

Zeitreihenanalyse stochastischer Systeme

mit periodischem Treiber und Delay

als Diplomarbeit vorgelegt von
Andreas Wilmer

Januar 2006



Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Stochastische Prozesse und Drift-Diffusions-Schätzung	10
2.1	Grundlagen	10
2.2	Klassifizierung stochastischer Prozesse	11
2.3	Langevin Gleichungen	14
2.4	Fokker-Planck-Gleichung	20
2.5	Methode zur Schätzung von Drift und Diffusion	25
3	Test auf Selbstkonsistenz	41
3.1	Motivation	41
3.2	Test auf endlichem Gebiet	42
4	Stochastische Systeme 1.Ordnung mit Antrieb und Delay	49
4.1	Zeitreihenanalyse für periodisch getriebene Systeme mit Delay	49
4.2	Numerisches Verfahren zur Zeitreihenanalyse	50
4.3	Additive Kopplung von Delay und Treiber	55
4.4	Multiplikative Kopplung von Delay und Treiber	63
5	Stochastische Systeme 2.Ordnung mit Antrieb und Delay	69
5.1	Zwei-Schritt-Methode	70
5.2	Beispiel: Modell für bimanuelle rhythmische Koordination	72
6	Zusammenfassung und Ausblick	81

1 Einleitung

Ein kurzer Rückblick

Heutzutage ist die Untersuchung dynamischer Systeme zu einem interdisziplinären Gebiet geworden. Ein dynamisches System beschreibt allgemein eine zeitliche Entwicklung von Systemzuständen. Die Theorie dynamischer Systeme lässt sich zur Modellbildung in allen Bereichen der Naturwissenschaften verwenden. Es finden sich Beispiele in der Physik, Mathematik, Biologie oder der Medizin.

Die Basis wurde Mitte des 16. Jahrhunderts von dem berühmten Physiker Isaac Newton mit seinem Werk „Philosophiae Naturalis Principia Mathematica“ (1687) geschaffen, indem er den Grundstein für die klassische Mechanik legte und das fundamentale Gesetz der Gravitation präsentierte. Mit Hilfe der Differentialrechnung gelang es Newton die Keplerschen Gesetze zu erklären und somit das 2-Körperproblem zu lösen. Jedoch ist es generell nicht möglich eine analytische Lösung für das 3-Körperproblem zu finden.

Einen wichtigen Wendepunkt zur Beschreibung analytisch nicht lösbarer Gleichungen markieren die von dem Mathematiker Henri Poincaré um 1800 eingeführten Methoden zur qualitativen Behandlung derartiger Probleme. In seiner Abhandlung über das 3-Körperproblem „Les Méthodes nouvelles de la Mécanique Céleste“ (1896) führt Poincaré ein seinerzeit neuartiges geometrisches Verfahren ein. Poincaré gilt daher neben Birkhoff, Kolmogorov, Arnold und Moser als Mitbegründer der Theorie zur Erforschung des Chaos.

Seit den 50er Jahren des vorherigen Jahrhunderts ist durch die Verwendung von Computern zur numerischen Berechnung analytisch nicht lösbarer Gleichungen die Beschreibung komplexer Dynamiken erneut in das Interesse der Physik und der Mathematik gerückt. Ein Teilgebiet der modernen Physik, die *Nichtlineare Physik*, beschäftigt sich zum einen mit chaotischen und zum anderen mit komplexen Systemen. Allgemein ist die Formulierung einer quantitativen Beschreibung der Dynamik in chaotischen oder komplexen Systemen sehr kompliziert.

Beschreibung von Chaos

Chaotische Systeme zeichnen sich immer durch ihre sensible Abhängigkeit von den Anfangsbedingungen aus. Das heißt, dass trotz einer deterministischen Beschreibung des Systems der zeitliche Verlauf zweier Trajektorien, die lediglich eine marginale Abweichung ihrer Anfangszustände besitzen, vollkommen unterschiedlich ausfällt. Ihre Lösungen können eine fraktale Struktur besitzen. Viele Trajektorien chaotischer Systeme bilden zudem seltsame Attraktoren im Phasenraum aus. Man unterscheidet zwischen zeitdiskreten Abbildungen und zeitkontinuierlichen Flüssen. Ein prominentes Beispiel für eine zeitdiskrete ite-

rative Abbildung ist die logistische Gleichung, die alle Charakteristika chaotischer Systeme im sogenannten Feigenbaumdiagramm zeigt und in der Natur in ähnlicher Form z.B. bei einem tropfenden Wasserhahn zu finden ist.

Ein sehr bekanntes Beispiel für einen zeitkontinuierlichen Fluss ist das Lorenz-System, welches ursprünglich zur Beschreibung von Konvektion in der Atmosphäre als einfaches Modell zur Wettervorhersage aufgestellt wurde. Die Trajektorien dieses Systems bilden den sehr bekannten Lorenz-Attraktor, der eine nichtstationäre unvorhersagbare Systemdynamik aufweist .

Allen Systemen, die klassisches Chaos zeigen, ist gemein, dass sie wenige Freiheitsgrade besitzen. Iterative Abbildungen können schon in einer Dimension chaotisches Verhalten ausprägen, wohingegen zeitkontinuierliche Systeme im Allgemeinen drei oder mehr Freiheitsgrade besitzen müssen, um chaotische Merkmale ausbilden zu können [22, 44, 1]

Behandlung komplexer Systeme

Komplexe Systeme hingegen bestehen aus sehr vielen inneren Freiheitsgraden oder aus einer großen Zahl an Subsystemen. Befindet sich ein komplexes System im thermischen Gleichgewicht, d.h. es findet kein Materie- oder Energieaustausch mit der Umgebung statt, so kann dieses System mit den Methoden der klassischen Thermodynamik und der Gleichgewichtsstatistik über wenige makroskopische Zustandsvariablen beschrieben werden.

Allerdings stehen die meisten Systeme sowohl der belebten, als auch der unbelebten Natur nicht im Gleichgewicht mit ihrer Umgebung. Häufig findet ein Stoff- oder Energieaustausch statt, d.h. es liegen offene hochdimensionale Systeme vor. Diese Systeme zeichnen sich durch raumzeitlich komplexe Strukturen aus, die man von Systemen im Gleichgewicht nicht erwarten würde. Einige Phänomene in der Natur, die sich auf die Dynamik von Nichtgleichgewichtssystemen zurückführen lassen, sind z.B. Konvektionsprozesse (Bildung von Konvektionsrollen bei der Rayleigh-Benard-Konvektion), komplexe Strömungsprozesse (Turbulenz in Flüssigkeiten), Transport granularer Medien (Lawinenbildung) oder strukturbildende Prozesse (Riefenbildung bei Schneidprozessen oder Rippelbildung bei Wachstums- und Korrosionprozessen). Dabei kann Strukturbildung, Selbstorganisation oder raumzeitliches Chaos auf makroskopischen Skalen in Erscheinung treten. Letztlich kann jedes Lebewesen als ein offenes komplexes System angesehen werden [43, 35].

Eine Vereinheitlichung unterschiedlichster dynamischer Prinzipien erfolgte 1977 von Hermann Haken, der diesen interdisziplinären Teil der nichtlinearen Physik *Synergetik* nannte [24]. Sie resultiert als Konsequenz der systematischen Erforschung unterschiedlichster komplexer Systeme aus den Bereichen der Physik, Biologie, Chemie, Sozialwissenschaften, Ökonomie und Medizin.

In der Nähe von Bifurkationen, also der Änderung des qualitativen Systemverhaltens, lässt sich die Dynamik häufig mit wenigen für die Dynamik relevanten Variablen, den sogenannten Ordnungs- oder Kontrollparametern, beschreiben. Überschreitet der Kontrollparameter eines Systems einen kritischen Wert, so durchläuft das System eine Bifurkation. Dabei führt Haken das Prinzip der *Versklavung* ein, welches in der Nähe dieser Bifurkationspunkte die Systemva-

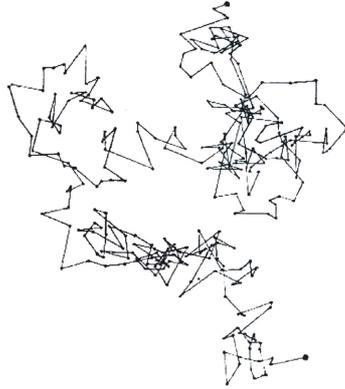


Abbildung 1.1: von R. Brown unter dem Mikroskop aufgezeichnete Trajektorie einer Brownschen Bewegung (1827)

riablen in zwei Gruppen einteilt, in die langsam variierenden Ordnungsparameter und die schnell relaxierenden stabilen oder auch versklavten Moden. Eine Trennung der Zeitskalen erlaubt eine starke Reduktion der Systemdynamik auf niederdimensionale Ordnungsparametergleichungen und somit eine entkoppelte Behandlung des physikalischen Problems.

Ausgehend von mikroskopischen Grundgleichungen erfolgt somit eine stochastische Formulierung des Systems. Diese beschreibt die Dynamik der Wahrscheinlichkeitsdichten von Ordnungsparametern oder von makroskopischen Variablen. Die stochastische Beschreibung des Systems führt somit auf eine Untersuchung von Zufallsvariablen, Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Übergangswahrscheinlichkeiten. Die aus einer mikroskopischen Betrachtung stammende strenge Herleitung von stochastischen Gleichungen zur Beschreibung physikalischer Probleme ist im Allgemeinen sehr schwierig. Daher erfolgt zur Modellierung stochastischer Systeme häufig ein heuristischer Ansatz.

Die Brownsche Bewegung ist ein einfaches Beispiel für ein System, das sich im Gleichgewicht mit seiner Umgebung befindet. Bei der Brownschen Bewegung durchläuft ein Teilchen aufgrund thermischer Einflüsse anderer Moleküle innerhalb des Wärmebads einen Zufallspfad, wie in Abbildung 1.1 zu sehen ist. Eine vollständige Lösung der Bewegungsgleichungen ist wegen der großen Teilchenzahl undurchführbar. Daher wählt man eine Beschreibung der Wärmebadmoleküle, bei der die im Mittel unkorrelierten Kollisionen aller anderen Wärmebadteilchen als ein weißes Rauschen genähert werden können. Die Diffusion des Brownschen Teilchens lässt sich über eine stochastische Differentialgleichung, die als Wiener-Prozess bekannt ist, formulieren. Albert Einstein zeigte 1905, dass die Varianz des Ortes proportional mit der Zeit anwächst.

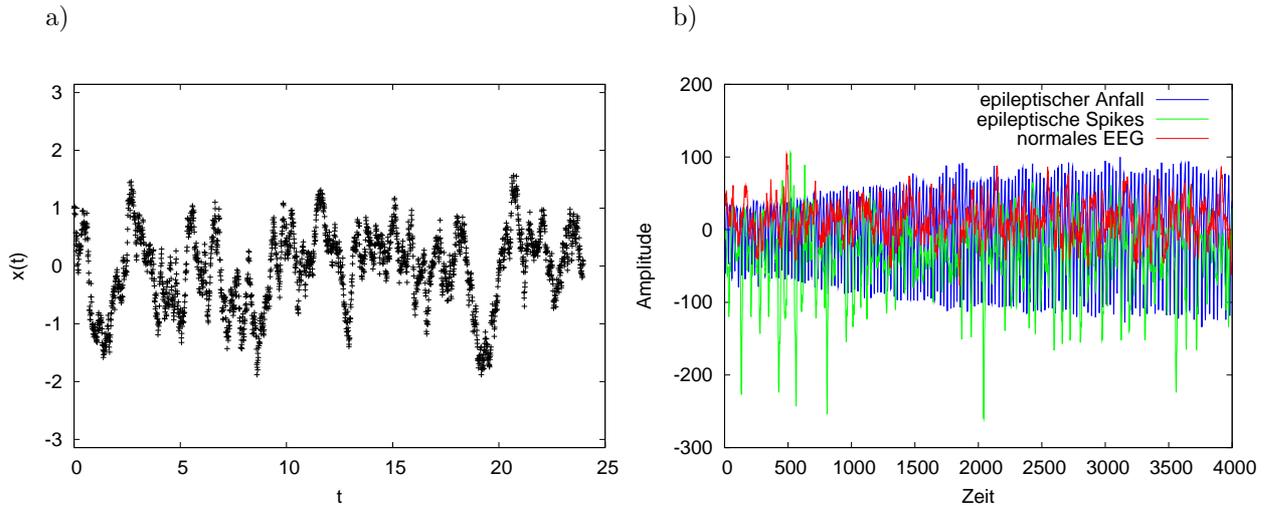


Abbildung 1.2: a) Ausschnitt aus einer simulierten stochastischen Zeitreihe
 b) EEG bei einer Epilepsieerkrankung; Amplitude des EEGs für den epileptischen Anfall wurde gezeichnet
 Quelle: Klinik für Epileptologie Bonn - K. Lehnertz

Analyse komplexer Systeme

An diesem Punkt knüpft die in dieser Arbeit behandelte Methode der *Drift-Diffusions-Schätzung* an. Die Technik der Zeitreihenanalyse wurde erfolgreich für verschiedene Systeme [16, 17, 49, 21, 36, 48] durchgeführt. Ein möglicher Ausgangspunkt ist eine empirische Zeitreihe eines komplexen Systems. Um die Schätzung auf eine Zeitreihe anwenden zu können, muss sich das System in einem stationären Zustand befinden.

Unter einer Zeitreihe versteht man zunächst eine Folge von Datenpunkten, die bei gleichen Bedingungen in dem System gemessen werden. Zu typischen Zeitreihen gehören EEG, EKG, Börsenkurse, Wetterbeobachtungen und Verkehrsdaten. Zeitreihen von komplexen Systemen sind immer stochastischer Natur (vgl. Abb.1.2a), da es sich um offene Systeme handelt.

