenzahl erzeugt, die oberhalb dieser höchsten auflösbaren Wellenzahl steht, so wird diese als eine tiefere Wellenzahl fehlinterpretiert, wie Abbildung A.3 verdeutlicht. Dadurch wird Energie aus einem physikalisch nicht aufgelösten Bereich in niedrige Wellenzahlen transferiert, was dann zu einem *blow up* der Lösung führen kann.

Alle linearen Operationen, wie z.B. räumliche Ableitungen, können im Fourierraum nicht zu Beiträgen zu anderen Wellenvektoren als den eigenen führen, wie z.B. an Gleichung

chungen (A.7) und (A.8) abgelesen werden kann. Durch diese linearen Operationen können folglich keine höheren Frequenzen entstehen, die dann fehlinterpretiert werden können. Anders ist es bei der quadratischen Nichtlinearität der Gleichung. Der Einfachheit halber wird hier nun der eindimensionale Fall mit einem zugrundeliegenden Simulationsgebiet von  $[0, 2\pi]$  und einer Anzahl von Gitterpunkten  $d$  betrachtet. Die Wellenzahlen der Fourierreihenentwicklung werden dann ganzzahlig und es gilt:

$$u(x, t) = \sum_{j=-d/2}^{d/2} c_j e^{ijx} \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \sum_{j=-d/2}^{d/2} ij c_j e^{ijx}. \quad (\text{A.43})$$

Die quadratische Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung ist von der Form

$$u(x, t) \frac{\partial}{\partial x} u(x, t) = \sum_{j,k=-d/2}^{d/2} c_j ik c_k e^{i(j+k)x}. \quad (\text{A.44})$$

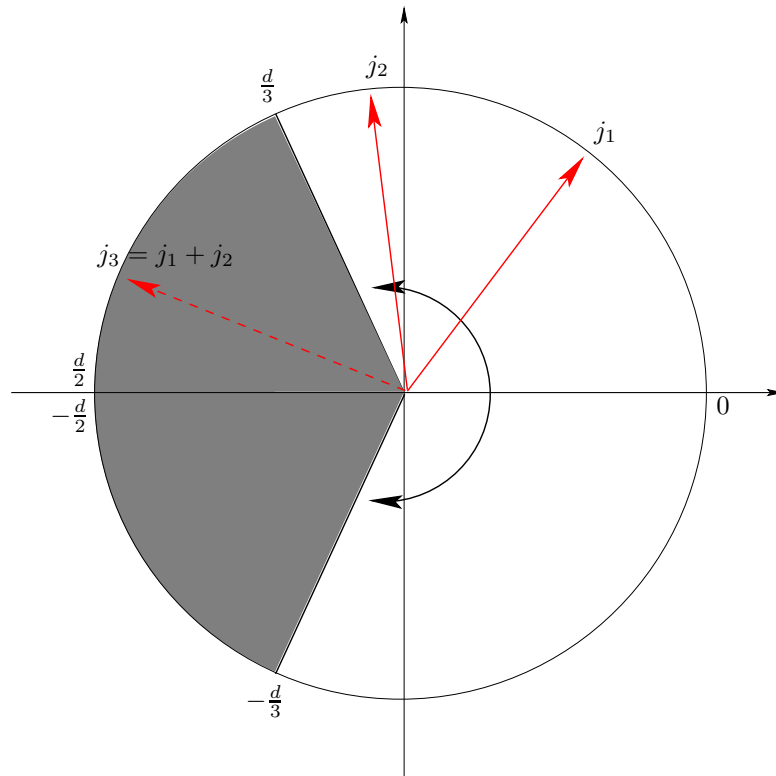
An der Addition im Exponenten kann man ablesen, dass der Bereich der möglichen Frequenzen nun auf  $[-d, d]$  erweitert wird. Da das Gitter diese Frequenzen jedoch nicht auflösen kann, werden die Frequenzen außerhalb des Intervalls  $[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}]$  fehlinterpretiert.

Die Lösung dieses Problems wird durch sogenanntes De-Aliasing erreicht, dabei werden die Fourierkomponenten aller Wellenzahlen, die durch die Nichtlinearität zu problematischen höheren Wellenzahlen beitragen könnten, zu Null gesetzt. Das Nullen von Fourierkomponenten höherer Wellenzahlen erniedrigt jedoch die effektive Auflösung, so dass man versucht, möglichst kleine Bereiche zu trunkieren. Eine weit verbreitete Technik ist die 2/3-Regel von Orszag. Diese erweist sich zwar nicht als optimale Methode hinsichtlich der resultierenden effektiven Auflösung, ist jedoch hinreichend gut und darüber hinaus einfach zu implementieren (s. auch [Boy00]). Sei  $k_{\max}$  die höchste aufgelöste Wellenzahl, dann sieht die 2/3-Regel vor, alle Fourierkomponenten der Wellenzahlen mit  $|k| \geq \frac{2}{3} k_{\max}$  auf Null zu setzen. Im Falle des obigen Beispiels gilt das für alle Wellenzahlen  $j$  mit  $j \geq \frac{d}{3}$ . Anhand der Skizze A.4 macht man sich klar, dass durch dieses Nullen der Wellenzahlen im Falle einer quadratischen Nichtlinearität der Form (A.44) keine Aliasingeffekte mehr auftreten können.

## A.4 Kubische Interpolation

Die statistischen Auswertungen dieser Arbeit beziehen sich hauptsächlich auf Lagrange-Größen. Wie eingangs erwähnt sollen die Orte, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und Vortizitäten entlang der Teilchentrajektorien aufgezeichnet werden. Da sich ein Lagrangeteilchen im Allgemeinen nicht auf einem Gitterpunkt befindet, müssen die interessierenden Größen aus den benachbarten Gitterpunkten interpoliert werden. Einführende Kapitel zu diesem Thema finden sich in [PFTV86]. Ein ausführlicher Vergleich verschiedener Interpolationsschemata wird in [YP88] angestellt.

Bei jedem Zeitschritt kommt es bei der Interpolation zu einem Fehler. Dieser Interpolationsfehler resultiert beispielsweise darin, dass ein Lagrangeteilchen an einen etwas



**Abbildung A.4:** 2/3-Regel von Orszag. Die Werte der komplexen Exponentialfunktion liegen auf dem Einheitskreis. Die Multiplikation zweier Exponentialfunktionen entspricht in dieser Polardarstellung einer Addition zweier Winkel. Schematisch angedeutet ist die Lage der Wellenzahlen. Der grau schraffierte Bereich kennzeichnet den Teil der Wellenzahlen, für den die Fourierkomponenten  $c_j$  auf Null gesetzt werden. Als Beispiel wird die Addition zweier Wellenzahlen  $j_1$  und  $j_2$  dargestellt. Die resultierende Wellenzahl fällt in den verbotenen Bereich, und der entsprechende Fourierkoeffizient wird auf Null gesetzt.

falschen Ort fortbewegt wird. Gerade für Untersuchungen zu ortsabhängigen Größen wie Diffusion kann es dadurch zu erheblichen Fehlern kommen, gerade wenn Mehrteilchenstatistiken betrachtet werden. Der Wahl des Interpolationsschemas muss besondere Aufmerksamkeit geschenkt werden. Die Autoren von [Yeu01] kommen zu dem Ergebnis, dass lineare Interpolation inadäquat ist. Weit verbreitet ist die Einschätzung, dass kubische Splines für eine hohe numerische Qualität bürgen, allerdings sind diese recht aufwändig zu berechnen. Einen guten Kompromiss zwischen Rechenaufwand und numerischer Qualität stellen kubische Polynome dar. In diesem Abschnitt sollen kurz zwei Verfahren aus [PFTV86] vorgestellt werden, nämlich die kubische zweidimensionale und die bikubische Polynominterpolation. Beide Verfahren arbeiten mit Polynomen dritten Grades, verfolgen dabei jedoch einen unterschiedlichen Ansatz.

### Zweidimensionale kubische Polynominterpolation

Die kubische zweidimensionale Interpolation führt zwei eindimensionale Interpolationen durch. Dazu wird zunächst in einer Richtung anhand von vier umgebenen Stützstellen ein kubisches Polynom bestimmt. Das geschieht mit dem Newtoninterpolationsverfahren. Dieses arbeitet mit sogenannten höheren Steigungen, welche iterativ definiert sind durch

$$[x_i] = y_i \tag{A.45}$$

$$[x_i, x_{i+1}] = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} \tag{A.46}$$

$$[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{[x_{i+2}, x_{i+1}] - [x_i, x_{i+1}]}{x_{i+2} - x_i} \tag{A.47}$$

$$\dots \tag{A.48}$$

Man erkennt leicht, dass es sich bei diesen höheren Steigungen um Sekantensteigungen, also letztlich um diskretisierte Ableitungen handelt. Folglich lässt sich das Polynom in einer Art diskreten Taylorreihe darstellen. Bei vier gegebenen Stützstellen  $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (x_4, y_4)\}$  einer Funktion  $f \in C^4$  ergibt sich für den gesuchten Funktionswert  $f(x)$  an der Stelle  $x$

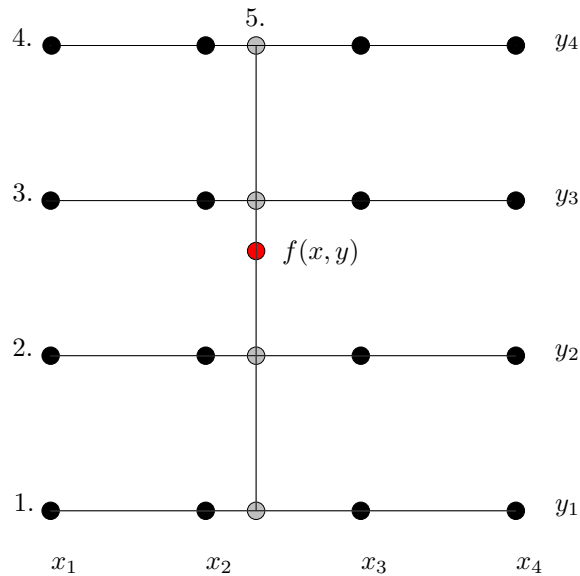
$$f(x) = [x_1] + [x_1, x_2](x - x_1) + [x_1, x_2, x_3](x - x_1)(x - x_2) \tag{A.49}$$

$$+ [x_1, x_2, x_3, x_4](x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) + R_5(x). \tag{A.50}$$

Bei  $R_5$  handelt es sich analog zur gewöhnlichen Taylorformel um das Restglied, das eine Abschätzung des Fehlers zulässt,

$$R_5 = \frac{1}{60} f^4(\zeta) (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4) \tag{A.51}$$

mit einem gewissen  $\zeta \in [x_1, x_4]$ . Das somit bestimmte Polynom ist eindeutig, daher entspricht es dem Polynom, das mit einem anderen Verfahren, z.B. der Lagrangeinterpolation, bestimmt wird.