Es stellt sich sofort die Frage nach der Dynamik, die hinter dem System steckt, den Prognosen, die sich für die künftige Entwicklungen machen lassen, oder den Trends, die zu erwarten sind.

Die allgemeine Problemstellung der Datenanalyse besteht also darin, einen Datensatz eines unbekanntes Systems zu analysieren. Es lässt sich somit induktiv mittels der gewonnenen Erkenntnisse ein tieferes Verständnis für das System gewinnen. Dies gilt besonders für den Fall, dass die Zeitreihe einer Messung eines Ordnungsparameters entspricht, d.h. das System generiert über noch unbekanntes Ordnungsparametergleichungen fluktuierende Lösungen. Die Methode der Datenanalyse erlaubt also eine numerische Bestimmung dieser Evolutionsgleichungen für eine große Klasse von Systemen.

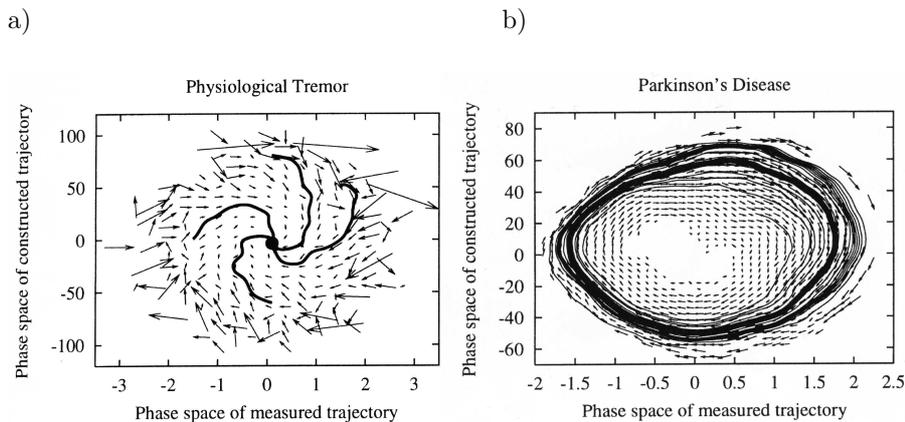


Abbildung 1.3: a) physiologischer Tremor
 b) pathologischer Tremor bei einer Parkinson Erkrankung
 entnommen aus [17]

Ein Beispiel für eines der kompliziertesten Systeme dürfte das menschliche Gehirn mit seinen 10^{11} Neuronen darstellen, die mit 10^3 Dendriten je Neuron ein extrem komplexes Netzwerk bilden. Vom Standpunkt der Physik aus kann die spannende Frage gestellt werden, wie Modelle zur Beschreibung fundamentaler Mechanismen formuliert werden können [23, 55]. Der nächste Schritt, der gemacht werden kann, ist eine Untersuchung der Auswirkung pathologischer Funktionsstörungen auf die Modelle des Systems. Daher stehen Fehlfunktionen des Gehirns, wie bei einer Epilepsie-Erkrankung oder dem Parkinson-Syndrom, im besonderen Fokus der Forschung [49].

Die Abbildung 1.2b zeigt den Vergleich zwischen einer gesunden und einer an Epilepsie leidenden Person von EEG Daten. Einen Ansatz zum Verständnis einiger grundlegenden Mechanismen könnte die Zeitreihenanalyse bieten. Eine mögliche Anwendung dieser Analyse könnte z.B. die Konstruktion eines Frühwarnsystems für Epileptiker sein, welches aufgrund der Dynamikänderung des Systems, die erkrankte Person rechtzeitig auf einen Anfall vorbereiten könnte. Weiterhin ist es denkbar, dass auf dieser Grundlage diagnostische Verfahren entwickelt werden können.

Ein Beispiel für eine diagnostische Analyse wurde von Friedrich et al. in [17] durchgeführt. Hierbei wurde der Tremor gesunder und an Parkinson leidender Personen analysiert. Die Trajektorie in Abbildung 1.3a, die durch die Auswertung von Datensätzen gesunder Personen ermittelt wurde, relaxiert auf einen stabilen Fixpunkt. Im Fall einer Parkinson Erkrankung durchläuft das System eine Hopf-Bifurkation und bildet eine oscillatorische Dynamik auf einem Grenzyklus aus (vgl. Abb. 1.3b). Die Phasenportraits bei einer Parkinson-Erkrankung unterscheiden sich also qualitativ von denen einer gesunden Person, so dass anhand dieser Ergebnisse zwischen gesunden und an Parkinson erkrankten Personen differenziert werden kann.

Grundlagen zur Zeitreihenanalyse

Im Allgemeinen wird zwischen einer parametrischen und einer nicht-parametrischen Zeitreihenanalyse differenziert. Bei einer nicht-parametrischen Datenanalyse ist keinerlei zusätzliche Information a priori über das System vorhanden. Soll eine parametrische Analyse durchgeführt werden, so sind Modellgleichungen für das System bekannt, so dass die Analyse zur Parameterbestimmung aus experimentellen Daten genutzt werden kann.

Das Ergebnis der Analyse erlaubt eine Reproduktion des charakterischen Systemverhaltens. In beiden Fällen kann zudem eine Trennung der deterministischen von der stochastischen Dynamik unternommen werden, d.h. mit der Isolierung des deterministischen Anteils kann so eine Rekonstruktion der Dynamik ohne Fluktuationen durchgeführt werden [30].

Weiterhin wird zwischen zwei Formen von Rauscheinflüssen unterschieden: Die Fluktuation, die aus der Komplexität des Systems stammt, wird als *dynamisches Rauschen* bezeichnet, da sie sich unmittelbar auf das Verhalten der Trajektorien, also auf die Prozessdynamik, auswirkt und somit ein Charakteristikum für stochastische Zeitreihen darstellt. Das dynamische Rauschen spielt eine besonders wichtige Rolle, wenn sich das System in der Nähe eines instabilen Punktes befindet oder wenn das System eine Multistabilität aufweist, wie es z.B. bei der stochastischen Resonanz der Fall ist [58].

Dagegen wird das Rauschen, das einer experimentellen Messung additiv überlagert ist, als *Messwertrauschen* bezeichnet. Das Messwertrauschen hat keinen Einfluss auf die Systemdynamik, wirkt sich jedoch auf die Qualität der Ergebnisse der Schätzung aus [4, 48].

In [20] wurde gezeigt, dass eine Zeitreihenanalyse bei periodisch getriebenen Systemen möglich ist. Die Analyse basiert für diese Systeme auf einer geeigneten stroboskopischen Abtastung der Zeit, wobei der Treiber eine deterministische Periodendauer besitzen muss, d.h. es dürfen keine Fluktuationen der Treiberfrequenz auftreten. Die Ergebnisse der Schätzung hängen dann explizit von der Zeit ab und sind wie der externe Treiber periodisch mit der Zeit.

Getriebene Systeme spielen eine wichtige Rolle in saisonabhängigen biologischen Systemen, Schneid- und Fräsprozessen in der Technik und bei Experimenten in den Bewegungswissenschaften [2, 31, 56, 9].

In dieser Arbeit werden Systeme mit einer zeitverzögerten Rückkopplung behandelt, die *Time Delay* oder kurz *Delay* genannt wird. Idealisierte Systeme beinhalten instantane Rückstellkräfte und keine Fluktuationen. Zuvor wurde schon der stochastische Charakter komplexer Systeme in der Natur motiviert. Sowohl in der belebten, als auch in der unbelebten Natur gibt es eine Vielzahl an Systemen mit Delay, da viele komplexe Systeme über Selbstregulationsmechanismen verfügen. Diese Mechanismen werden über *Feedback-Loops*, also Rückkopplungsschleifen, realisiert. Dabei wird dem Eingangssignal das Ausgangssignal zeitverzögert in geeigneter Form eingekoppelt, wie in Abbildung 1.4 schematisch illustriert wird. Dieser Rückkopplungsmechanismus führt auf die Behandlung von Delay-Differentialgleichungen oder genauer: von stochastischen Delay-Differentialgleichungen (SDDGL), wenn die Beschreibung eines

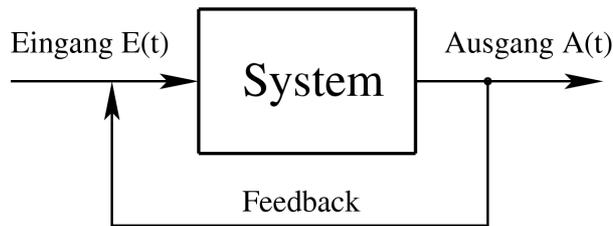


Abbildung 1.4: Schematische Darstellung einer zeitverzögerten Rückkopplung

komplexen Systems erfolgen soll. Analytische Berechnungen von SDDGLs sind mathematisch sehr anspruchsvoll und noch ein relativ neues Gebiet der Forschung. Diese Arbeit befasst sich numerisch mit der Analyse von Zeitreihen für Evolutionsgleichungen, die ein Delay enthalten.

Die Zeitverzögerungen der Feedback-Loops resultieren aus Transportprozessen oder Reaktionsketten in einem System, da eine Übertragung von Information je nach Mechanismus immer eine endliche Zeit benötigt. Für eine sinnvolle Beschreibung von Prozessen aus dem Bereich der Biologie, den Ingenieurwissenschaften (Regel- und Steuertechnik) oder den Bewegungswissenschaften (z.B. koordinierte Bewegungen) werden vorzugsweise Modelle mit Delays verwendet. Eine kurze Auswahl an biologischen Systemen mit Delay zeigt die Tabelle 1.1:

Typ	Phänomen	Delay τ
RK	Populationsdynamik [8]	Nahrungsversorgung, Geschlechtsreife
RK	HIV Infektionsdynamik [7, 42]	inaktive Infektionsphase (1-2 Tage) [42]
TP	Neurale Netze [29, 23]	neurale Signallaufzeiten
TP	Pupillen Lichtreflex [39, 27]	neurale Signallaufzeiten (300ms)
TP	Tracking Bewegung [51, 57, 53]	künstliches Delay für visuelle Rückkopplung (25-50ms)[53]

Tabelle 1.1: Zeitverzögerungen in biologischen Systemen [11]

TP: Transportprozess

RK: Reaktionskette

Die Methode der Zeitreihenanalyse für Systeme mit Delay wird in [12] durch die Einführung einer zusätzlichen Delay-Koordinate realisiert, was einer Erweiterung des Phasenraums um eine zeitverzögerte Koordinate entspricht.

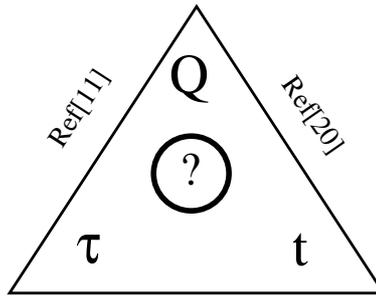


Abbildung 1.5: Q : stochastische Systeme
 t : periodisch getriebene Systeme
 τ : Systeme mit Delay

Aufbau der Arbeit

Bisher wurde die Drift-Diffusions-Schätzung stochastischer Zeitreihen entweder für periodisch getriebene Systeme in [20] oder für Systeme mit Timedelay in [11, 12] erfolgreich behandelt.

Ziel dieser Arbeit soll ein weiterer Schritt zu einer Verallgemeinerung der Drift-Diffusions-Schätzung sein, da stochastische Zeitreihen mit der Kombination von Delay und periodischem Treiber mittels der bisher vorhandenen Verfahren nicht untersucht werden können. Das Dreieck in Abbildung 1.5 steht symbolisch für die Vereinigung beider Methoden [20, 11]. Weiterhin soll ein Test auf Selbstkonsistenz eine Verifizierung der Analyseergebnisse ermöglichen. Da eine vollständige graphische Darstellung der Lösungen, die von drei Parametern abhängen können, sehr aufwändig ist, kann die Qualität der Schätzung mit Hilfe des Tests überprüft werden. Es können somit parametrische und insbesondere auch nicht-parametrische Analysen mit dieser Methode realisiert werden.

Die Schätzung wird zuerst auf univariate Zeitreihen angewandt, die sich über stochastische Differentialgleichungen erster Ordnung, also der Klasse der Langevin-Gleichungen, formulieren lassen.

Im nächsten Schritt erfolgt eine Erweiterung des Analyseverfahrens auf stochastische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. zur Auswertung der Zeitreihe werden bivariate Datensätze verwendet. Für eine praktische Umsetzung wird eine Zwei-Schritt-Methode etabliert, da ansonsten die Gesamtzahl an verfügbaren Messwerten zu gering ist, um sinnvolle Ergebnisse aus der Schätzung zu erhalten.

Die Arbeit ist folgendermaßen gegliedert:

Zunächst werden in Kapitel 2 grundlegende Begriffe eingeführt und Schreibweisen erläutert, die für die Anwendung der Analysemethode notwendig sind. Das Verfahren aus [20] und [11] soll anhand zweier Beispiele motiviert werden.

In Kapitel 3 wird die Durchführung des Selbstkonsistenztests erklärt. Dabei wird auf die Voraussetzungen für eine erfolgreiche Zeitreihenanalyse und auf einige problematische Aspekte näher eingegangen.

In Kapitel 4 wird die Zeitreihenanalyse mit Antrieb und Delay vorgestellt. Im

ersten Teil von Kapitel 4 wird die numerische Umsetzung des Analyseverfahrens für Prozesse mit Treiber und Delay diskutiert. Schließlich folgen zwei Beispiele für die Datenanalyse einer Zufallsvariablen in einem überdämpften System:

Im ersten Beispiel wird eine einfache additive Kopplung zwischen der Zufallsvariablen, dem Delay und einem periodischen Antrieb betrachtet.

Das zweite Beispiel befasst sich mit dem allgemeineren Fall einer multiplikativen Kopplung zwischen Delay und Treiber.

Das Kapitel 5 behandelt die Zeitreihenanalyse für entdämpfte Systeme zweiter Ordnung mit Antrieb und Delay. In diesem Fall wird die Analyse einer bivariaten Zeitreihe auf die in Kapitel 4 eingeführte Methode zurückgeführt. Es folgen zwei Beispiele mit getriebenen nichtlinearen Oszillatoren, die über eine Feedback-Kontrolle verfügen.

Bei dem Oszillator im ersten Beispiel handelt es sich um einen gedämpften Oszillator. Das zweite Beispiel demonstriert die Zeitreihenanalyse für den entdämpften Oszillator, welches für die Anwendung in den Bewegungswissenschaften bei Experimenten mit einer zeitverzögerten visuellen Feedback-Kontrolle oder in der Technik für getriebene Prozesse mit dynamischer Steuerung bei Fräs- und Schleifprozessen eine wichtige Stellung einnimmt. Die in Kapitel 4 und 5 angeführten Ergebnisse werden mit der in Kapitel 3 präsentierten Methode auf ihre Selbstkonsistenz überprüft.

Eine zusammenfassende Übersicht mit einer kurzen Diskussion der wichtigsten Aspekte, sowie einigen Vorschlägen zur Erweiterung der Zeitreihenanalyse, wird in Kapitel 6 gegeben.

2 Stochastische Prozesse und Drift-Diffusions-Schätzung

Im folgenden Kapitel soll eine kurze Übersicht der verwendeten Schreibweisen über das stochastische Kalkül gegeben werden. Hier werden die in dieser Arbeit verwendeten Begriffe und theoretische Grundlagen aufgelistet. Dabei soll keine vollständige Einführung in die Theorie der stochastischen Prozesse erfolgen. Es werden lediglich die notwendigen Grundlagen dargestellt, die zum Verständnis der vorgestellten Methode zur Zeitreihenanalyse notwendig sind.

Desweiteren wird auf eine vollständige systematische mathematische Einführung der Begriffe an dieser Stelle verzichtet. Ein guter Einstieg in die Wahrscheinlichkeitstheorie, die Kolmogorov 1930 begründete, ist zum Beispiel in [24] nachzulesen.

In diesem Kapitel wird weiterhin ein Zusammenhang zwischen gewöhnlichen stochastischen Differentialgleichungen erster Ordnung, die der Klasse der sogenannten *Langevin-Gleichungen* angehören, und einer konjugierten Formulierung des physikalischen Problems, einer partiellen Differentialgleichung, die *Fokker-Planck-Gleichung* genannt wird, erstellt. Die grundlegende Methode zur Zeitreihenanalyse fußt auf der Beschreibung stochastischer Prozesse mit Hilfe der Langevin- und der Fokker-Planck-Gleichung. Im abschließenden Teil dieses Kapitels werden drei kurze Beispiele zur Motivation einer Zeitreihenanalyse herangezogen. Als Nachschlagewerk oder zur Einarbeitung in das Arbeitsgebiet der Stochastik seien speziell für Physiker die Lehrbücher [47], [19] oder [26] empfohlen. Diese Arbeit orientiert sich an der Notation der Vorlesung „Dynamische Systeme“, die von R. Friedrich und T. D. Frank im Wintersemester 2004/2005 an der WWU Münster gehalten wurde.

2.1 Grundlagen

Sei X mit $X \in \Omega$ zunächst eine eindimensionale Zufallsvariable und Ω der Ereignisraum. X kann sowohl kontinuierliche Werte annehmen (wie die Körpergröße oder das Gewicht einer Person), als auch diskrete Werte (der Wurf einer Münze oder eines Würfels).

Man erhält bei N -maliger Durchführung eines Zufallsexperimentes die zufälligen Werte $\{X_1, X_2, \dots, X_N\} \in \Omega$ für eine Messgröße X .

Wahrscheinlichkeitsdichteverteilung

In dieser Arbeit sollen kontinuierliche Zufallsvariablen $X \in \mathbb{R}$ bzw. $X \in [0, 2\pi)$ betrachtet werden. Die Wahrscheinlichkeit P bei einer Messung, dass sich X im

Intervall $[a, b]$ mit $a, b \in \Omega$ und $a \leq b$ befindet, ist:

$$P([a, b]) = P(a \leq X \leq b) = \int_a^b dx f(x)$$

Dabei ist $f(x)$ die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion, Dichteverteilung oder Dichtefunktion, welche häufig mit PDF (*probability density function*) abgekürzt wird. Man setzt voraus, dass f stückweise stetig und Riemann-integrierbar ist. Zusätzlich fordert man für f :

1. $\forall x : f(x) \geq 0$ positiv semi-definit
2. $\int_{\Omega} dx f(x) = 1$ normiert

Erwartungswert

Der Erwartungswert einer beliebigen Funktion $s(X)$ ergibt sich zu:

$$\langle s(X) \rangle = \int_{\Omega} dx f(x) s(x)$$

Momente

Die Erwartungswerte für X^n werden n -te Momente genannt. Das 1. Moment ist der Mittelwert der Dichteverteilung. Allgemein gilt für ein beliebiges Moment:

$$M_n = \langle X^n \rangle = \int_{\Omega} dx f(x) x^n$$

Varianz

Die Varianz ist die quadratische Abweichung der Dichteverteilung vom Mittelwert. Sie gibt im wesentlichen die Breite der Verteilungsdichte an:

$$\sigma^2 = \langle (X - M_1)^2 \rangle = M_2 - M_1^2$$

2.2 Klassifizierung stochastischer Prozesse

Im Fokus des Interesses befinden sich dynamische Systeme. Man hat also mit solchen Systemen zu tun, die eine explizite Zeitabhängigkeit aufweisen. Die Messung ergibt folglich nicht nur einen Wert bzw. einen Punkt \mathbf{X} im Ereignisraum, sondern eine Trajektorie $\mathbf{X}(t)$. Die Zufallsvariable \mathbf{X} ist allgemein ein n -dimensionaler Vektor. Der Index i markiert die einzelnen Realisierungen der Trajektorie $\mathbf{X}^{(i)}(t)$ des stochastischen Prozesses bei gleichen Anfangsbedingungen. In der Abbildung 2.1 sind drei verschiedene Realisierungen eines stochastischen Prozesses zu sehen. Möchte man eine vollständige Beschreibung des

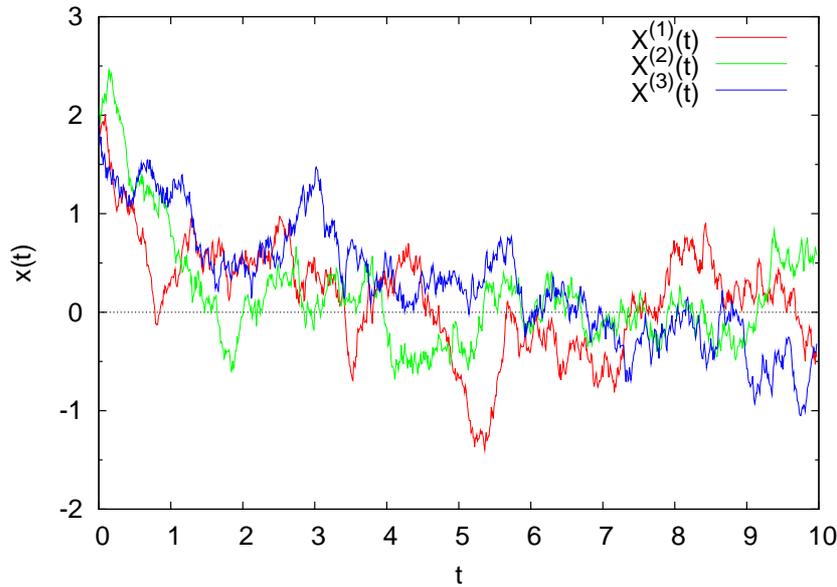


Abbildung 2.1: Beispiele verschiedener Realisierungen eines eindimensionalen stochastischen Prozesses

stochastischen Systems haben, so benötigt man ein Ensemble von Trajektorien

$$\{\mathbf{X}^{(1)}(t), \mathbf{X}^{(2)}(t), \dots, \mathbf{X}^{(N)}(t)\} \quad (2.1)$$

wobei der Limes $N \rightarrow \infty$ vollzogen wird. Im weiteren Verlauf wird aus Gründen der Übersichtlichkeit angenommen, dass die Zufallsvariable X ein Skalar ist. Die Dichteverteilung berechnet sich mit Hilfe der Dirac'schen δ -Funktion:

$$f(x, t) = \langle \delta(x - X(t)) \rangle \quad (2.2)$$

Es ist zu beachten, dass f allgemein von der Zeit abhängt und die Mittelung über das Ensemble und nicht über die Zeit erfolgt. Hängt f nicht mehr explizit von der Zeit ab, so liegt ein stationärer Prozess vor.

Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte JPDF (*joint probability density function*) gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass sich die Trajektorie bei einem Experiment zuerst im Intervall $[x_1, x_1 + dx_1]$ zu dem Zeitpunkt t_1 und danach, d.h. $t_2 \geq t_1$, im Intervall $[x_2, x_2 + dx_2]$ zu dem Zeitpunkt t_2 befindet.

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2) = \langle \delta(x_1 - X(t_1)) \delta(x_2 - X(t_2)) \rangle \quad (2.3)$$

Die N-Punkt-JPDF lässt sich analog zu (2.3) formulieren:

$$f(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; x_N, t_N) = \langle \delta(x_1 - X(t_1)) \cdot \dots \cdot \delta(x_N - X(t_N)) \rangle$$

Um Korrelationen eines stochastischen Prozesses bis zur N -ten Ordnung beschreiben zu können, benötigt man somit eine Hierarchie an JPDFs über N Zeitpunkte. Mit der Zeitordnung ($t_N \geq t_{N-1} \geq \dots \geq t_1$) resultiert eine allgemeine Formulierung des stochastischen Prozesses:

$$f(x_1, t_1) \rightarrow f(x_2, t_2; x_1, t_1) \rightarrow \dots \rightarrow f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1) \quad (2.4)$$

Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte

Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte CPDF (*conditional probability density function*) gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit die Trajektorie in $[x_2, x_2+dx_2]$ zur Zeit t_2 liegt, unter der Nebenbedingung, dass sie sich zuvor zum Zeitpunkt t_1 schon in $[x_1, x_1 + dx_1]$ befunden hat:

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{f(x_1, t_1; x_2, t_2)}{\int dx_2 f(x_1, t_1; x_2, t_2)} \quad (2.5)$$

Die allgemeine Formulierung für CPDFs mit mehreren Nebenbedingungen lautet somit:

$$p(x_N, t_N; \dots; x_k, t_k | x_{k-1}, t_{k-1}; \dots; x_1, t_1) = \frac{f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1)}{\int dx_N \dots dx_k f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1)}$$

Eine vollständige Beschreibung eines beliebigen stochastischen Systems erfolgt mit (2.1) oder (2.4). Häufig ist es allerdings nicht notwendig und kaum möglich eine Beschreibung des Systems über ein Ensemble von stochastischen Trajektorien oder der Hierarchie von N -Punkt-JPDFs vorzunehmen.

Eine vollständige Beschreibung eines stochastischen Systems über eine N -Punkt-JPDF ist in vielen Fällen nicht notwendig, da sich sehr viele stochastische Prozesse in der Physik näherungsweise als sogenannte *Markov-Prozesse* beschreiben lassen. Zunächst sollen aber *stochastisch unabhängige Prozesse* betrachtet werden, da ihre Beschreibung einfacher ist, als die der Markov-Prozesse.

Stochastisch unabhängige Prozesse

Von einem stochastisch unabhängigen Prozess spricht man, wenn ein rein zufälliger Prozess vorliegt, d.h., dass der dynamische Prozess kein Gedächtnis besitzt. Vergangene Systemzustände haben keine Auswirkung auf die Zukunft. Dies drückt sich darin aus, dass die JPDF faktorisiert und die CPDFs sich als PDFs schreiben lassen, weil in diesem Fall die Situation zu einem früheren Zeitpunkt irrelevant für den nächsten Zeitschritt ist.

$$p(x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_1, t_1) = f(x_N, t_N)$$

$$f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1) = \prod_{i=1}^N f(x_i, t_i)$$

Markov-Prozess

Markov-Prozesse spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Sie sind die einfachsten Prozesse mit einem Gedächtnis. Die Länge des Gedächtnisses beträgt dabei genau einen Zustandsübergang $(t_i) \rightarrow (t_{i+1})$. Der Prozess „erinnert“ sich nicht mehr an t_{i-1} .

$$p(x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1}; \dots; x_1, t_1) = p(x_N, t_N | x_{N-1}, t_{N-1})$$

Es lassen sich eine Vielzahl stochastischer Prozesse in der Natur, wie die Brown'sche Bewegung oder Transportvorgänge, über Markov-Prozesse modellieren. Zur Beschreibung eines Markov-Prozesses zerfällt die JPDPF in ein Produkt von 2-Punkt-CPDFs:

$$f(x_N, t_N; \dots; x_1, t_1) = \prod_{i=2}^N p(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) f(x_1, t_1)$$

Die CPDFs werden auch als Übergangswahrscheinlichkeiten bezeichnet. In einer 2-Punkt-JPDF $f(x_2, t_2; x_1, t_1)$ ist die gesamte Information über den Prozess enthalten, da sich die CPDF mit (2.5) ermitteln lässt.