**Abbildung A.5:** Algorithmus für die kubische zweidimensionale Interpolation. Die zweidimensionale Interpolation wird auf eindimensionale Interpolationen zurückgeführt (s. Text). Die eindimensionale Interpolation kann beispielsweise mit dem Newtonverfahren erfolgen.

Sei nun eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  an den Stützstellen  $\{(x_i, y_j); 1 \leq i \leq 4, 1 \leq j \leq 4\}$  gegeben. Gesucht ist der interpolierte Wert an der Stelle  $(x, y)$ . Um die eindimensionale Newtoninterpolation nun auf zwei Dimensionen zu erweitern, geht man wie folgt vor. Zunächst werden vier eindimensionale Interpolationen in  $x$ -Richtung durchgeführt:

1.  $\{(x_i, y_j); 1 \leq i \leq 4, j = 1\} \rightarrow f(x, y_1)$
2.  $\{(x_i, y_j); 1 \leq i \leq 4, j = 2\} \rightarrow f(x, y_2)$
3.  $\{(x_i, y_j); 1 \leq i \leq 4, j = 3\} \rightarrow f(x, y_3)$
4.  $\{(x_i, y_j); 1 \leq i \leq 4, j = 4\} \rightarrow f(x, y_4)$

Schließlich wird eine weitere Interpolation in  $y$ -Richtung durchgeführt:

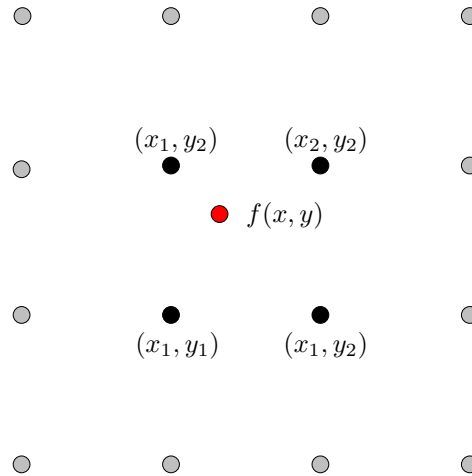
5.  $\{f(x, y_j); 1 \leq j \leq 4\} \rightarrow f(x, y)$ ,

Damit ist der gesuchte Funktionswert interpoliert, Abbildung A.4 verdeutlicht diesen Algorithmus. Dieses Verfahren liegt allen vorgestellten Simulationsergebnissen zu Grunde.

### Bikubische Interpolation

Das im obigen Abschnitt vorgestellte zweidimensionale Interpolationsverfahren wird auf ein eindimensionales Verfahren zurückgeführt. Vom mathematischen Ansatz her geht es also nicht von der Zweidimensionalität des Problems aus. Eine Folge ist, dass das Verfahren keine Mischterme der Variablen  $x$  und  $y$  berücksichtigt. Die Möglichkeit einer





**Abbildung A.6:** Für die bikubische Interpolation werden die Funktionswerte und Ableitungen an den vier umliegenden Gitterpunkten benötigt. Da die Ableitungen dort meistens nicht explizit bekannt sind, benötigt man weitere Gitterpunkte, um diese durch Bildung finiter Differenzen zu approximieren.

vollen zweidimensionalen Interpolation bietet das bikubische Verfahren, das hier nur kurz vorgestellt werden soll. Eingehendere Erklärungen finden sich in [PFTV86].

Bei der bikubischen Interpolation wird die Funktion  $f$  an der gesuchten Stelle  $(x, y)$  durch ein kubisches Polynom interpoliert. Für die Bestimmung des Polynoms benötigt man nur vier umliegende Gitterpunkte, an diesen müssen jedoch die Funktion selbst, die ersten Ableitungen  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  und die gemischte Ableitung  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$  bekannt sein. Wird das Polynom direkt an den einzelnen Gitterpunkten ausgewertet, ergeben sich diese vorgegebenen Werte. Das Verfahren erzwingt also eine Stetigkeit der Funktion selbst sowie der genannten Ableitungen. Da jedoch meist nur die Funktionswerte selbst, aber nicht ihre Ableitungen bekannt sind, braucht man letztlich doch die sechzehn umgebenden Gitterpunkte wie bei der kubischen zweidimensionalen Interpolation. Aus ihnen können dann durch Bildung finiter Differenzen die Ableitungen approximiert werden. Häufig formuliert man das Polynom in lokalen Koordinaten,

$$t = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \text{und} \quad (A.52)$$

$$u = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (A.53)$$

Das kubische Polynom in zwei Variablen lautet dann

$$f(x, y) = \sum_{i,j=1}^4 c_{ij} t^{i-1} u^{j-1}, \quad (A.54)$$

mit zu bestimmenden Koeffizienten  $c_{ij}$ . Bildet man von diesem Ausdruck die oben genannten Ableitungen, so entsteht ein einfaches lineares Gleichungssystem, aus dem man

die  $c_{ij}$  berechnen kann. Die Lösung soll hier nicht explizit angegeben werden. Diese Koeffizienten müssen lediglich einmal bestimmt werden und finden sich fest implementiert in der aus [PFTV86] entnommenen Routine.

Beide vorgestellten Interpolationsverfahren wurden implementiert. Die Subroutinen für die zweidimensionale kubische Interpolation wurden dabei neu entwickelt, diejenigen der bikubischen Interpolation wurden weitgehend aus [PFTV86] entnommen. Ziel des Vergleichs war es, die Ergebnisse auf Richtigkeit und numerische Qualität hin zu überprüfen. Insbesondere war fragwürdig, ob das erste vorgestellte Interpolationsverfahren aufgrund der Rückführung auf eindimensionale Interpolationsverfahren Vorzugsrichtungen besitzt. Eine weitere Frage war, ob die bei der bikubischen Interpolation auftretende Stetigkeit der Ableitung von Vorteil ist. Die Ergebnisse dieser Tests finden sich in Abschnitt A.6.

## A.5 Struktur des DNS-Codes

Dieses Kapitel soll den Aufbau des DNS-Codes erläutern. Das Programm zur numerischen Simulation der Wirbeltransportgleichung wurde in FORTRAN 90 geschrieben, die grafischen Ausgaben des Vortizitätsfeldes werden darin mit der Bibliothek DISLIN erledigt. Die Fouriertransformationen führt eine Subroutine aus der Intel Math Kernel Library (IMKL) durch. Wie im Abschnitt A.2 gesehen, entfällt ein erheblicher Anteil des numerischen Aufwands auf die Fouriertransformation, was zur Folge hat, dass die Rechenzeit des Programms hauptsächlich durch die Güte der Fouriertransformation bestimmt wird.

Abbildung A.5 zeigt den schematischen Aufbau des Programms in leicht vereinfachter Weise. Der Aufbau sei kurz erläutert.<sup>5</sup> Zunächst wird das Programm mit den Anfangsbedingungen für das Feld und die Lagrangeteilchen initialisiert. Dabei wird die Anfangsbedingung bereits dealiased, um eventuell auftretende zu hohe Moden zu entfernen. Auch das Feld der  $\mathbf{k}$ -Vektoren, das die spezielle Sortierung der FFT berücksichtigt, wird initialisiert. Dann wird die Runge-Kutta-Subroutine aufgerufen. Diese berechnet zunächst das Eulersche Geschwindigkeitsspektrum in einer gesonderten Subroutine, bevor es die Subroutine zur Berechnung der rechten Seite der Wirbeltransportgleichung aufruft. Diese Subroutine wird viermal für jedes  $\mathbf{k}_i$  aufgerufen. Im Falle von  $\mathbf{k}_1$  wird optional über das CFL-Kriterium ein geeigneter Zeitschritt bestimmt. Dann wird die Subroutine zur Interpolation der Geschwindigkeit entlang der Trajektorien aufgerufen, die ihrerseits die Subroutinen zur Polynominterpolation aufruft. Nach Verlassen der Runge-Kutta-Subroutine wird eine Subroutine zur Interpolation der Vortizität entlang der Trajektorien aufgerufen, die ihrerseits auf die Interpolationssubroutinen zurückgreift. Anschließend berechnet eine weitere Subroutine die Beschleunigung und interpoliert diese entlang der Trajektorien mittels der Interpolationssubroutinen. Dann wird die Subroutine für die Dateiausgabe der Trajektorien aufgerufen. Schließlich wird der Zeitschritt für das Feld und die Lagrangeteilchen unter Berücksichtigung der periodischen Randbedingungen durchgeführt. Innerhalb des Quelltextes sind an verschiedenen Stellen Diagnostiken für die Bestimmung der Gesamtenergie (aus dem Feld im Orts- sowie Fourierraum und aus den Lagrangeteil-

---

<sup>5</sup>Dieser und auch alle anderen Quelltexte finden sich auf der beiliegenden DVD.