Die Differenz der beiden Zeiten t_2 und t_1 kann beliebig gewählt werden. Bei grossen Zeiten nimmt oftmals die Wahrscheinlichkeit ab, dass ein Übergang von $x_1 \rightarrow x_2$ stattfindet. In diesem Falle geht das Gedächtnis für die Zufallsvariable verloren. Zum Beispiel, strebt ein Prozess für große Zeiten gegen eine stationäre Verteilung f_{st} , so gilt:

$$\lim_{t_2 \rightarrow \infty} p(x_2, t_2 | x_1, t_1) = f_{st}(x_2) \quad \text{und} \quad \lim_{t_2 \rightarrow \infty} f(x_2, t_2; x_1, t_1) = f_{st}(x_2) f(x_1, t_1)$$

Wird aber die Zeitdifferenz sehr klein, nimmt die CPDF einen scharfen Wert an. Für den Fall, dass $(t_2 - t_1) \rightarrow 0$ läuft, folgt:

$$p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \rightarrow \delta(x_2 - x_1)$$

2.3 Langevin Gleichungen

Über die Langevin-Gleichung lassen sich eine Vielzahl von dynamischen stochastischen Systemen modellieren. Zu der Klasse der Langevin-Gleichungen gehören gewöhnliche Differentialgleichungen erster Ordnung, in denen eine bestimmte Art von stochastischem Antrieb berücksichtigt wird. Dieser Antrieb wird Langevin-Kraft genannt. Da sich gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung auf Differentialgleichungssysteme erster Ordnung transformieren lassen, können viele dynamische Systeme auf eine Langevin-artige Form umgeschrieben werden.

Eine allgemeine Form für eine gewöhnliche stochastische Differentialgleichung (SDGL) mit $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^n$ lautet:

$$\frac{d}{dt}X_i = h_i(\mathbf{X}, t) + \sum_j g_{ij}(\mathbf{X}, t) \Gamma_j(t) \quad (2.6)$$

Dabei ist h_i der deterministische Anteil des Prozesses, auch Drift genannt. Die Funktion $\Gamma_j(t)$ stellt eine zufällig fluktuierende Kraft dar. Die Koeffizienten g_{ij} geben die Stärke der Fluktuationen an und hängen mit der Diffusion des Prozesses zusammen.

Mit einer Langevin-Gleichung (2.6) lassen sich stochastische Trajektorien generieren, so dass wie mit (2.1) und (2.4) das System vollständig beschrieben werden kann. Zudem liefert Gleichung (2.6) nicht nur die Dichteverteilungen $f(x, t)$, sondern auch die vollständige Dynamik des Systems. Stellt man an $\mathbf{\Gamma}(t)$ nun die Forderung, dass

1. $\langle \mathbf{\Gamma}(t) \rangle = \mathbf{0}$, sowie
2. $\langle \Gamma_i(t) \Gamma_j(t') \rangle = 2\delta_{ij} \delta(t - t')$,

so erhält man ein δ -korreliertes gaußverteiltes Rauschen mit einer Varianz von $\sigma^2 = 2$, welches als *Langevin-Kraft* oder aufgrund der spektralen Verteilung auch als weisses Rauschen bezeichnet wird. Gleichung (2.6) wird dann zur Langevin-Gleichung. D.h. die Langevin-Gleichung ist ein Spezialfall der SDGL. Stochastische Kräfte werden allgemein als dynamisches Rauschen bezeichnet, da diese intrinsisch fluktuierende Kräfte darstellen, die sich unmittelbar auf die Dynamik des Systems auswirken. Eine derart gestaltete Gleichung generiert stochastische Trajektorien mit markov'schen Eigenschaften.

In dieser Arbeit werden eindimensionale Langevin-Gleichungen untersucht. Für eine autonome Langevin-Gleichung erhält man folgende Gestalt:

$$\frac{d}{dt}X = h(X) + g(X) \Gamma(t)$$

Physikalisch kann man diese Gleichung mit einer überdämpften Bewegung eines Teilchens in einem Potential V unter sehr starken Reibungseinflüssen deuten (siehe Abb. 2.2). Die Zufallsvariable kann somit zur besseren Anschauung als Ort des Teilchens interpretiert werden, so dass im Folgenden X mit einer Ortskoordinate identifiziert wird. (Allgemein kann X eine beliebige physikalische Messgröße sein: Winkel, elektrischer Strom, Geschwindigkeitsinkremente, Dichteänderungen etc).

Während sich das Teilchen langsam dem lokalen Minimum nähert, sorgt die Langevin-Kraft für Fluktuationen der Bahn. Das Potential V ergibt sich unmittelbar aus der Drift h mit:

$$V(x) = - \int^x dx' h(x')$$

Eine äquivalente Formulierung für einen mehrdimensionalen Prozess \mathbf{X} lautet:

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = -\nabla V(\mathbf{X})$$

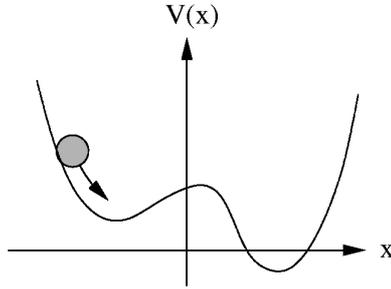


Abbildung 2.2: Überdämpfte Bewegung eines Teilchens in einem eindimensionalen Potential

Weiterhin unterscheidet man zwei Fälle für die Kopplung der Fluktuation. Für den Fall, dass g eine orts- und zeitunabhängige Konstante ist, spricht man von *additivem* Rauschen, d.h. das Rauschen ist unabhängig vom Ort des Teilchens. Ist g eine Funktion von X oder t , wird das Rauschen als *multiplikativ* bezeichnet. Im eindimensionalen Fall lässt sich ein multiplikativer Rauschterm $g(X)$ über eine geeignete Koordinatentransformation auf ein additives Rauschen transformieren, Näheres findet man in [47].

Die beiden einfachsten Fälle einer Langevin-Gleichung sind der *Wiener-Prozess* und der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*.

Von einem physikalischen Standpunkt aus betrachtet, ist jedes δ -korrelierte Rauschen unrealistisch, da eine über alle Frequenzen konstante Spektralverteilung eine nicht endliche Energie beinhaltet. Daher zeigen viele reale Prozesse immer einen endlichen Cutoff in der Spektralverteilung, welches auf ein sogenanntes farbiges Rauschen führt. Aus diesem endlichen Cutoff resultiert schließlich eine endliche Korrelationszeit für das Rauschen.

Farbiges Rauschen kann durch eine Korrelationsfunktion folgender Form genähert werden:

$$\langle \Gamma(t)\Gamma(t + \varepsilon) \rangle = \frac{1}{m} e^{-|m\varepsilon|}$$

Wichtig für den Prozesscharakter (der Prozess soll Markov-Eigenschaft besitzen) ist das Verhältnis der Korrelationszeit ε von $\Gamma(t)$ und den typischen Zeitskalen, die für den Prozess relevant sind. Die Zeitskalen des Prozesses werden beispielsweise durch die Größe eines Dämpfungstermes bestimmt. Daher zeigen viele reale Prozesse auf Zeitskalen, die viel grösser als ε sind, Markov-Eigenschaft, bei den Übergang zu kleinen Zeitskalen hin jedoch verloren gehen.

Wiener-Prozess

Der Wiener-Prozess $W(t)$ ist ein reiner stochastischer Prozess. Es liegt keine Drift vor, d.h. die Trajektorie wird ausschließlich durch die Zufallskraft beeinflusst.

$$\frac{d}{dt}W = \sqrt{Q} \Gamma(t) \tag{2.7}$$

Die Größe Q ist eine ortsunabhängige Rauschstärke. Für den Mittelwert erhält man durch Mittelung über das Ensemble:

$$M_1(t) = x_0 ,$$

wobei x_0 der Startwert $x(t=0) = x_0$ ist. Die zeitliche Abhängigkeit der Varianz ist

$$\sigma^2(t) = Q t .$$

Das entspricht dem Ergebnis eines normalen Diffusionsprozesses. Setzt man eine pulsförmige Anfangsbedingung zu Grunde, also eine Dichteverteilung der Form $f(x, 0) = \delta(x)$ so erhält man folgende zeitliche Entwicklung:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(t)}}$$

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess

Im Ornstein-Uhlenbeck-Prozess hängt die Drift linear vom Ort ab. Die SDGL schreibt sich somit zu:

$$\frac{d}{dt}X = -aX + \sqrt{Q} \Gamma(t)$$

Auch hier lassen sich die zeitliche Entwicklung des 1. Momentes und der Varianz angeben. Der Erwartungswert verschwindet für Zeiten $t \gg a$, da:

$$M_1(t) = x_0 e^{-at}$$

wobei $M_1(0) = x_0$ eine konstante Anfangsbedingung für das Ensemble darstellt. D.h. die Dichteverteilung wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit $f(x, 0) = \delta(x - x_0)$ vorgegeben. Daraus folgt unmittelbar für das zweite Moment $M_2(0) = x_0^2$ als Anfangsbedingung. Letztendlich erhält man für die Varianz

$$\sigma^2(t) = \frac{Q}{a} (1 - e^{-2at}) .$$

Die Verteilungsdichte $f(x, t)$ lautet:

$$f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t)}} e^{-\frac{(x-M_1(t))^2}{2\sigma^2(t)}}$$

Die asymptotische Lösung für den Limes $t \rightarrow \infty$ ergibt somit

$$f_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\infty)}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(\infty)}} \quad (2.8)$$

eine Gaußverteilung mit der Varianz mit $\sigma^2(\infty) = \frac{Q}{a}$.

Interpretation stochastischer Integrale

Eine korrekte Beschreibung für ein δ -korreliertes, also für alle t unstetiges $\Gamma(t)$ erfolgt über ein sogenanntes *Stieltjes* Integral. Für derlei stochastische Integrale gelten besondere Rechenregeln, auf die in dieser Arbeit nicht näher eingegangen werden soll. Betrachtet man ein kleines Wegstück des stochastischen Pfades, so muß über die Fluktuation integriert werden:

$$dW(t) = W(t + dt) - W(t) = \int_t^{t+dt} dt' \Gamma(t')$$

Ein sehr wichtiger Zusammenhang zwischen der Rauschkraft und dem infinitesimalen Wegstück folgt aus der Berechnung der Varianz bzw. des Mittelwertes:

$$dW(t) = \sqrt{dt} \Gamma(t) \tag{2.9}$$

Man erhält als Ergebnis [47, 26], dass dW von der Ordnung $O(\sqrt{dt})$ ist und nicht von der Ordnung $O(dt)$, wie man naiv erwarten könnte.

Betrachtet man nun stochastische Integrale als Grenzwert einer Summe, hängt das Ergebnis aufgrund von (2.9) von der Wahl der Stützstelle ab:

Die Interpretation von $It\hat{o}$ benutzt linksseitige Stützstellen zur Berechnung der Summe. *Stratonovich* hingegen verwendet mittige Stützstellen.

Die Definition nach $It\hat{o}$ bietet den Vorteil, dass ein einfacherer Zusammenhang mit Drift und Diffusion in der Fokker-Planck-Gleichung besteht, als bei der Interpretation nach *Stratonovich*. Allerdings müssen bestimmte Regeln für die Integration und Differentiation berücksichtigt werden. Die Ergebnisse der Zeitreihenanalyse in Kapitel 2, 3, 4 und 5 erfolgen in der Interpretation nach $It\hat{o}$.

Nichtlineare Langevin-Gleichung mit Delay und Antrieb

Es sollen stochastische Prozesse mit einer zeitlich verzögerten Rückkopplung (Delay) und einem externen periodischen Antrieb untersucht werden. Dies lässt sich allgemein auf eine Langevin-Gleichung übertragen:

$$\frac{d}{dt}X = h(X, Y, F(t)) + g(X, Y, F(t)) \Gamma(t) \tag{2.10}$$

Die Variable Y ist die um τ zeitverzögerte Zufallsvariable, d.h. es gilt $Y = X(t-\tau)$. Der Parameter ist T die Periode des externen Treibers $F(t) = F(t+T)$. Durch die Einführung des Delays verliert das System seine Markov-Eigenschaft, da es sich zusätzlich zu dem letzten Zeitschritt noch an den um τ vergangenen Schritt „erinnert“.

Numerische Umsetzung der Langevin Gleichung

Zur numerischen Umsetzung von Gleichung (2.10) benötigt man eine endliche Diskretisierung der Zeit Δt . Da es sich um einen stochastischen Prozess handelt und somit in jedem Zeitschritt eine Fluktuationkraft wirkt, wird ein einfaches *Euler-Verfahren* verwendet. Man erhält für die eindimensionale Gleichung (2.10) unter Verwendung von Gleichung (2.9):

$$\begin{aligned} X(t + \Delta t) &= X(t) + \Delta t h(X, Y, F(t)) + \int_t^{t+\Delta t} dt' g(X, Y, F(t')) dW(t') \\ &= X(t) + \Delta t h(X, Y, F(t)) + \sqrt{\Delta t} g(X, Y, F(t)) w(t) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Hierbei ist $w(t)$ eine zeitdiskrete Version der Langevin-Kraft $\Gamma(t)$, für die gilt

$$\langle w(t + n \Delta t) w(t + m \Delta t) \rangle = 2\delta_{nm}$$

Weiterhin ist $w(t)$ gaußverteilt. Da Zufallsgeneratoren meistens gleichverteilte Zufallszahlen $\gamma \in [0, 1)$ generieren, kann der effektive *Box-Müller-Algorithmus* verwendet werden, der aus zwei gleichverteilten Zufallszahlen zwei standardnormalverteilte Zufallszahlen über eine geschickte Koordinatentransformation erzeugt:

$$\begin{aligned} w_1 &= \sqrt{-2 \ln(\gamma_1)} \cos(2\pi\gamma_2) \\ w_2 &= \sqrt{-2 \ln(\gamma_2)} \sin(2\pi\gamma_1) \end{aligned}$$

Weitere Methoden zur Generierung von nicht gaußverteilten Zufallszahlen findet man in [26].

Chapman-Kolmogorov-Gleichung

Zunächst geht man von der reduzierten Dichteverteilung aus:

$$f(x_3, t_3; x_1, t_1) = \int dx_2 f(x_3, t_3; x_2, t_2; x_1, t_1)$$

Die Verteilungsdichte $f(x_3, t_3; x_1, t_1)$ erhält man durch Integration über x_2 . Markov-Prozesse lassen sich über die Faktorisierung der Verteilungsdichten umschreiben in

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) f(x_1, t_1) = \int dx_2 p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) f(x_1, t_1)$$

mit den Zeiten $t_3 \geq t_2 \geq t_1$. Da $f(x_1, t_1)$ eine beliebige Verteilung ist, erhält man allgemein die *Chapman-Kolmogorov-Gleichung*:

$$p(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 p(x_3, t_3 | x_2, t_2) p(x_2, t_2 | x_1, t_1) \quad (2.12)$$

Die Chapman-Kolmogorov-Gleichung besagt, dass sich die Übergangswahrscheinlichkeit von dem Zeitpunkt t_1 zu der Zeit t_3 auch über beliebige Zeiten zwischen

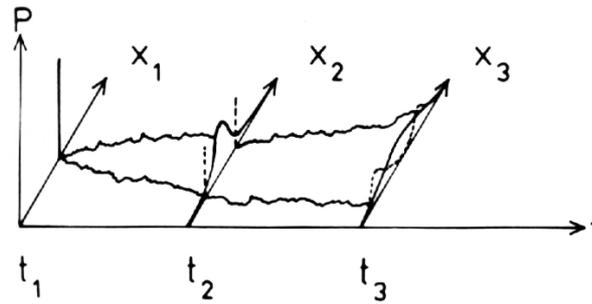


Abbildung 2.3: Übergangswahrscheinlichkeiten für verschiedene Zeiten, entnommen aus [47]

t_1 und t_3 als Produkt der einzelnen CPDFs ausdrücken lässt. Dabei wird über den gesamten Bereich des Zwischenschrittes integriert. Die Abbildung 2.3 zeigt dieses für eine δ -förmige Anfangsbedingung.

Da Gleichung (2.12) nur gilt, wenn ein Markov-Prozess vorliegt, kann sie verwendet werden, um zu überprüfen, auf welchen Zeitskalen die Markov-Bedingung noch erfüllt wird.

2.4 Fokker-Planck-Gleichung

Es stellt sich jetzt die Frage, ob es noch andere Möglichkeiten gibt, einen stochastischen Prozess zu beschreiben, als mit (2.1), (2.4) und (2.6). Mit einer Langevin-Gleichung (2.6) werden einzelne Pfade eines stochastischen Prozesses simuliert. Werden gleiche Anfangsbedingungen für die Realisierung eines stochastischen Pfades gewählt, kann so ein Ensemble an stochastischen Trajektorien präpariert werden. Mittels Gleichung (2.2) kann aus diesem Ensemble die PDF ermittelt werden.

In den meisten Fällen genügt eine Beschreibung der Dynamik für die PDFs, da sie die wesentlichen Informationen des Systems beinhalten. Behandelt man Systeme mit Markov-Eigenschaft, so kann man die PDF mit Gleichung (2.12) für einen beliebigen Zeitpunkt $t + \Delta t$ in Integralform angeben:

$$f(y, t + \Delta t) = \int dx p(y, t + \Delta t | x, t) f(x, t) \quad (2.13)$$

Dabei beschreibt y den Ort, an dem sich das Teilchen zu dem späteren Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet, und x entsprechend den Ort zum Zeitpunkt t .

Die Integralgleichung (2.13) kann in eine Differentialgleichung umgeschrieben werden, der Form

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \hat{L}_{KM} \left(x, \frac{\partial}{\partial t}, t \right) f(x, t) \quad (2.14)$$

Es muß jetzt ein Ausdruck für den Differentialoperator \hat{L}_{KM} gefunden werden. Alternative Ansätze zur Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung kann in der Literatur [47] nachgeschlagen werden. Im Folgendem wird eine kurze Herleitung

über die Entwicklung der δ -Funktion unternommen. Diese Herleitung findet sich ebenfalls in [47]. Zunächst werden die bedingten Momente folgendermaßen definiert:

$$\begin{aligned} M_n(x, t, \Delta t) &= \langle (X(t + \Delta t) - X(t))^n \rangle_{X(t)=x} \\ &= \int dx (y - x)^n p(y, t + \Delta t | x, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Der Ausgangspunkt der Herleitung ist die Identität

$$p(y, t + \Delta t | x, t) = \int dx' \delta(x' - y) p(x', t + \Delta t | x, t) \quad (2.16)$$

Als nächstes wird formal eine Taylorentwicklung der δ -Funktion durchgeführt. Dabei soll die Differenz $x' - x$ klein sein:

$$\begin{aligned} \delta(x' - y) &= \delta(x - y + x' - x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x' - x)^n}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^n \delta(x - y) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x' - x)^n}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \delta(x - y) \end{aligned} \quad (2.17)$$

Mit Gleichung (2.17) und (2.16) erhält man:

$$\begin{aligned} p(y, t + \Delta t | x, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n \int dx' (x' - x)^n p(x', t + \Delta t | x, t) \delta(x - y) \\ &= \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n M_n(y, t, \Delta t) \right] \delta(x - y) \\ &= \left[1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^n M_n(y, t, \Delta t) \right] \delta(y - x) \end{aligned} \quad (2.18)$$

Für die letzten beiden Umformungen in (2.18) wird Gleichung (2.15) benötigt und die Symmetrie der δ -Funktion

$$\delta(y - x) = \delta(x - y)$$

Das Ergebnis (2.18), in Gleichung (2.13) eingesetzt, ergibt die gesuchte Form mit

$$\hat{L}_{KM} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^k D^{(k)}(x, t) \quad (2.19)$$

und

$$\begin{aligned} D^{(k)}(x, t) &= \frac{1}{k!} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} M_k(x, t, \Delta t) \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int dx (y - x)^k f(y, t + \Delta t | x, t) \\ &= \frac{1}{k!} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle (X(t + \Delta t) - x)^k \rangle_{X(t)=x} \end{aligned}$$

Der Ausdruck für (2.19) wird *Kramers-Moyal-Entwicklung* genannt und die Funktionen $D^{(k)}(x, t)$ werden als Kramers-Moyal-Koeffizienten bezeichnet. Um Verteilungsdichten berechnen zu können, spielt es eine wichtige Rolle, wieviel Terme der Kramers-Moyal-Entwicklung berücksichtigt werden müssen.

Pawula Theorem

Das Theorem von *Pawula* gibt an, wieviel Terme für die Entwicklung von Relevanz sind. Die Quintessenz ist, dass entweder alle Kramers-Moyal-Koeffizienten für alle $k \geq 3$ verschwinden (also nach dem zweiten Koeffizienten), oder unendlich viele Terme berücksichtigt werden, wenn die Reihe nicht nach dem zweiten Koeffizienten abbricht.

Fokker-Planck-Gleichung in einer Dimension

Bricht man die Entwicklung nach dem dritten Term ab, so erhält man die *Fokker-Planck-Gleichung* oder auch *Kolmogorov-vorwärts-Gleichung*:

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right] f(x, t) \quad (2.20)$$

Die Fokker-Planck-Gleichung lässt sich als eine Evolutionsgleichung für Verteilungsdichten von Markov-Prozessen interpretieren. Der Koeffizient $D^{(2)}$ besitzt einen diffusiven Charakter und wird daher als *Diffusion* bezeichnet. $D^{(1)}$ ist der *Drift*-Term.

Man kann (2.20) auch zur Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten verwenden. Analog zu (2.19) und (2.20) ergibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|x', t') = \hat{L}_{FP} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, t \right) p(x, t|x', t') \quad (2.21)$$

Fokker-Planck-Gleichung in n Dimensionen

Die Herleitung einer allgemeine Form der Fokker-Planck-Gleichung in mehreren Dimensionen erfolgt analog zu dem eindimensionalen Fall. Es muss jedoch berücksichtigt werden, dass der k -te Kramer-Moyal-Koeffizient ein Tensor der k -ten Stufe ist, d.h. $D_i^{(1)}$ ergibt einen Vektor mit $i = 1 \dots n$ und $D_{ij}^{(2)}$ eine $n \times n$ Matrix usw.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{x}, t) = \left[-\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} D_i^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right] f(\mathbf{x}, t) \quad (2.22)$$

Zusammenhang zwischen der Fokker-Planck-Gleichung und der Langevin-Gleichung

Es gilt ein wichtiger Zusammenhang zwischen der Kramers-Moyal-Entwicklung und der Langevin-Gleichung. Im eindimensionalen Fall lautet dieser:

$$\begin{aligned} \text{It\^o} & : D^{(1)}(x, t) = h(x, t) & \text{und} & \quad D^{(2)}(x, t) = g^2(x, t) \\ \text{Stratonovich} & : D^{(1)}(x, t) = h(x, t) + g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t) & \text{und} & \quad D^{(2)}(x, t) = g^2(x, t) \end{aligned}$$

Hier wird deutlich, dass die Interpretation von stochastischen Integralen nach It\^o eine simple Variante f\u00fcr den ersten Koeffizienten bei multiplikativem Rauschen liefert. In der Interpretation von Stratonovich erscheint der Term $D_{ind}^{(1)}(x, t) = g(x, t) \frac{\partial}{\partial x} g(x, t)$. Dieser wird *rauschinduzierte Drift* genannt. Ist die Diffusion unabh\u00e4ngig vom Ort, so ist $D_{ind}^{(1)}(x, t) = 0$. Alle h\u00f6heren Kramers-Moyal-Koeffizienten verschwinden:

$$D^{(k)}(x, t) = 0 \quad \text{f\u00fcr} \quad k \geq 3$$

Die \u00dcbertragung auf den N-dimensionalen Fall erfolgt analog: die Drift ergibt einen Vektor und die Diffusion schreibt sich in Matrixform bzw. g^2 wird zu einem Matrixprodukt

$$D_{ij}^{(2)} = \sum_k g_{ik} g_{jk} .$$

Die i-te Komponente der rauschinduzierten Drift formuliert sich als

$$D_{ind,i}^{(1)} = \sum_{j,k} g_{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} g_{kj} .$$

Delay-Fokker-Planck-Gleichung

Als n\u00e4chstes soll Gleichung (2.20) auf Prozesse mit einem Time Delay erweitert werden. Die Formulierung f\u00fcr eine zeitliche Evolution der Verteilungsdichte $f(x, t)$ f\u00fchrt auf eine Delay-Fokker-Planck-Gleichung. Dazu verwendet man die Abk\u00fcrzung $y = x(t - \tau)$ f\u00fcr die zeitlich verz\u00f6gerte Variable. Die allgemeine Operatorform der Delay-Fokker-Planck-Gleichung zur Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t | x', t'; y, t - \tau) = \hat{L} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, y, t \right) p(x, t | x', t'; y, t - \tau) \quad (2.23)$$

Im Unterschied zu (2.21) gibt diese Form zus\u00e4tzlich eine Abh\u00e4ngigkeit von der zeitverz\u00f6gerten Variablen. Diese taucht als weitere Bedingung in der CPDF auf und erscheint explizit im Argument des Operators.

Die Form für eine Kramers-Moyal-Entwicklung unter Verwendung des Pawula-Theorems ergibt eine Fokker-Planck-Gleichung für die bedingten Wahrscheinlichkeitsdichten $p(x, t|x', t'; y, t - \tau)$. Zur Vereinfachung soll ein Prozess mit einem konstanten Diffusionsterm betrachtet werden. $D^{(2)}(x, y, t) = Q$ hängt somit weder vom Ort noch von der Zeit ab. Die Fokker-Planck-Gleichung schreibt sich:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|x', t'; y, t - \tau) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, y, t) + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p(x, t|x', t'; y, t - \tau)$$

Ein Multiplikation dieser Gleichung mit $f(x', t')$ und einer anschließenden Integration über x' liefert die reduzierte Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t|y, t - \tau) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, y, t) + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] p(x, t|y, t - \tau)$$

Die gesamte Gleichung wird mit $f(y, t - \tau)$ multipliziert und durch die JPDF $p(x, t|y, t - \tau)f(y, t - \tau) = f(x, t; y, t - \tau)$ ersetzt.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t; y, t - \tau) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, y, t) + Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right] f(x, t; y, t - \tau)$$

Schließlich wird bezüglich y integriert, so dass sich mit $\int dy f(x, t; y, t - \tau) = f(x, t)$ die Delay-Fokker-Planck-Gleichung ergibt:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} f(x, t) &= -\frac{\partial}{\partial x} \int dy \left\{ D^{(1)}(x, y, t) f(x, t; y, t - \tau) \Big|_{y=x(t-\tau)} \right\} \\ &+ Q \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t) \end{aligned} \quad (2.24)$$

Gleichung (2.24) ist nicht geschlossen lösbar, da über $f(x, t; y, t - \tau)$ integriert werden muss. Betrachtet man den Grenzwert $\tau \rightarrow 0$, so geht (2.24) mit $y \rightarrow x$ unter Verwendung von

$$f(x, t; y, t - \tau) = p(x, t|y, t - \tau)f(y, t - \tau) = \delta(x - y)f(y, t)$$

und einer Umbenennung $D^{(1)}(x, x, t) := D^{(1)}(x, t)$ wieder in (2.20) über.