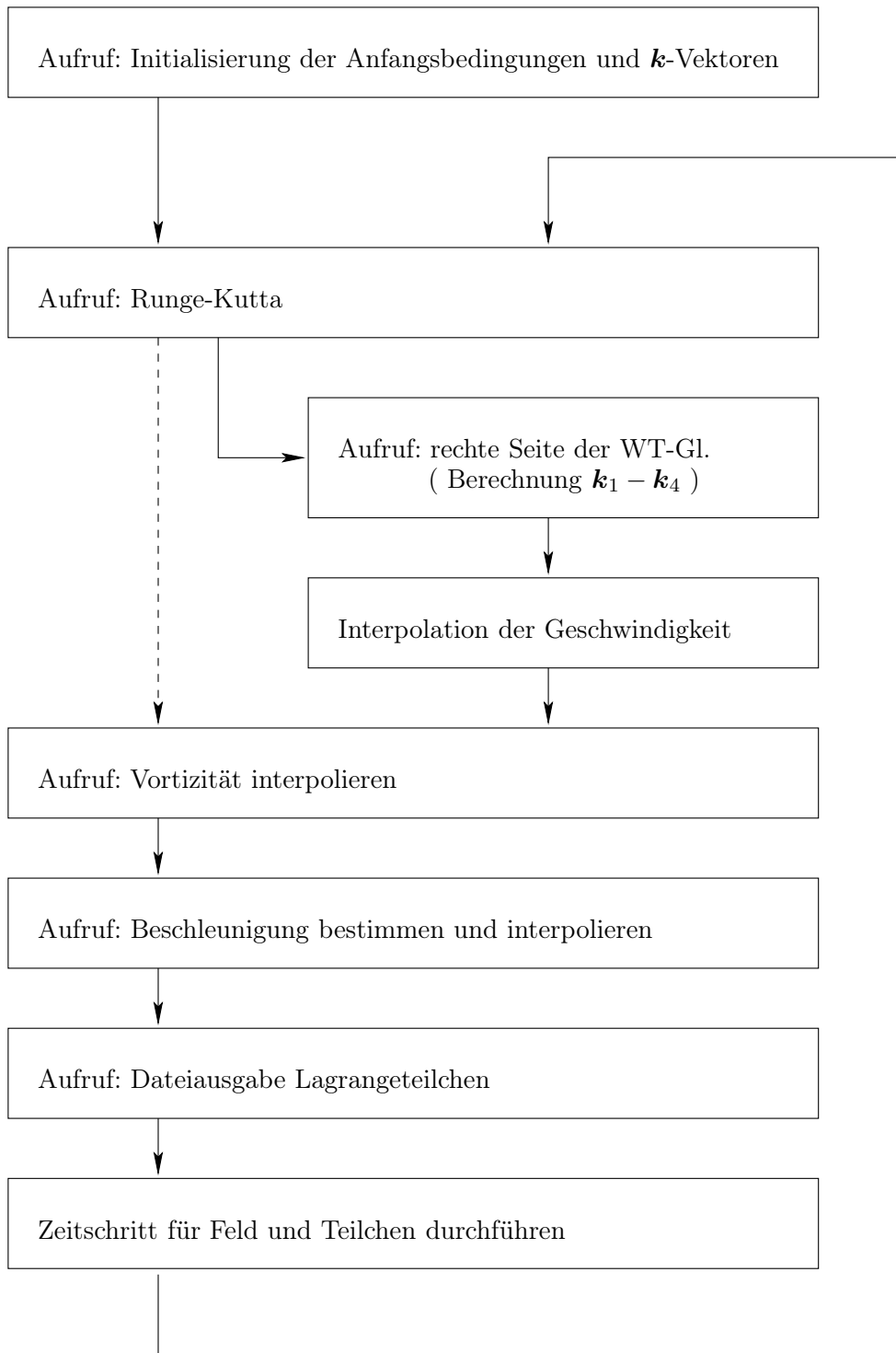


Abbildung A.7: Schematischer Aufbau des DNS-Codes.

chen), der Reynoldszahl etc., sowie zur grafischen Ausgabe des Vortizitätsfeldes und der Trajektorien eingearbeitet. Des Weiteren werden bei der Berechnung der Wirbeltransportgleichung alle Felder nötigenfalls dealiased.

## A.6 Grenzen der Numerik und Tests

Auch wenn die direkte numerische Simulation ein wertvolles Werkzeug ist, sollte man sich ihrer Grenzen bewusst sein. Wie bereits erläutert, unterliegen alle numerisch bestimmten Größen Fehlern, sei es verfahrensbedingt, aufgrund der Diskretisierung oder der endlichen Rechengenauigkeit des Computers. Wie schon erwähnt handelt es sich bei einer numerischen Lösung also immer um eine approximative Lösung, die allerdings meistens die beste darstellt, die es gibt. In diesem Kapitel sollen einige Überlegungen zur numerischen Qualität erläutert werden. Im Anschluss daran werden Tests vorgestellt, die zur Absicherung gegen Programmierfehler und zur Einschätzung der numerischen Qualität dienen.

### Beschränkung durch die Auflösung

Durch die Diskretisierung auf dem Gitter kann nur eine endlich feine Struktur aufgelöst werden. Für den Fall angetriebener Turbulenz wird in der Theorie ein Zusammenhang zwischen den größten und kleinsten auftretenden Strukturen angegeben. Dieser lautet

$$\eta \approx \text{Re}^{-\frac{3}{4}} l, \quad (\text{A.55})$$

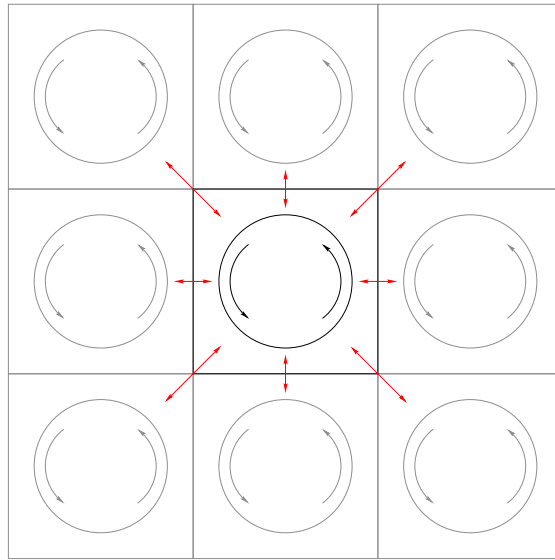
dabei bezeichnet  $\eta$  die Kolmogorovlänge,  $l$  die größte auftretende Länge und  $\text{Re}$  die Reynoldszahl. Die Reynoldszahl wird aus der Numerik über den Zusammenhang

$$\text{Re} = \frac{2\pi\sqrt{\langle u^2 \rangle}}{\nu} \quad (\text{A.56})$$

bestimmt. Dabei wird als Systemlänge  $2\pi$  und als typische Geschwindigkeit die Wurzel aus dem gemittelten Quadrat der Geschwindigkeit angenommen. Die kleinste Kolmogorovlänge, die vom Gitter aufgelöst werden kann, lässt sich als  $\eta = \frac{2\pi}{d}$ , also als Quotient aus Systemlänge und Anzahl der Gitterpunkte in einer Dimension  $d$ , abschätzen. Die größte darstellbare Struktur wird durch die Systemlänge vorgegeben, also  $l = 2\pi$ . Zusammen mit Gl. (A.55) ergibt sich die Abschätzung

$$\text{Re} \approx d^{\frac{4}{3}}. \quad (\text{A.57})$$

Als Konsequenz kann bei einer Auflösung von  $1024^2$  Turbulenz bei einer Reynoldszahl von ca.  $\text{Re} \approx 10000$  simuliert werden, bei einer Auflösung von  $2048^2$  ergibt sich eine Reynoldszahl von  $\text{Re} \approx 26000$ . Dabei sind die benötigte Rechenleistung und der Speicherbedarf allerdings um den Faktor vier gestiegen. Der in der Kolmogorovtheorie durchgeführte Grenzübergang zu unendlich hoher Reynoldszahl kann daher niemals numerisch aufgelöst werden. Die gerade gemachte Abschätzung gilt für getriebene Turbulenz. Sie bietet

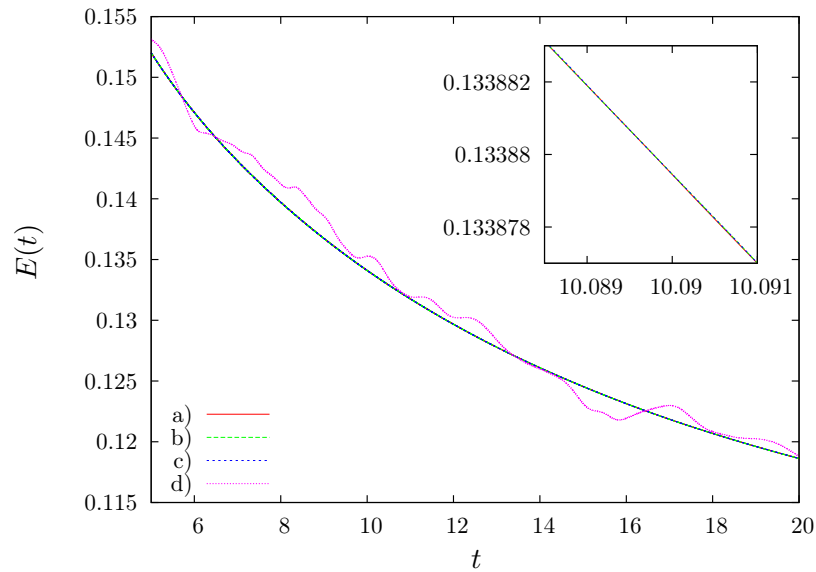


**Abbildung A.8:** Problem der Selbstwechselwirkung. Aufgrund der periodischen Randbedingungen wechselwirkt eine große Wirbelstruktur mit sich selbst.

eine Einschätzung der Größenordnung der zu erwartenden stabilen Reynoldszahl. Wählt man eine etwas höhere Reynoldszahl, so sorgt das Dealiasing für das Wegschneiden höherer Moden, d.h. die Simulation bleibt über begrenzte Bereiche auch bei Verletzung von Gl. (A.57) stabil. Im Rahmen dieser Arbeit wird jedoch u.a. zerfallende Turbulenz behandelt. Aufgrund der inversen Energiekaskade verschmelzen dabei feine Strukturen zu immer größeren Wirbeln, d.h. die Größe der aufzulösenden Strukturen nimmt mit der Zeit zu. Das ermöglicht es, über die Abschätzung (A.57) hinauszugehen, ohne dabei die numerische Stabilität zu riskieren.

### Selbstwechselwirkung

Nicht nur bei der Untersuchung möglichst feiner Strukturen treten numerische Probleme auf, auch bei der Betrachtung großer Strukturen ist Vorsicht geboten. In dieser Arbeit werden unter anderem einzelne Wirbelstrukturen untersucht. Teilweise werden diese mit Hilfe der DNS simuliert. Um dabei möglichst große Teile des Gitters zu nutzen, sollte die Struktur möglichst groß sein. Aufgrund der dem Pseudospektralverfahren inhärenten periodischen Randbedingungen wechselwirkt eine große Struktur mit sich selbst, wie Abbildung A.8 verdeutlicht. Dabei kommt es zu Verzerrungen des Geschwindigkeitsfeldes und schließlich des Vortizitätsfeldes, die unphysikalisch sind. Die Strukturen deutlich kleiner zu wählen vermindert zwar dieses Problem, die tatsächliche Auflösung der Simulation nimmt dadurch jedoch ab, was sich beispielsweise lokal in einem stärkeren Interpolationsfehler äußert. Insgesamt muss man versuchen, diese Faktoren gegeneinander auszubalancieren.



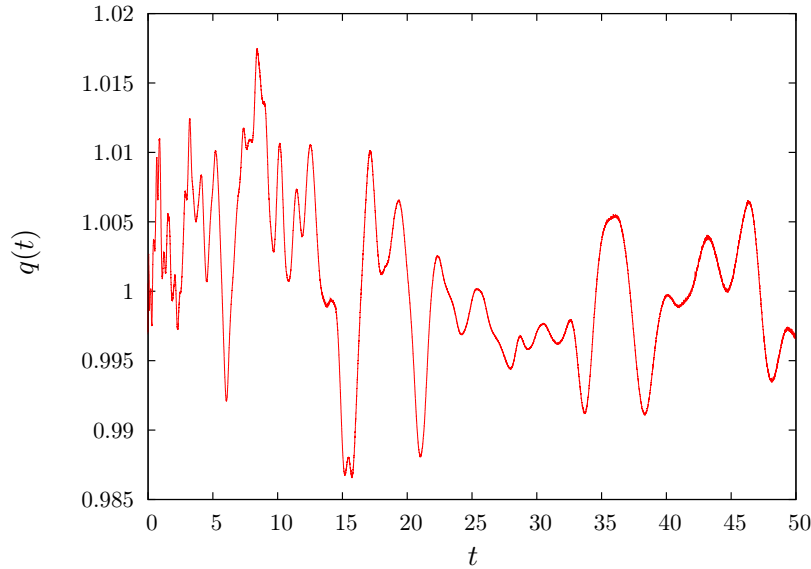
**Abbildung A.9:** Numerischer Test der mittleren Energie, beispielhaft bei einer Simulation zerfallender Turbulenz. Dargestellt ist die mittlere Energie aus: a) dem Geschwindigkeitsfeld im Ortsraum, b) der Vortizität im Fourierraum, c) dem integrierten Energiespektrum und d) den Lagrangeteilchen. Die aus den Feldern bestimmten Größen stimmen nahezu perfekt überein, erst bei extremer Vergrößerung sind leichte Abweichungen zu erkennen. Die mittlere Energie der Tracer fluktuiert stärker (s. Text). (Index `decay-1`)

### Mittlere Energie und Energiequotient

Um die verschiedenen im Simulationsablauf berechneten Felder und Trajektorien auf Konsistenz zu überprüfen, wird die mittlere Energie  $E$  auf verschiedene Arten berechnet und miteinander verglichen. Gravierende Fehler sollten dabei auffallen. Berechnet wurde die mittlere Energie aus

- a) den Geschwindigkeitsfeldern im Ortsraum,
- b) dem Vortizitätsfeld im Fourierraum,
- c) dem integrierten Energiespektrum,
- d) den Lagrangeteilchen.

Wie Abbildung A.9 zeigt, stimmen die Feldgrößen nahezu perfekt überein. Daraus kann der Schluss gezogen werden, dass schwerwiegende Fehler, wie z.B. Normierungsfehler, bei der Fouriertransformation auszuschließen sind. Des Weiteren ist dieser Test ein Hinweis, dass auch die Normierung der Spektrumsberechnung korrekt ist. Die aus den Lagrange- teilchen bestimmte mittlere Energie fluktuiert deutlich stärker. Das hat zum einen damit zu tun, dass es durch die Interpolation zu Fehlern kommt. Da es insbesondere bei der Untersuchung von großskaligen Strukturen verstärkt zu systematischen Abweichungen



**Abbildung A.10:** Numerischer Test: Energiequotient  $q(t)$  am Beispiel derselben Simulation. Die Abweichungen betragen weniger als 2%.

kommt, wird dieser Punkt gesondert in A.6 untersucht. Darüber hinaus ist die statistische Abdeckung des Feldes nicht perfekt. Bei der in den vorgestellten Simulationen üblichen Teilchenzahl von 16384 und einer Auflösung von  $1024^2$  Gitterpunkten beträgt die Teilchendichte ein Teilchen pro 64 Gitterpunkten.<sup>6</sup>

Diese Problematik führt natürlicherweise auf die Definition des Energiequotienten. Dieser ist definiert als

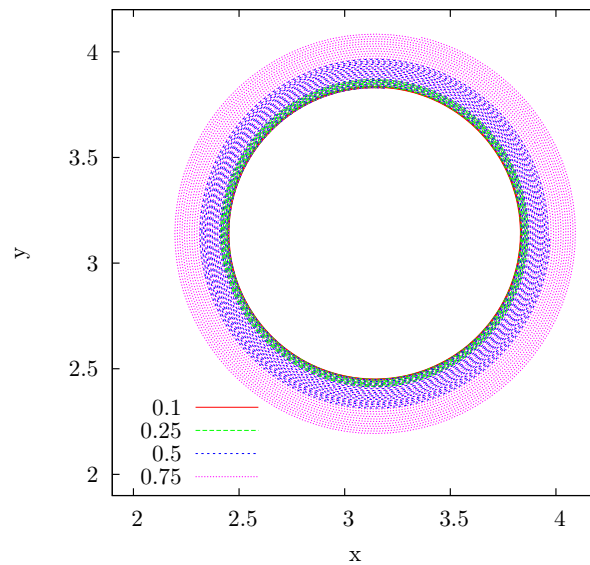
$$q(t) = \frac{E_{\text{Tracer}}(t)}{E_{\text{Feld}}(t)}. \quad (\text{A.58})$$

Abbildung A.10 zeigt beispielhaft  $q(t)$  für eine typische Simulation. Man erkennt eine Fluktuation von  $q(t)$  um eins. Wäre die Simulation perfekt, so müsste sich ein  $q(t) = 1$  ergeben. Die Abbildung lässt dennoch eine niedrige Abweichung und somit eine hohe numerische Qualität erkennen. Die Größe  $q(t)$  dient bei den Simulationen dazu, die numerische und statistische Qualität der gewonnenen Trajektorien abzusichern und systematische Abweichungen auszuschließen.

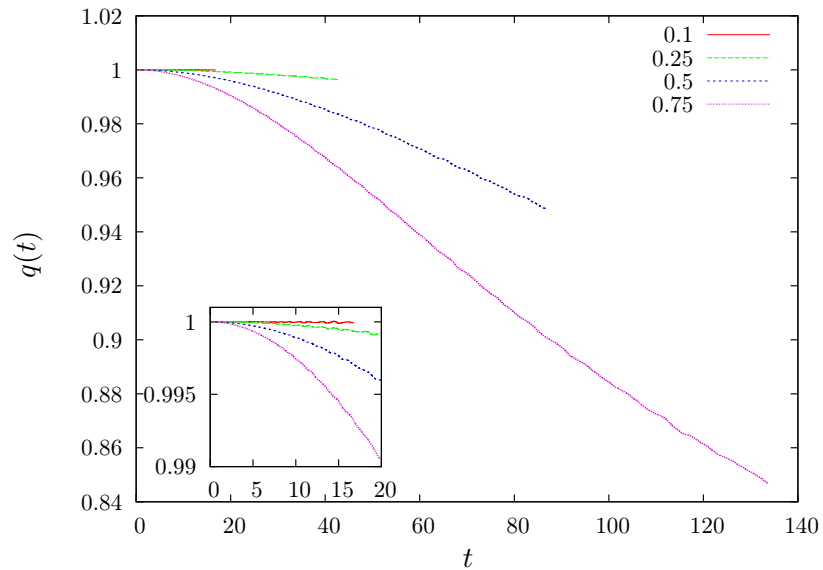
### CFL-Tests

Um zuverlässige qualitative und quantitative statistische Aussagen über die Teilchentrajektorien treffen zu können, ist es wichtig, die auftretenden Fehler möglichst gering zu halten. Bei der Untersuchung der einzelnen kohärenten Strukturen ist im Rahmen dieser Arbeit ein systematisches Abweichen der Teilchenbahnen von den theoretisch vorherge-

<sup>6</sup>Diese Teilchendichte ist deutlich besser als in aktuellen dreidimensionalen Simulationen.