Fokker-Planck-Gleichung mit Gedächtniseffekt

Eine allgemeine Form einer Fokker-Planck-Gleichung, die Prozesse mit beliebigen Gedächtnis-Effekten beschreiben soll, lässt sich als eine Integro-Differentialgleichung ausdrücken. Sie wird auch als generalisierte Fokker-Planck-Gleichung bezeichnet.

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x, t) = \int_{-\infty}^t dt' \left[-\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t - t') + \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t - t') \right] f(x, t')$$

2.5 Methode zur Schätzung von Drift und Diffusion

Zuvor wurden einige Möglichkeiten zur Beschreibung stochastischer Systeme aufgezeigt. Dabei kann man mit Hilfe bekannter Drift und Diffusion die Trajektorien mittels einer Langevin-Gleichung oder die Verteilungsfunktionen mit der konjugierten Fokker-Planck-Gleichung simulieren. Es stellt sich die Frage, wie man bei dem inversen Problem vorgehen muss. Die Methode der Schätzung von Drift und Diffusion wurde erstmals in [14, 15] vorgestellt.

Ausgangspunkt ist eine unbekannte stochastische Zeitreihe. Ziel ist es, aus diesem endlichen Satz an Zufallsvariablen $\{X_k(t), k = 1 \dots N\}$ Evolutionsgleichungen zu extrahieren, die eine Rekonstruktion der Systemdynamik erlauben. Messfehler der Messgeräte sollen bei der Analyse nicht berücksichtigt werden. Ein störender Einfluss ist das Messrauschen (z.B. Nyquist-Rauschen oder Quantisierungsrauschen), das jedem Messpunkt additiv überlagert ist; dieses wirkt sich bei starken Rauschamplituden gravierend auf die Schätzung aus. Die Auswirkungen von Messwertrauschen sind in [32, 4] nachzulesen.

Weiterhin sollte bei einer realen Messung sorgfältig überprüft werden, ob Artefakte (wie z.B. Aliasing-Effekte bei der Digitalisierung von hochfrequenten Signalen) auftreten können. In diesem Fall sollte gegebenenfalls eine geeignete Tiefpassfilterung vor der AD-Wandlung durchgeführt werden. Im Folgenden werden synthetische Daten analysiert. Dies lässt einen direkten Vergleich der Ergebnisse mit den theoretischen Werten zu.

Die grundlegende Idee dieser Methode ist folgende: eine geeignete aber noch unbekannte Langevin-Gleichung erzeugt typische Trajektorien, wie sie in Form der zu untersuchenden Zeitreihe vorliegen. Man benötigt die entsprechende Drift und Diffusion. Diese lassen sich aber über die ersten beiden Kramers-Moyal-Koeffizienten $D^{(1)}$ und $D^{(2)}$ ausdrücken.

Im folgendem soll ein stationärer Prozess betrachtet werden, bei dem das Ensemblemittel durch ein Zeitmittel ersetzt werden kann – Ergodizität des Systems vorausgesetzt. Stationarität eines stochastischen Prozesses bedeutet, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten nicht explizit von der Zeit abhängen dürfen. Es liegt also eine Zeitreihe der Form $\{X(t_k), k = 1 \dots N\}$ vor. Die Abtastung der stochastischen Variablen erfolgt mit einer konstanten Samplingfrequenz.

Die Schätzung ergibt dann einen zeitunabhängigen Drift- und Diffusions-Term:

$$D^{(1)}(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle X(t + \Delta t) - x \rangle \Big|_{X(t)=x} \quad (2.25)$$

$$D^{(2)}(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (X(t + \Delta t) - x)^2 \rangle \Big|_{X(t)=x} \quad (2.26)$$

Die Funktionsweise der Methode kann man sich qualitativ folgendermaßen veranschaulichen:

Man betrachtet das Teilchen am beliebigen aber festen Ort x und lässt den Prozess für die Zeit Δt weiterlaufen. Zum Zeitpunkt $t + \Delta t$ befindet sich das Teilchen am Ort $X(t + \Delta t)$. Der neue Ort wird durch den deterministischen Anteil $h(x)$ und durch einen stochastischen Anteil $g(x)$ bestimmt. Führt man nun eine Mittelung der x Werte $(X(t + \Delta t) - X(t))/\Delta t$ über all diejenigen Trajektorien durch, die sich zum Zeitpunkt t am Ort $X(t) = x$ befinden, so ergibt

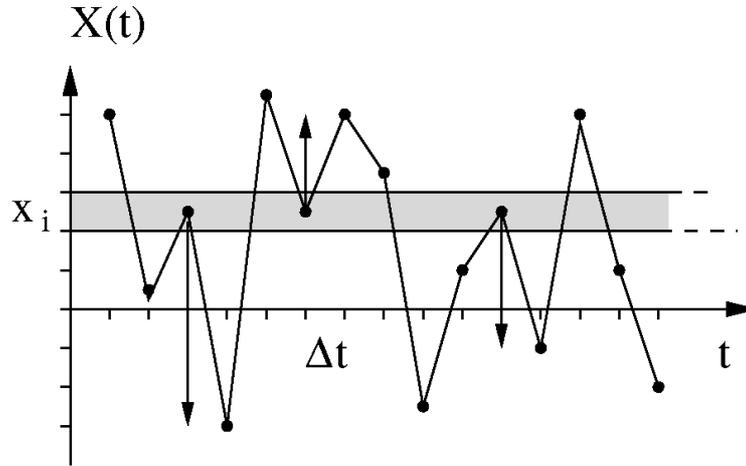


Abbildung 2.4: Schematische Darstellung der Methode zur Schätzung der Drift: Die Pfeile zeigen die Differenz $(X(t + \Delta t) - X(t))|_{X(t)=x_i}$ über die gemittelt wird, um die Drift am Ort x_i zu berechnen.

das gerade den deterministischen Anteil. Diese Prozedur ist in Abbildung 2.4 angedeutet. Der diffusive Anteil fällt bei der Bildung des Zeitmittels aufgrund des mittelwertfreien Rauschens weg.

Für die Bestimmung der Diffusion muss berücksichtigt werden, dass diese von der Ordnung $O(\sqrt{\Delta t})$ ist. Die Drift hingegen hat die Ordnung $O(\Delta t)$. Die Differenz $(X(t + \Delta t) - X(t))^2/\Delta t$ ergibt in der Mittelung für einen festen Ort $X(t) = x$ die Diffusion am Ort x , da die Drift insgesamt mit der Ordnung $O(\Delta t)$ für kleine Zeitinkremente verschwindet.

Fehlerabschätzung und Konvergenz bei endlichen Zeitreihen

Wichtig bei einer Drift-Diffusions-Analyse ist eine quantitative Abschätzung des absoluten Fehlers. Folgende Ursachen sollen für einen systematischen Fehler bei der Schätzung aufgeführt werden: Fehler durch die Diskretisierung, Verwendung von einem endlichen Zeitinkrement Δt und der Einfluß einer endlichen Zeitreihe auf die Schätzung.

Als Erstes wird vor der eigentlichen Durchführung des Verfahrens der Phasenraum diskretisiert, damit die Zufallsvariable $X(t)$ einem Intervall endlicher Breite zugeordnet werden kann. Praktisch ist die Einteilung in äquidistante Intervalle, da diese sich schnell und einfach umsetzen lässt. Technische Details zur Umsetzung des Verfahrens sollen in Kapitel 4 genauer erläutert werden. Die Diskretisierung wirkt sich mit einer Ordnung von $O(\Delta x)$ auf den Fehler aus.

Der Fehler für kleine $t - t_0 = \Delta t > 0$ kann über eine Reihenentwicklung der formalen Lösung von Gleichung (2.21)

$$p(x, t_0 + \Delta t | x_0, t_0) = e^{\hat{L}_{FP}(\Delta t)} p(x, t_0 + \Delta t | x_0, t_0)$$

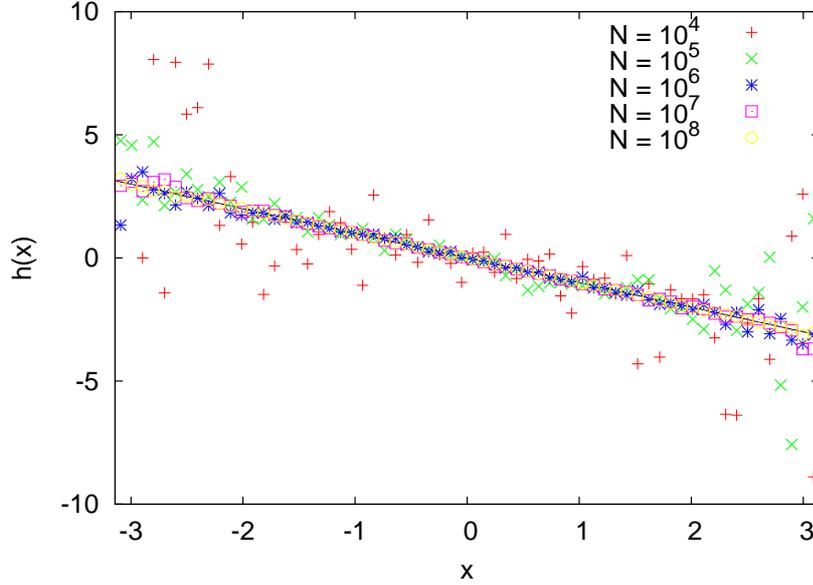


Abbildung 2.5: Rekonstruierter Drift bei einer endlichen Zahl N an Meßwerten, Ornstein-Uhlenbeck-Prozess: $\dot{X} = -X + \sqrt{2}\Gamma(t)$
 Ortsdiskretisierung mit $\Delta x = \frac{2\pi}{64}$ und zeitliche Diskretisierung mit $\Delta t = 0.01$

hergeleitet werden. Das Resultat der Entwicklung ist nach [32]:

$$D_E^{(1)}(x, \Delta t) = D^{(1)}(x) + \frac{\Delta t}{2} \left(D^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)} + D^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(1)} \right) + O(\Delta t^2) \quad (2.27)$$

$$D_E^{(2)}(x, \Delta t) = D^{(2)}(x) + \frac{\Delta t}{2} \left(D^{(1)} D^{(1)} + 2 D^{(2)} \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)} + D^{(1)} \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)} + D^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)} \right) + O(\Delta t^2) \quad (2.28)$$

Der Index E bedeutet, dass es sich hier um geschätzte Größen handelt. Im Limes $\Delta t \rightarrow 0$ erhält man den analytischen Wert.

Maßgeblich entscheidend für die Qualität der Schätzung ist, dass bei der Bildung der Zeitmittelung zur Bestimmung der Drift und der Diffusion nur eine begrenzte Zahl an Datenpunkten herangezogen werden können.

Abbildung 2.5 zeigt den Einfluss einer endlichen Zeitreihe für die Schätzung der Drift eines Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses. Man kann deutlich erkennen, dass das Verfahren an den Rändern schlechter konvergiert als um den Nullpunkt. Der Grund dafür ist, dass die Verteilungsdichte für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess nach (2.8) gaußförmig ist. Es ist daher sinnvoll, sich vor der Durchführung der Analyse die Verteilungsdichten der Zeitreihen ausgeben zu lassen, um die Diskretisierung des Phasenraums dementsprechend anzupassen.

Die quantitative Abschätzung für Fehler durch eine endliche Stichprobe, sowie Fehler, die aus der Schätzung bei endlichem Δt resultieren, werden im Rahmen

der Diplomarbeit von David Kleinhans [32] ausführlich behandelt. Als Ergebnis für eine Fehlerabschätzung ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$E \left[D_E^{(1)}(x, \Delta t) \right] = \sqrt{\frac{1}{N(x)} \left(\frac{2}{\Delta t} D_E^{(2)}(x, \Delta t) - \left[D_E^{(1)}(x, \Delta t) \right]^2 \right)} \quad (2.29)$$

$$E \left[D_E^{(2)}(x, \Delta t) \right] = \sqrt{\frac{1}{N(x)} \left(\frac{1}{4\Delta t^2} M_{4E}(x, \Delta t) - \left[D_E^{(2)}(x, \Delta t) \right]^2 \right)} \quad (2.30)$$

Der Fehler ist in beiden Fällen proportional zu $N^{-\frac{1}{2}}$. Dabei ist $N(x)$ die Zahl der Messpunkte in dem entsprechenden Intervall. Weiterhin kann man erkennen, dass der Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ für ein endliches N Probleme bereiten kann. Der Drift-Term konvergiert dann im Allgemeinen nicht. Man muss daher bei der Grenzwertbildung auf die Konvergenz des Fehlers achten. Der Diffusionsterm divergiert für kleine Δt nicht, da das vierte bedingte Moment von der Ordnung $O(\Delta t^2)$ ist. Fehler bei der Bestimmung von Drift und Diffusion werden im Folgenden quantitativ mit (2.29) und (2.30) abgeschätzt.

Mit diesem Wissen ausgerüstet soll eine Zeitreihenanalyse an einem kurzen Beispiel erfolgen. Hier wird ein einfaches Modell für einen Synchronisationsprozess betrachtet.

Beispiel: ein einfaches Modell für Synchronisation

Der berühmte Mathematiker, Astronom und Physiker Christiaan Huygens erkannte schon 1667 das Phänomen der Synchronisation. Er beobachtete einen Synchronisationsprozess zwischen zwei Pendeluhrn und bezeichnete diesen als „Sympathie zweier Uhren“.