**Abbildung A.11:** Systematisches Abweichen durch numerische Ungenauigkeiten. Dargestellt ist eine typische Trajektorie in einem Lambwirbel, die auf einer Kreisbahn laufen sollte. Die Abweichungen steigen mit wachsender CFL-Zahl. Zu berücksichtigen ist jedoch auch, dass bei höherer CFL-Zahl bei gleicher Iterationszahl eine längere physikalische Zeit simuliert wird. (Index `cf1-vgl`)



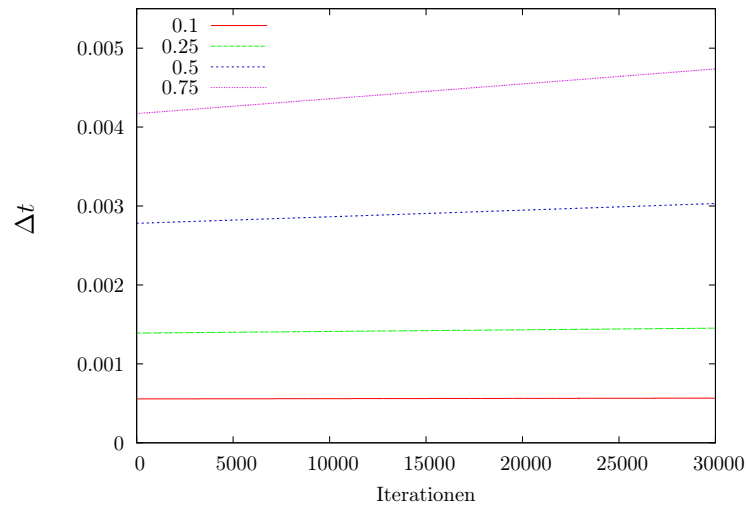
**Abbildung A.12:** Systematische Abweichung beim Energiequotienten  $q(t)$  für verschiedene CFL-Zahlen  $\lambda \in \{0.1, 0.25, 0.5, 0.75\}$ . Die Abweichungen sind deutlicher bei höherer CFL-Zahl. Bei dieser Abbildung wird die Iterationszahl konstant bei 30000 gehalten, die physikalisch simulierte Zeit ist bei einer CFL-Zahl von 0.1 deutlich geringer.



sagten beobachtet worden. Im Falle des Lambwirbels (s. Kapitel 3) sollten die Trajektorien nämlich Kreisbahnen sein, jedoch beobachtet man ein leichtes Hinausspiralen der Lagrangeteilchen, obwohl alle Simulationsparameter in den Grenzen des bekannten Stabilitätsbereiches liegen. Eine genauere Untersuchung des Problems ergibt, dass neben der Auflösung der Simulation auch der gewählte Zeitschritt eine große Rolle spielt. Für die Stabilität der Integration der Wirbeltransportgleichung ist dies zwar schon in Abschnitt A.3 untersucht worden, allerdings macht das CFL-Kriterium dabei keine Aussage, wie groß der Fehler der Positionen der mitgeführten Teilchen ist.

Die Autoren von [YP88] kommen bei der systematischen Untersuchung verschiedener Interpolationsalgorithmen und CFL-Werte zu dem Ergebnis, dass ab einer CFL-Zahl, die kleiner als 0.5 ist, keine signifikanten Abweichungen der Trajektorien mehr zu beobachten sind. Allerdings wurden die genannten Untersuchungen bei kleineren Gitterauflösungen durchgeführt, so dass bei den betrachteten Feldern dann eher Diskretisierungsfehler etc. zum Tragen kamen. Um in dieser Arbeit die Simulationsqualität zu überprüfen, wurde ein typischer Testfall simuliert. Als Anfangsbedingung der Vortizität wird eine Gaußglocke gewählt; diese entspricht dem in Kapitel 3 untersuchten Lambwirbel. Die Simulationen wurden dann bei eingeschaltetem adaptiven Zeitschritt durchgeführt. Als CFL-Zahl wurden 0.1, 0.25, 0.5 und 0.75 gewählt. In Abbildung A.11 ist eine typische Trajektorie abgebildet. Man erkennt, dass die systematischen Abweichungen bei höherer CFL-Zahl zunehmen. In der Abbildung wird der Effekt dadurch verstärkt, dass eine feste Iterationszahl gewählt wurde, so dass die Trajektorien eine unterschiedliche physikalische Simulationsdauer aufweisen. Einen Vergleich in Bezug auf die physikalisch simulierte Zeit bietet Abbildung A.12. Hier wird der Energiequotient in Abhängigkeit der physikalisch simulierten Zeit gezeigt. Bei einer CFL-Zahl von 0.1 wird  $q(t) \approx 1$  erreicht. Gleichzeitig ist die physikalisch simulierte Zeit äußerst gering. Zum Vergleich: Um dieselbe physikalische Zeitdauer zu simulieren, steigt der Rechenaufwand bei einer CFL-Zahl von 0.1 um den Faktor 7.5 gegenüber einer CFL-Zahl von 0.75. Um einen Kompromiss zwischen Rechenaufwand und numerischer Qualität zu schließen, wird bei allen in den übrigen Kapiteln vorgestellten Simulationen eine CFL-Zahl von 0.25 gewählt.

Zu guter Letzt soll für das vorliegende Beispiel ein Blick auf die Entwicklung des Zeitschritts in Abhängigkeit der Iterationen geworfen werden, Abbildung A.13 gibt hier Auskunft. Die Schrittgröße wächst bei dem vorliegenden Beispiel linear mit den Iterationen, allerdings mit unterschiedlichen Steigungen. Die kontinuierliche Entwicklung des Zeitschritts weist darauf hin, dass die Simulation in einem numerisch stabilen Bereich durchgeführt wird. In den Simulationen, die zu statistischen Auswertungen herangezogen werden, wird jedoch immer mit konstanter Schrittweite gerechnet. All diese Betrachtungen lassen den Schluss zu, dass mit einem genügend hohen Rechenaufwand die beschriebenen Fehler zu minimieren sind. Das Problem der systematischen Abweichung macht sich besonders stark bei der Untersuchung großskaliger Strukturen bemerkbar, doch auch bei zerfallender oder getriebener Turbulenz tritt es auf. Dort mitteln sich die Fehler in der Regel jedoch zu einem gewissen Grad statistisch aus. Welche Auswirkung die vorliegende Problematik auf ortsraumbezogene Größen wie z.B. Diffusionskoeffizienten hat, bleibt zu untersuchen.



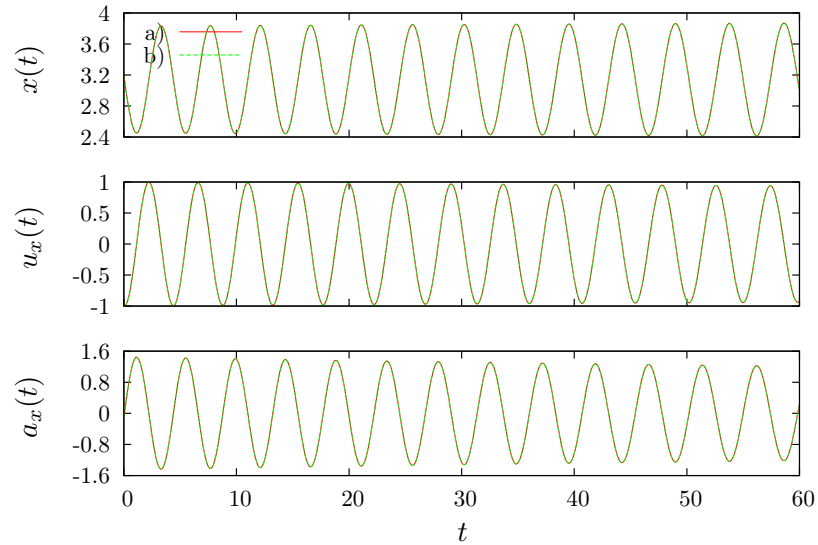
**Abbildung A.13:** Zeitschritt in Abhängigkeit der Iterationen. Die Schrittgröße wächst linear mit den Iterationen.

### Vergleich der Interpolationsverfahren

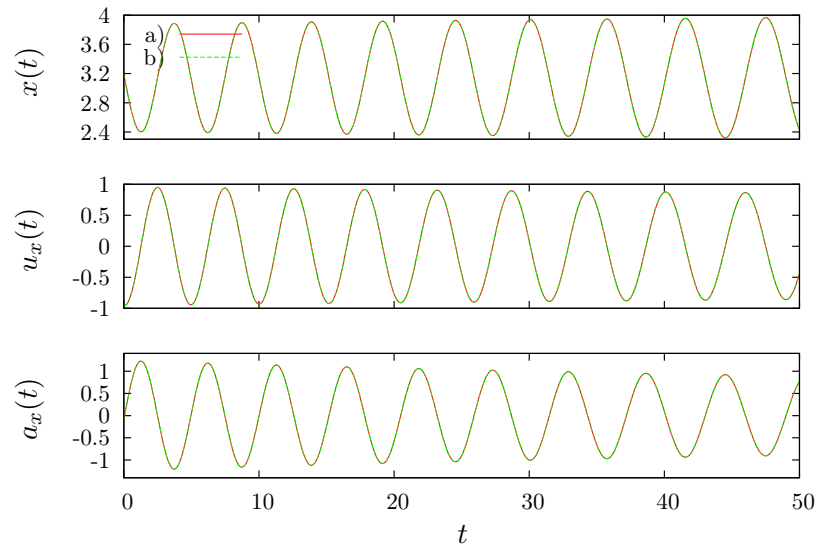
Die in Abschnitt A.4 vorgestellten Interpolationsverfahren sollen anhand einer Lambwirbelkonfiguration kurz miteinander verglichen werden. Der Zeitschritt wurde dabei fest mit einer zugehörigen CFL-Zahl  $\lambda < 0.25$  gewählt. Abbildung A.14 zeigt eine typische Trajektorie. Beide Interpolationsverfahren zeigen nahezu identische Ergebnisse. Erst bei extremer Vergrößerung kann ein Unterschied erkannt werden. Es kann der Schluss gezogen werden, dass sich beide Interpolationsverfahren für die vorliegenden Erfordernisse als gleichwertig erweisen. Die etwas höhere Genauigkeit des einen und die Stetigkeitsvorteile der anderen scheinen in diesem Zusammenhang von vernachlässigbarer Bedeutung zu sein. Gleichzeitig kann aufgrund dieses Tests den Interpolationsroutinen Vertrauen geschenkt werden. Der vorgestellte Test wird mit einer einzelnen großskaligen Struktur durchgeführt. Im Falle zerfallender oder getriebener Turbulenz ist zu erwarten, dass die Trajektorien nicht für alle Zeiten perfekt übereinstimmen. Da es sich in den genannten Fällen um chaotische Systeme handelt, sorgen die auftretenden minimalen Abweichungen zu einem Auseinanderlaufen der Trajektorien. Im statistischen Mittel ist jedoch kein Unterschied zu erwarten.

### Vergleich mit einem unabhängigen Code

Als ultimativer Test wurde der vorliegende FORTRAN 90 Code mit einem zweiten unabhängigen Code überprüft [Kam06b]. Dieser Code wurde in C++ geschrieben und benutzt als Fouriertransformationsroutine die FFTW. Alle benutzten Subroutinen wurden unabhängig vom vorliegenden Code geschrieben, lediglich konzeptionelle Ähnlichkeiten bestehen. Die Interpolationsverfahren sowie die Dateiausgabe sind vollkommen unab-



**Abbildung A.14:** Vergleich der Interpolationsverfahren anhand einer einzelnen Trajektorie: a) bikubische Interpolation, b) zweidimensionale kubische Interpolation. Von oben nach unten: Ortskoordinate  $x(t)$ , Geschwindigkeitskomponente  $u_x(t)$  und Beschleunigungskomponente  $a_x(t)$ . (Index `int-vgl`)



**Abbildung A.15:** Vergleich der unabhängigen Programme anhand einer einzelnen Trajektorie: a) FORTRAN-Code, b) C++-Code. Von oben nach unten: Ortskoordinate  $x(t)$ , Geschwindigkeitskomponente  $u_x(t)$  und Beschleunigungskomponente  $a_x(t)$ . (Index `code-vgl`)

hängig von diesem Code konzipiert, so dass ein exemplarischer Vergleich bei identischen Anfangsbedingungen nahezu identische Ergebnisse liefern sollte. Als Anfangsbedingung wurde ein sogenannter Lambwirbel (siehe dazu Kapitel 3) gewählt und Trajektorien, Verteilungsfunktionen und Autokorrelationsfunktionen verglichen. Als Beispiel wird in Abbildung A.15 eine Trajektorie gezeigt. Die Übereinstimmung zeigte sich im Rahmen der Rechengenauigkeit als perfekt. Mit diesen Tests kann die Möglichkeit schwerer Fehler im Programm als gering eingeschätzt werden.

# B Zusatzmaterialien

## B.1 DVD

Um die Reproduzierbarkeit und Überprüfbarkeit der vorgestellten Ergebnisse zu sichern, liegt der Arbeit eine DVD mit Quellcodes, Anfangsbedingungen und Animationen bei. Die Verzeichnisstruktur ist wie folgt:

<code>/ani-ab/</code>	Animationen, Anfangsbedingungen
<code>/quelltexte/2d-dns/dns/</code>	Quelltext zur DNS
<code>/quelltexte/2d-dns/tools/</code>	Auswertetools zur DNS
<code>/quelltexte/3d-modell/einzelwirbel/</code>	Visualisierung einzelner Burgerswirbel
<code>/quelltexte/3d-modell/wirbelsequenz/</code>	Programm für Sequenz aus Wirbeln
<code>/zusaetzliche-dokumente/</code>	zusätzliche Dokumente

## B.2 Simulationsdetails

Hier finden sich tabellarisch die Parameter der verschiedenen Simulationen. Für jede Simulation wird die Anzahl der Zeitschritte `steps`, die Anzahl der Gitterpunkte in einer Dimension `dm`, die Anzahl der Lagrangeteilchen `ntracer`, die Viskosität  $\nu$ , der Zeitschritt `dt` und das Intervall `out`, indem die Dateiausgabe erfolgt, angegeben. Auf der beiliegenden DVD findet man Anfangsbedingungen und Animationen der Simulationen im Verzeichnis `/ani-ab/`. Für die einzelnen Simulationen findet man jeweils ein mit dem Simulationsindex bezeichnetes Unterverzeichnis. Die Anfangsbedingungen für die Simulationen `cfl-vgl`, `int-vgl` und `code-vgl` liegen nicht bei, da es sich um numerische Tests mit teilweise modifizierten Programmversionen handelt.

lamb-1		lamb-2		lamb-3	
<code>steps</code>	60000	<code>steps</code>	60000	<code>steps</code>	60000
<code>dm</code>	1024	<code>dm</code>	1024	<code>dm</code>	1024
<code>ntracer</code>	16384	<code>ntracer</code>	4096	<code>ntracer</code>	16384
$\nu$	0.0001	$\nu$	0.0001	$\nu$	0.0001
<code>dt</code>	0.001	<code>dt</code>	0.001	<code>dt</code>	0.001
<code>out</code>	40	<code>out</code>	40	<code>out</code>	40

lundgren-1		lundgren-2	
<code>steps</code>	60000	<code>steps</code>	60000
<code>dm</code>	1024	<code>dm</code>	1024
<code>ntracer</code>	16384	<code>ntracer</code>	4096
$\nu$	0.0001	$\nu$	0.0001
<code>dt</code>	0.001	<code>dt</code>	0.001
<code>out</code>	40	<code>out</code>	40

decay-1		decay-2	
<code>steps</code>	100000	<code>steps</code>	100000
<code>dm</code>	1024	<code>dm</code>	1024
<code>ntracer</code>	16384	<code>ntracer</code>	4096
$\nu$	0.0004	$\nu$	0.0004
<code>dt</code>	0.0005	<code>dt</code>	0.0005
<code>out</code>	40	<code>out</code>	40

cfl-vgl		int-vgl		code-vgl	
<code>steps</code>	30000	<code>steps</code>	60000	<code>steps</code>	15000
<code>dm</code>	1024	<code>dm</code>	1024	<code>dm</code>	1024
<code>ntracer</code>	16384	<code>ntracer</code>	16384	<code>ntracer</code>	16384
$\nu$	0.0001	$\nu$	0.0001	$\nu$	0.0001
<code>dt</code>	0.0035	<code>dt</code>	0.001	<code>dt</code>	0.0035
<code>out</code>	20	<code>out</code>	40	<code>out</code>	10

# Abbildungsverzeichnis

1.1	Experimenteller Aufbau zur Vermessung von Teilchentrajektorien . . . . .	2
1.2	Experimentell gemessene Teilchentrajektorie . . . . .	3
1.3	Experimentell ermittelte Beschleunigungsstatistik . . . . .	4
1.4	Schematischer experimenteller Aufbau . . . . .	5
1.5	Trajektorie und Geschwindigkeitsinkrementverteilung . . . . .	6
1.6	Teilcheneinfang und Einteilchenstatistik . . . . .	6
1.7	Wirbel in zweidimensionaler Turbulenz . . . . .	10
1.8	Aufbau eines Experiments zu zweidimensionaler Turbulenz. . . . .	11
1.9	Experimentell ermittelte Teilchenbahnen in zweidimensionaler Turbulenz .	11
1.10	Einzelner Wirbel im Experiment . . . . .	12
1.11	Visualisierung eines einzelnen Wirbels . . . . .	14
1.12	Geschwindigkeit und Spektrum eines einzelnen Wirbels . . . . .	14
2.1	Euler- vs. Lagrangebild . . . . .	19
2.2	Abbildung $\Phi_t$ . . . . .	21
2.3	Kolmogorovs Vorstellung voll entwickelter Turbulenz . . . . .	24
3.1	Differentielle Rotation . . . . .	30
3.2	Verzerrung eines Quadrats durch differentielle Rotation . . . . .	33
3.3	Elementarverteilung . . . . .	35
3.4	Asymptotisches Verhalten der Verteilungsfunktionen . . . . .	38
3.5	Autokorrelationsfunktion eines Punktwirbels . . . . .	40
3.6	Geschwindigkeitsprofil eines Lambwirbels . . . . .	42
3.7	Mittlere Energie eines Lambwirbels . . . . .	43
3.8	Vortizitätsfeld eines Lambwirbels . . . . .	44
3.9	Trajektorie eines Teilchens im Lambwirbel . . . . .	45
3.10	Verzerrung eines Quadrats im Feld eines Lambwirbels . . . . .	46
3.11	Histogramm für $u_x$ im Lambwirbel . . . . .	47
3.12	Histogramm für $a_x$ im Lambwirbel . . . . .	47
3.13	Autokorrelationsfunktion für $u_x$ . . . . .	49
3.14	Autokorrelationsfunktion für $a_x$ . . . . .	49
3.15	Histogramm für $a_x$ im Lambwirbel . . . . .	50
3.16	Geschwindigkeitsinkrementverteilungen . . . . .	51
3.17	Vortizitätsfeld einer Lundgrenspirale . . . . .	58