In Natur, Alltag, Medizin und Technik treten Synchronisationsprozesse sehr häufig auf, wie man es z.B. beim Tages- oder Jahresrhythmus von Flora und Fauna, der Dynamik von gekoppelten Neuronen, bei Herzschrittmachern oder bei dem Frequenzziehen in der Akustik beobachten kann. Eine ausführliche Behandlung des Themas Synchronisation findet man in [45, 23, 55]

Ein sehr einfaches Modell für einen Synchronisationsprozess kann mit einem Potential erfolgen, wie es in Abbildung 2.6 illustriert wird. Das Potential zeigt die Dynamik der Phasendifferenz $\Delta\phi$, die z.B. aus der schwachen Kopplung zwischen zwei selbsterregten Oszillatoren mit unterschiedlichen Eigenfrequenzen resultieren kann. Die Phasendifferenz beider Oszillatoren kann wiederum als eine überdämpfte Bewegung eines Teilchens in dieser Potentiallandschaft interpretiert werden. Würde ein rein deterministisches System vorliegen, so würde das Teilchen im nächst tieferen lokalen Minimum liegen bleiben, d.h. die beiden Systeme hätten eine konstante Phase zueinander. Man spricht dann auch von *Phase-Locking*. Bei einem stochastischen System, also einem System, bei dem das Teilchen in dem Potentialbild noch durch eine zusätzliche Rauschkraft gestört wird, kann es je nach Rauschstärke zu Phasensprüngen kommen, wenn das Teilchen ein lokales Maximum überwindet. Es treten dann Sprünge der

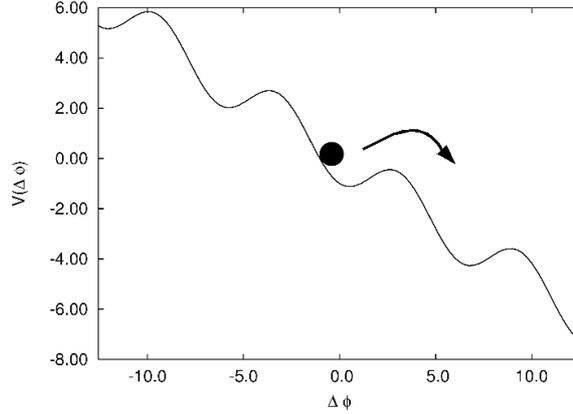


Abbildung 2.6: Überdämpftes Teilchen im Potential zur Veranschaulichung von rauschinduzierten Phase-Slips

Phasendifferenz, sogenannte *Phase-Slips*, auf, die eine Verschiebung der Phasendifferenz um jeweils 2π verursachen.

Man erkennt in Abbildung 2.6, dass Phase-Slips in eine Richtung wahrscheinlicher sind. Der Grund dafür ist, dass die unterschiedlichen Kreisfrequenzen beider Oszillatoren eine Phasendrift (Detuning) ω verursachen, die je nach System eine bestimmte Vorzugsrichtung aufweist. Je nach Steigung der Phasendrift läuft die Phasendifferenz bevorzugt in die eine oder andere Richtung.

Eine einfache Möglichkeit für eine Langevin-Gleichung zur Beschreibung von Synchronisation lautet also:

$$\frac{d}{dt}\Delta\phi = \underbrace{\omega - \sin(\Delta\phi)}_{h(\Delta\phi)} + \sqrt{Q}\Gamma(t) \quad (2.31)$$

$$\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$$

Die Drift wird mit $h(\Delta\phi)$ bezeichnet. Die Diffusion Q ist zeitlich konstant und unabhängig von $\Delta\phi$. Die Integration der Drift führt unmittelbar auf das Modellpotential in Abbildung 2.6.

Für die Schätzung von Drift und Diffusion nach (2.25) und (2.26) wird der Phasenraum zunächst in 64 äquidistante Intervalle im Bereich $[-\pi, \pi]$ unterteilt. Weiterhin soll in diesem einfachen Modell die Phasendifferenz im Intervall $[-\pi, \pi]$ liegen, so dass für die Phasendifferenz $\Delta\phi$ eine Variable mit periodischen Rändern verwendet wird. Ohne Einschränkung der Ränder läuft der Prozess nach einer gewissen Zeit aus dem Bereich heraus, der für die Analyse relevant ist, so dass unter Umständen zu wenig Daten in dem diskretisiertem Bereich liegen können. Die Zeitschrittweite in der Simulation beträgt 0.01. Der Wert für die Rauschstärke wird auf $Q = 0.5$ und die Frequenzverstimmung $\omega = 0.5$ gesetzt. Das Zeitinkrement für die Analyse in (2.25) und (2.26) wird konstant auf $\Delta t = 0.01$ festgelegt, d.h. es wurde nicht explizit der Limes $\Delta t \rightarrow 0$ zur Berechnung der bedingten Momente gebildet, sondern die gleiche Zeitschrittweite wie bei der Generierung der Zeitreihe benutzt.

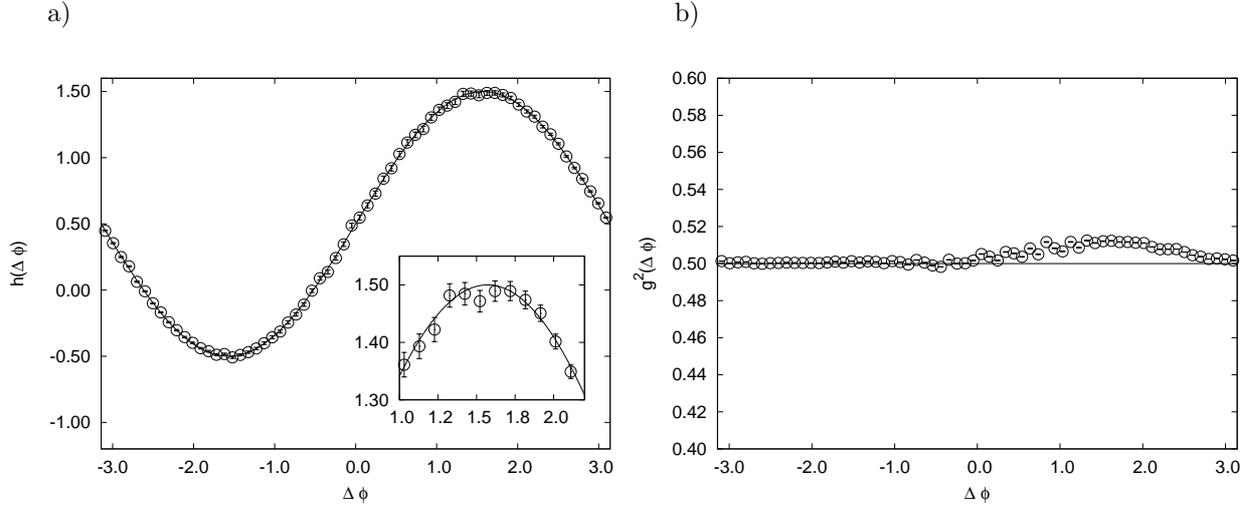


Abbildung 2.7: a) Rekonstruierte Drift: $h(\Delta\phi) = 0.5 - \sin(\Delta\phi)$
 b) Rekonstruierter Diffusionsterm: $g^2(\Delta\phi) = 0.5$

Eine Analyse von 10^7 Werten führt auf die in Abbildung 2.7 gezeigte Rekonstruktion der Drift $D^{(1)}(\Delta\phi) = h(\Delta\phi)$ und der Diffusion $D^{(2)}(\Delta\phi) = g^2(\Delta\phi)$. Die durchgezogene Linie ist der theoretisch zu erwartende Wert. Die quantitative Fehlerabschätzung erfolgte nach (2.29) bzw. (2.30) und führt auf die in den beiden Plots eingezeichneten Fehlerbalken.

Besonders bei dem Diffusionsterm ist die Abweichung von $\Delta\phi$ im Bereich zwischen 1 und 2 auffällig. Der Grund dafür ist, dass das Potential in diesem Bereich die größte Flankensteilheit besitzt, d.h. das Teilchen statistisch gesehen seltener in diesem Bereich anzutreffen ist. Dieses Verhalten wirkt sich dementsprechend schlechter auf die Konvergenz der Analyse aus.

Die Analyse der mit (2.31) generierten Zeitreihe liefert die erwarteten Ergebnisse 2.7 für Drift und Diffusion.

Zeitreihenanalyse für periodisch getriebene Systeme

Betrachtet man Systeme, die einen periodischen Antrieb besitzen, so lässt sich die Mittelung über das Ensemble nicht direkt wie in (2.25) und (2.26) in ein Zeitmittel umschreiben. Drift und Diffusion hängen somit explizit von der Zeit ab.

Es wird folgende Einschränkung gemacht: der periodische Treiber $F(t)$ soll eine nichtfluktuierende bekannte deterministische Periodendauer T besitzen, d.h. Drift und Diffusion sind mit T periodisch. Um die Zeitreihe ohne die Verwendung eines Ensembles analysieren zu können, verwendet man eine stroboskopische Abtastung. Diese Methode zur Drift und Diffusionsschätzung wurde erstmals in [20] durchgeführt:

Zunächst wird die gesamte Zeitreihe $X(t_n)$ mit insgesamt $0 \leq n \leq N-1$ Werten

in L Fenster der Länge T eingeteilt. Eine einzelne Periode beinhaltet insgesamt $T/\Delta t$ Datenpunkte. Man führt jetzt als abkürzende Schreibweise den Index k für das entsprechende Intervall der stroboskopischen Abtastung $t_k = t_n \bmod T$ ein. Anschaulich besitzt dieser Zeitpunkt in jedem Fenster immer eine konstante Phase zum periodischen Treiber. Die Mittelung über das Ensemble der L Zeitfenster muss für alle stroboskopisch abgetasteten, beliebigen aber festen Zeitpunkte $t_k = t_n \bmod T$ durchgeführt werden. Man mittelt über alle Werte der gleichen Phase. Das explizite numerische Verfahren wird im Kapitel 4 genauer diskutiert.

$$D^{(1)}(x, t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle X(t_k + \Delta t) - x \rangle \Big|_{X(t_k)=x} \quad (2.32)$$

$$D^{(2)}(x, t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (X(t_k + \Delta t) - x)^2 \rangle \Big|_{X(t_k)=x} \quad (2.33)$$

Durch die Methode der stroboskopischen Abtastung wird formal die Dimension von Drift und Diffusion, da diese jetzt von 2 Parametern abhängen, erhöht. Drift und Diffusion sind somit genau wie der Treiber $F(t)$ mit T periodisch. Desweiteren muss bei der Durchführung darauf geachtet werden, dass nicht über transiente Einschwingvorgänge gemittelt wird. Das System muss sich in einem periodischen Zustand befinden, d.h. die Übergangswahrscheinlichkeiten für einen beliebigen aber festen Zeitpunkt t_k innerhalb eines Zeitfensters müssen für alle Zeitfenster konstant bleiben.

Beispiel: Doppelmuldenpotential mit Treiber

Als Beispiel für ein periodisch getriebenes System soll eine überdämpfte Bewegung in einem symmetrischen Doppelmuldenpotential dienen. Dabei wird das Teilchen zusätzlich mit einer cos-förmigen Kraft getrieben.

$$\dot{X} = AX - BX^3 + C \cos(\omega t) + \sqrt{Q} \Gamma(t) \quad (2.34)$$

Die Kreisfrequenz ω berechnet sich mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ aus der Periodendauer. Diese Art von Potentialen spielt eine wichtige Rolle für die Modelle zur Beschreibung von stochastischer Resonanz. Das Phänomen der stochastischen Resonanz ist u.a. in biologischen Systemen oder in der Geophysik von Bedeutung [58]. Eine umfassende Übersicht zum Thema stochastische Resonanz ist in [18] zu finden.

Für die Werte $A = 1$ und $B = 1$ besitzt das System zwei stabile Fixpunkte bei $x = -1$ bzw. $x = 1$. Der instabile Fixpunkt liegt am Ort $x = 0$. Die Treiberamplitude wird gerade so groß gewählt, dass für die Maximalamplitude C , wenn der cos-Term vom Betrag 1 ist, das Potential noch zwei Minima besitzt. Ein möglicher Wert für die Amplitude beträgt $C = 0.3849$. Bei diesem Wert ist jeweils eines der beiden Minima, wie in Abbildung 2.8 gut zu erkennen ist, zum Zeitpunkt $t = nT/2$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ kaum noch vorhanden.