3.18	Teilchen im Geschwindigkeitsfeld der Lundgrenspirale . . . . .	59
3.19	Trajektorie eines Teilchens im Lundgrenwirbel . . . . .	60
3.20	Verzerrung eines Quadrats im Feld einer Lundgrenspirale . . . . .	61
3.21	Histogramm für $a_x$ im Lundgrenwirbel . . . . .	62
3.22	Autokorrelationsfunktion für $a_x$ . . . . .	63
3.23	Trajektorien im Burgerswirbel . . . . .	67
4.1	Lagrangesche Teilchenbahn im Modell . . . . .	69
4.2	Isotropie der Geschwindigkeitskomponenten . . . . .	74
4.3	Tiefpassgefilterte Geschwindigkeitskomponente . . . . .	75
4.4	Tiefpassgefilterte Geschwindigkeitsinkrementverteilungen . . . . .	75
4.5	Verteilungsfunktionen für $\Gamma$ und $a$ . . . . .	76
4.6	Trajektorie im Modell . . . . .	78
4.7	Verteilungsfunktion der Geschwindigkeit . . . . .	79
4.8	Verteilungsfunktion der Geschwindigkeitsinkremente . . . . .	79
4.9	Kurtosis der Geschwindigkeitsinkrementverteilungen . . . . .	81
4.10	Autokorrelationsfunktion für $u_x$ . . . . .	82
4.11	Strukturfunktionen im Modell . . . . .	83
4.12	Kompensierte zweite Strukturfunktion im Modell . . . . .	84
5.1	Zeitliche Entwicklung der Vortizität . . . . .	92
5.2	Zeitliche Entwicklung des Energiespektrums . . . . .	93
5.3	Trajektorien in zerfallender Turbulenz . . . . .	94
5.4	Trajektorie in zerfallender Turbulenz . . . . .	95
5.5	Zeitliche Entwicklung einer Menge von Lagrangeteilchen . . . . .	96
5.6	Beitrag einer einzelnen Trajektorie zur Statistik . . . . .	97
5.7	Zeitaufgelöste Momente $\langle \omega^n \rangle$ . . . . .	98
5.8	Zeitaufgelöste Verteilungsfunktionen für $a_x(t)$ . . . . .	99
5.9	Zeitaufgelöste normierte Verteilungsfunktionen für $a_x(t)$ . . . . .	100
5.10	Momente der Verteilungsfunktion für $a_x$ . . . . .	100
5.11	Kompensierte Momente der Verteilungsfunktion für $a_x$ . . . . .	101
5.12	Zerlegung der Beschleunigung in zwei Anteile . . . . .	102
5.13	Verteilungsfunktion für $a_x, a_{\parallel}$ und $a_{\perp}$ . . . . .	103
A.1	Schematische Darstellung des Runge-Kutta-Algorithmus . . . . .	109
A.2	Schematische Darstellung der CFL-Bedingung. . . . .	115
A.3	Fehlinterpretation durch Aliasing . . . . .	116
A.4	2/3-Regel von Orszag. . . . .	118
A.5	Kubische zweidimensionale Interpolation . . . . .	120
A.6	Bikubische Interpolation . . . . .	121
A.7	Schematischer Aufbau des DNS-Codes . . . . .	123
A.8	Problem der Selbstwechselwirkung . . . . .	125
A.9	Numerischer Test: mittlere Energie . . . . .	126



A.10 Numerischer Test: Energiequotient . . . . .	127
A.11 Systematisches Abweichen durch numerische Ungenauigkeiten . . . . .	128
A.12 Systematische Abweichung beim Energiequotienten . . . . .	128
A.13 Zeitschritt in Abhängigkeit der Iterationenen . . . . .	130
A.14 Vergleich der Interpolationsverfahren . . . . .	131
A.15 Vergleich der unabhängigen Programme . . . . .	131

# Literaturverzeichnis

- [AM04] ARINGAZIN, A. K. ; MAZHITOV, M. I.: One-dimensional Langevin models of fluid particle acceleration in developed turbulence. In: *Physical Review E* 69 (2004), Nr. 2
- [AV97] AGULLO, O. ; VERGA, A. D.: Exact Two Vortices Solution of Navier-Stokes Equations. In: *Physical Review Letters* 78 (1997), Nr. 12
- [Bau04] BAULE, A.: *Nichtmarkovsche Modelle für die Lagrangesche Teilchenstatistik turbulenter Strömungen*, Westfälische Wilhelms-Universität, Diplomarbeit, 2004
- [BBC<sup>+</sup>04a] BIFERALE, L. ; BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; DEVENISH, B. J. ; LANOTTE, A. ; TOSCHI, F.: Multifractal Statistics of Lagrangian Velocity and Acceleration in Turbulence. In: *Physical Review Letters* 93 (2004), Nr. 6
- [BBC<sup>+</sup>04b] BIFERALE, L. ; BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; LANOTTE, A. ; TOSCHI, F.: Lagrangian statistics in fully developed turbulence. In: *arXiv.org:nlin/0402032* (2004)
- [BBC<sup>+</sup>05] BIFERALE, L. ; BOFFETTA, G. ; CELANI, A. ; LANOTTE, A. ; TOSCHI, F.: Particle trapping in three-dimensional fully developed turbulence. In: *Physics of Fluids* 17 (2005), Nr. 2
- [BCT<sup>+</sup>93] BENZI, R. ; CILIBERTO, S. ; TRIPICCIONE, R. ; BAUDET, C. ; MASSAIOLI, F. ; SUCCI, S.: Extended self-similarity in turbulent flows. In: *Physical Review E* 48 (1993), Nr. 1
- [Bec06] BECK, Ch.: Statistics of 3-dimensional Lagrangian turbulence. In: *arXiv:cond-mat/0606655v1* (2006)
- [Ber06] BERG, J.: Lagrangian one-particle velocity statistics in a turbulent flow. In: *arXiv:physics/0610055v1* (2006)
- [Boy00] BOYD, J. P.: *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*. [www-personal.engin.umich.edu/~jpboyd/](http://www-personal.engin.umich.edu/~jpboyd/), 2000
- [BPS88] BENZI, R. ; PATARNELLO, S. ; SANTANGELO, P.: Self-similar coherent structures in two-dimensional decaying turbulence. In: *Journal of Physics A: Mathematical and General* 21 (1988), Nr. 5

- 
- [BT05] BIFERALE, L. ; TOSCHI, F.: Joint statistics of acceleration and vorticity in fully developed turbulence. In: *arXiv:nlin.CD/053007v1* (2005)
- [CHQZ87] CANUTO, C. ; HUSSAINI, M.Y. ; QUARTERONI, A. ; ZANG, T. A.: *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Berlin : Springer-Verlag, 1987
- [CMB05] CRAWFORD, A. M. ; MORDANT, N. ; BODENSCHATZ, E.: Joint Statistics of the Lagrangian Acceleration and Velocity in Fully Developed Turbulence. In: *Physical Review Letters* 94 (2005), Nr. 2
- [CMP03] CUYPERS, Y. ; MAUREL, A. ; PETITJEANS, P.: Vortex Burst as a Source of Turbulence. In: *Physical Review Letters* 91 (2003), Nr. 19
- [CMP04] CUYPERS, Y. ; MAUREL, A. ; PETITJEANS, P.: Comparison between an experimental turbulent vortex and the Lundgren vortex. In: *Journal of Turbulence* 5 (2004)
- [Dav04] DAVIDSON, P. A.: *Turbulence - An Introduction for Scientists and Engineers*. Oxford, England : Oxford University Press, 2004
- [FB02] FRIEDRICH, R. ; BAULE, A.: Lagrangian particle statistics in turbulence. In: *Nonlinear Phenomena in Complex Systems* 5 (2002), Nr. 4
- [FP97] FRIEDRICH, R. ; PEINKE, J.: Description of a Turbulent Cascade by a Fokker-Planck Equation. In: *Physical Review Letters* 78 (1997), Nr. 5
- [FPS01] FARGE, M. ; PELLEGRINO, G. ; SCHNEIDER, K.: Coherent Vortex Extraction in 3D Turbulent Flows Using Orthogonal Wavelets. In: *Physical Review Letters* 87 (2001), Nr. 5
- [Fri95] FRISCH, U.: *Turbulence - The Legacy of A.N. Kolmogorov*. Cambridge, England : Cambridge University Press, 1995
- [Fri03] FRIEDRICH, R.: Statistics of Lagrangian Velocities in Turbulent Flows. In: *Physical Review Letters* 90 (2003), Nr. 8
- [Fri05] FRIEDRICH, R.: *Aufzeichnungen zu kohärenten Strukturen*. Private Aufzeichnungen, 2005
- [FSK99] FARGE, Marie ; SCHNEIDER, Kai ; KEVLAHAN, Nicholas: Non-Gaussianity and coherent vortex simulation for two-dimensional turbulence using an adaptive orthogonal wavelet basis. In: *Physics of Fluids* 11 (1999), Nr. 8
- [FV97] FLOHR, P. ; VASSILICOS, J. C.: Accelerated scalar dissipation in a vortex. In: *Journal of Fluid Mechanics* 348 (97)
- [Gil93] GILBERT, A. D.: A cascade interpretation of Lundgren's stretched spiral vortex model for turbulent fine structure. In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 5 (1993), Nr. 11

- [HGBM06] HOMANN, H. ; GRAUER, R. ; BUSSE, A. ; MÜLLER, W.-C.: *Lagrangian Statistics of Navier-Stokes- and MHD-Turbulence*. 2006. – unpublished
- [HK97] HATAKEYAMA, N. ; KAMBE, T.: Statistical Laws of Random Strained Vortices in Turbulence. In: *Physical Review Letters* 79 (1997), Nr. 7
- [JWSR93] JIMENEZ, J. ; WRAY, A. A. ; SAFFMAN, P. G. ; ROGALLO, R. S.: The structure of intended vorticity in isotropic turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 255 (1993)
- [Kam06a] KAMPS, O.: *Anfangsbedingung getriebene Turbulenz*. Privater Datensatz, 2006
- [Kam06b] KAMPS, O.: *C++-Code zur numerischen Integration der Wirbeltransportgleichung*. Privater Quelltext, 2006
- [KL03] KIVOTIDES, D. ; LEONARD, A.: Quantized Turbulence Physics. In: *Physical Review Letters* 90 (2003), Nr. 23
- [LCDS00] LAVAL, J.-P. ; CHAVANIS, P.-H. ; DUBRULLE, B. ; SIRE, C.: Scaling laws and vortex profiles in 2D decaying turbulence. In: *arXiv:cond-mat/0005468v1* (2000)
- [Lun82] LUNDGREN, T. S.: Strained spiral vortex model for turbulent fine structure. In: *Physics of Fluids* 25 (1982), Nr. 12
- [Lun93] LUNDGREN, T. S.: A small-scale turbulence model. In: *Physics of Fluids A: Fluid Dynamics* 5 (1993), Nr. 6
- [LVC<sup>+</sup>01] LA PORTA, A. ; VOTH, G. A. ; CRAWFORD, A. M. ; ALEXANDER, J. ; BODENSCHATZ, E.: Fluid particle acceleration in fully developed turbulence. In: *nature* 409 (2001)
- [MDL<sup>+</sup>02] MORDANT, N. ; DELOUR, J. ; LÉVÊQUE, E. ; ARNÉODO, A. ; PINTON, J.-F.: Long Time Correlations in Lagrangian Dynamics: A Key to Intermittency in Turbulence. In: *Physical Review Letters* 89 (2002), Nr. 25
- [MHK03] MOURI, Hideaki ; HORI, Akihiro ; KAWASHIMA, Yoshihide: Vortex tubes in velocity fields of laboratory isotropic turbulence: Dependence on the Reynolds number. In: *Physical Review E* 67 (2003), Nr. 1
- [MHK04] MOURI, H. ; HORI, A. ; KAWASHIMA, Y.: Vortex tubes in turbulence velocity fields at Reynolds numbers  $\text{Re}[\text{sub } \lambda] = 300\text{--}1300$ . In: *Physical Review E* 70 (2004), Nr. 6
- [MKO94] MOFFAT, H. K. ; KIDA, S. ; OHKITANI, K.: Stretched vortices—the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics. In: *Journal of Fluid Mechanics* (1994)

- 
- [MLP04] MORDANT, N. ; LÉVÊQUE, E. ; PINTON, J.-F.: Experimental and numerical study of the Lagrangian dynamics of high Reynolds turbulence. In: *New Journal of Physics* 6 (2004)
- [MMMP01] MORDANT, N. ; METZ, P. ; MICHEL, O. ; PINTON, J.-F.: Measurement of Lagrangian Velocity in Fully Developed Turbulence. In: *Physical Review Letters* 87 (2001), Nr. 21
- [OP03] O’GORMAN, P. A. ; PULLIN, D. I.: The velocity-scalar cross spectrum of stretched spiral vortices. In: *Physics of Fluids* 15 (2003), Nr. 2
- [PFTV86] PRESS, W. H. ; FLANNERY, B. P. ; TEUKOLSKY, S. A. ; VETTERLING, W. T.: *Numerical Recipes - The Art of Scientific Computing*. Cambridge, England : Cambridge University Press, 1986
- [PL01] PULLIN, D. I. ; LUNDGREN, T. S.: Axial motion and scalar transport in stretched spiral vortices. In: *Physics of Fluids* 13 (2001), Nr. 9
- [Pop00] POPE, S. B.: *Turbulent Flows*. Cambridge, England : Cambridge University Press, 2000
- [PS98] PULLIN, D. I. ; SAFFMAN, P. G.: VORTEX DYNAMICS IN TURBULENCE. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 30 (1998), Nr. 1
- [RDE05] RIVERA, M. K. ; DANIEL, W. B. ; ECKE, R. E.: Lagrangian statistics and coherent structures in two-dimensional turbulence. In: *arXiv:/cond-mat/0512214v1* (2005)
- [RL97] ROSSI, M. ; LE DIZÈS, S.: Three-Dimensional Temporal Spectrum of Stretched Vortices. In: *Physical Review Letters* 78 (1997), Nr. 13
- [RPF01] RENNER, C. ; PEINKE, J. ; FRIEDRICH, R.: Experimental indications for Markov properties of small-scale turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 433 (2001)
- [RPF<sup>+</sup>02] RENNER, Ch. ; PEINKE, J. ; FRIEDRICH, R. ; CHANAL, O. ; CHABAUD, B.: Universality of Small Scale Turbulence. In: *Physical Review Letters* 89 (2002), Nr. 12
- [SB79] SAFFMAN, P. G. ; BAKER, G. R.: VORTEX INTERACTIONS. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 11 (1979)
- [Tab02] TABELING, P.: Two-dimensional turbulence: a physicist approach. In: *Physics Reports* 362 (2002)
- [Tow51] TOWNSEND, A. A.: On the Fine-Scale Structure of Turbulence. In: *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences* 208 (1951), Nr. 1095

- [VB96] VASSILICOS, J. C. ; BRASSEUR, James G.: Self-similar spiral flow structure in low Reynolds number isotropic and decaying turbulence. In: *Physical Review E* 54 (1996), Nr. 1
- [VLC<sup>+</sup>02] VOTH, G.A. ; LA PORTA, A. ; CRAWFORD, A.M. ; ALEXANDER, J. ; BODENSCHATZ, E.: Measurement of particle acceleration in fully developed turbulence. In: *Journal of Fluid Mechanics* 469 (2002)
- [Wil06] WILCZEK, M.: *Aufzeichnungen zum Burgerswirbel - analytische Eigenschaften und numerische Ergebnisse*. Private Aufzeichnungen, 2006
- [WJF06] WILCZEK, M. ; JENKO, F. ; FRIEDRICH, R.: *Lagrangian Particle Statistics in Turbulent Flows from a Simple Vortex Model*. 2006. – to be submitted
- [Yeu01] YEUNG, P. K.: Lagrangian characteristics of turbulence and scalar transport in direct numerical simulations. In: *Journal of Fluid Mechanics* 427 (2001)
- [Yeu02] YEUNG, P. K.: LAGRANGIAN INVESTIGATIONS OF TURBULENCE. In: *Annual Review of Fluid Mechanics* 34 (2002), Nr. 1
- [YP88] YEUNG, P. K. ; POPE, S. B.: An Algorithm for Tracking Fluid Particles in Numerical Simulations of Homogeneous Turbulence. In: *J. Comput. Phys.* 79 (1988), Nr. 2
- [Zeg05] ZEGLIN, S.: *Statistische Eigenschaften zweidimensionaler Turbulenz*, Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Diplomarbeit, 2005







# Danksagung

*Sehr verehrte Damen und Herren, Herr Bundespräsident, ...*

Zunächst einmal danke ich Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die Betreuung dieser Arbeit. Das vorgeschlagene Thema hat mich von Anfang an fasziniert, und die Bearbeitung der Fragestellungen hat mir (mit wirklich nur kurzen Unterbrechungen) durchweg Freude bereitet. Neben der guten Betreuungssituation gebührt besondere Erwähnung der Tatsache, dass ich immer wieder ermutigt wurde, eigenen Ideen nachzugehen.

Weiterhin bedanken möchte ich mich bei Dr. Frank Jenko für zahlreiche interessante Diskussion und Anregungen, ohne die einige der vorgestellten Ergebnisse womöglich nicht zu Stande gekommen wären.

Besonderer Dank geht in diesem Zusammenhang auch an Oliver Kamps, von dem ich auf technischer Seite viel lernen konnte. Ohne sein Wissen und seine Bereitschaft, es weiterzugeben, wäre die Erstellung vieler numerischer Werkzeuge ungleich viel schwieriger und im Rahmen der vorliegenden Arbeit vielleicht sogar unmöglich gewesen. Weiterhin hat mich die fortwährende und fruchtbare wissenschaftliche Diskussion mit ihm immer wieder motiviert.

Danken möchte ich außerdem Prof. Dr. Peter Boschan, von dem ich viel über das wissenschaftliche Arbeiten lernen konnte.

Herzlich bedanken möchte ich mich auch bei meinen Eltern. Ihre stete Unterstützung hat mir dieses Studium nicht nur ermöglicht, sondern auch äußerst angenehm gestaltet. Meiner Freundin Katharina möchte ich für die moralische Unterstützung besonders während der letzten Monate danken. Ihr relativierender Blick auf die Dinge hat unbestreitbar positiven Einfluss auf meine Geistesgesundheit gehabt.

Schließlich geht ein dickes Dankeschön an alle, die diese Arbeit Korrektur gelesen haben. Besonders im Falle der fachfremden Helfer kann ich nur erahnen, wie mühevoll die Korrektur solch einer Arbeit ist.

Nicht vergessen möchte ich an dieser Stelle die Menschen, die mich während des Studiums begleitet und Münster wirklich zu einer der lebenswertesten Städte gemacht haben.

# Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, diese Arbeit selbständig angefertigt und, außer den angegebenen, keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, im Februar 2007