Anhand von Abbildung 2.9a kann man qualitativ erkennen, welchen Einfluss das Rauschen bzw. der periodische Treiber auf die Dynamik des Teilchens hat. Ohne eine zusätzliche Rauschkraft verbleibt das Teilchen in einem der beiden

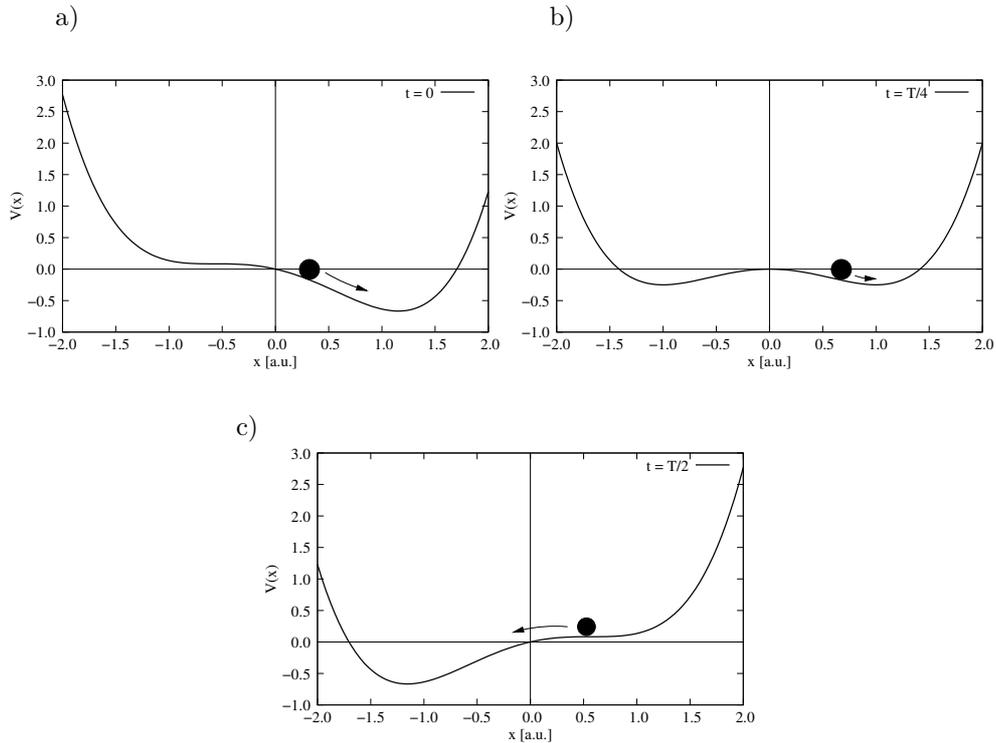


Abbildung 2.8: Teilchen im Doppelmuldenpotential

Minima. Schaltet man nun eine Fluktuation mit der Rauschstärke $Q = 0.15$ an, werden Übergänge zwischen beiden Minima induziert. Dabei ist die Übergangsrate ohne periodischen Treiber sehr viel geringer. Die Treiberperiode wurde hier mit $T = 5$ gewählt. Im resonanten Fall treten synchronisiert zu dem externen Antrieb Übergänge auf.

Die in Abbildung 2.9b gezeigte Verteilungsdichte bezeichnet man als stationär, obwohl diese explizit von der Zeit abhängt. Der Grund dafür ist die Periodizität mit T , so dass bei der zuvor eingeführten stroboskopischen Abtastung stationäre Eigenschaften vorliegen.

Weiterhin kann man sagen, dass die stochastische Resonanz kaum ausgeprägt ist, weil in der jeweiligen Halbperiode in Abbildung 2.9b eher kleine Unterschiede der beiden Maxima der Verteilungsdichte bestehen. Da hier eine Differentialgleichung erster Ordnung vorliegt, kann diese als eine überdämpfte Bewegung interpretiert werden. In Systemen zweiter Ordnung mit einem kleinen Dissipationsterm können sich deshalb Resonanzeffekte sehr viel deutlicher ausprägen.

Die Analyse liefert eine Drift, die vom Ort und der Zeit abhängt. Zur besseren Darstellung werden daher verschiedene Schnitte durch die Drift bei festen Zeiten oder Orten durchgeführt, wie man in Abbildung 2.10 sehen kann. Diese Methode wird in späteren Beispielen sehr wichtig, da die funktionalen Zusammenhänge nicht vollständig in einer Grafik dargestellt werden können. In diesem Beispiel wurden insgesamt 10^9 Werte zur Analyse herangezogen. In der nume-

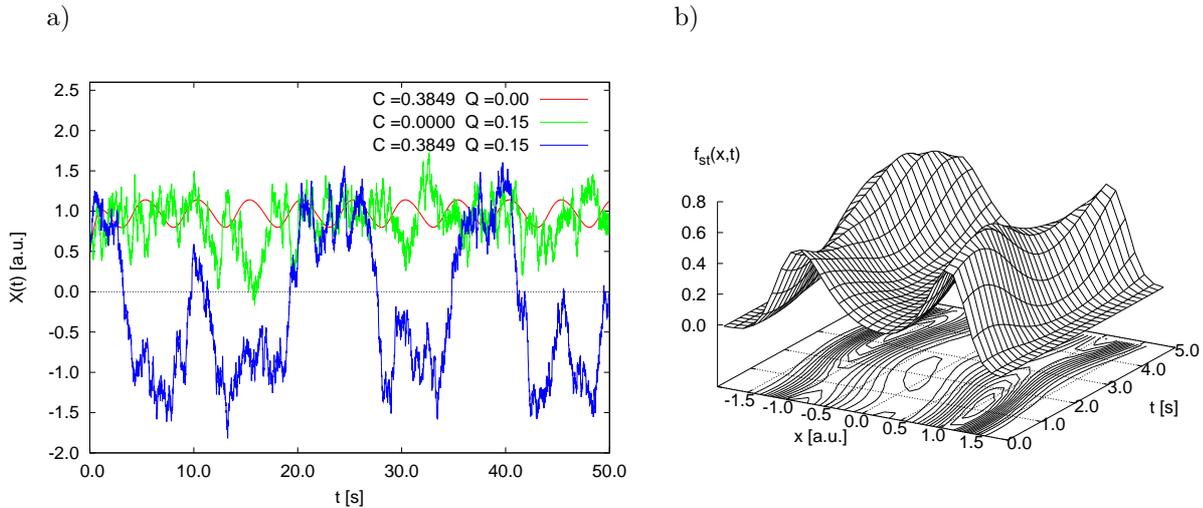


Abbildung 2.9: a) drei unterschiedliche Zeitreihen eines überdämpften Teilchens im Doppelmuldenpotential
 b) periodische Verteilungsdichte mit $C = 0.3849$ und $Q = 0.15$ und Konturplot in der x - t -Ebene

rischen Umsetzung von (2.32) und (2.33) wird ein konstantes Zeitinkrement $\Delta t = 0.01$ verwendet, welches genau dem Wert für einen Zeitschritt einer diskretisierten Berechnung von (2.34) entspricht.

Der Ort $[-2, 2]$ und die Periodendauer $[0, 5]$ wurden in 32 Intervalle eingeteilt. Ist die Zahl der Messpunkte in einem Intervall kleiner 10, so wird der Wert für Drift bzw. Diffusion auf 0 gesetzt, wie man in Abbildung 2.10a am Rand erkennen kann.

Man sieht anhand beider Grafiken in Abbildung 2.10, dass eine additive Kopplung zwischen dem zeit- und dem ortsabhängigen Anteil der Drift existiert, da bei verschiedenen Schnittflächen lediglich eine Verschiebung um eine Konstante auf der Ordinate stattfindet. Die durchgezogenen Linien entsprechen dem theoretischen funktionalen Zusammenhang. Die vertikale Verschiebung bzw. zeitliche Modulation des ortsabhängigen Driftteils in Abbildung 2.10a ist aufgrund des relativ kleinen linearen Terms ebenfalls gering. Dies bewirkt, dass die beiden Minima in einer Potentialdarstellung relativ flach sind und dass vergleichsweise hohe Übergangsraten auftreten. Dies führt dazu, dass im Bereich des instabilen Fixpunktes, also am Maximum des Potentials, eine große Zahl an Messpunkten vorliegt, so dass die Schätzung auch in diesem Bereich verhältnismäßig gut konvergiert.

Als Letztes folgt noch die Darstellung der Drift in Abhängigkeit beider Parameter. Die Abbildung 2.11a zeigt dabei nur einen Ausschnitt der gesamten Drift, um den zeitabhängigen Anteil besser zu verdeutlichen. In der x - t -Ebene sind die Höhenlinien der Analyse, welche einen Abstand von 0.25 zueinander einnehmen, abgebildet. Diese stimmen bis auf die Randbereiche (für $|x| > 1.8$) sehr gut mit den exakten Werten der Drift überein (vgl. Abb. 2.11b).

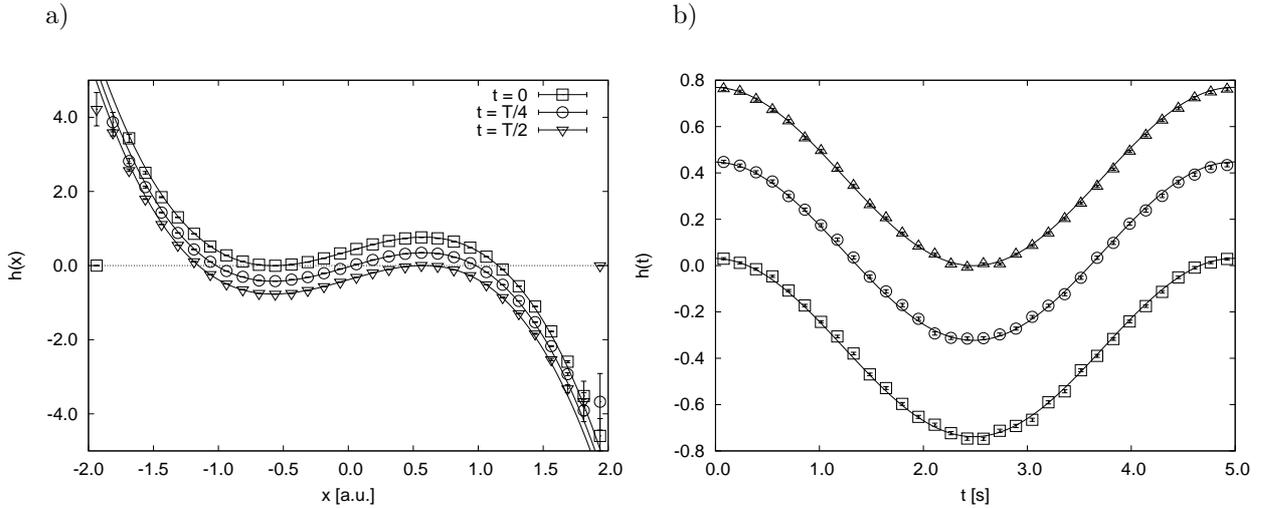


Abbildung 2.10: a) und b) Drift in Abhängigkeit von einer Variablen. Zur einparametrischen Darstellung werden Schnittebenen für ein festes t in a) und x in b) verwendet.

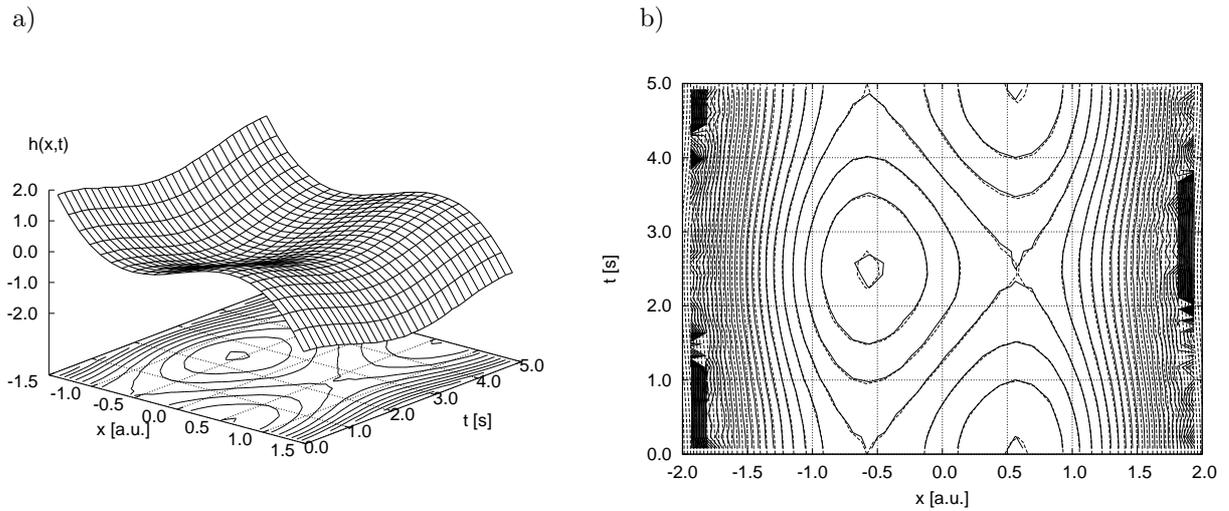


Abbildung 2.11: a) Drift in Abhängigkeit von x und t
 b) Darstellung als Konturplot - durchgezogene Linie: Analyse, gestrichelte Linie: exakter Wert

Die Schätzung der Diffusion $D^{(2)}(x,t) = Q$ erfolgt wie die Schätzung der Drift orts- und zeitaufgelöst, da diese zur quantitativen Fehlerabschätzung nach (2.29) in Abbildung 2.10 benötigt wird. Allerdings wird auf eine explizite Darstellung der Diffusion verzichtet.

Zeitreihenanalyse für Systeme mit Delay

Es kann gezeigt werden, dass die Datenanalyse für Systeme mit Delay im wesentlichen wie in (2.25) und (2.26) funktioniert [11, 12].

Man führt zusätzlich zur Variablen x eine Delay-Koordinate $y = x(t - \tau)$ ein. Diese wird insbesondere in der Nebenbedingung bei der Mittelung berücksichtigt. Die zeitliche Mittelung ist auch in diesem Fall nur bei einem stationären Prozess gültig. Eine anschauliche Interpretation zur Berechnung von Drift und Diffusion für Systeme mit Delay kann genau, wie zuvor mit der Abbildung 2.4 illustriert wurde, erfolgen.

$$D^{(1)}(x, y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle X(t + \Delta t) - x \rangle \Big|_{X(t)=x, X(t-\tau)=y} \quad (2.35)$$

$$D^{(2)}(x, y) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (X(t + \Delta t) - x)^2 \rangle \Big|_{X(t)=x, X(t-\tau)=y} \quad (2.36)$$

Drift und Diffusion sind in diesem univariaten Fall skalare Größen, die allerdings bei einem Delay von zwei Variablen abhängen. Die Dimension der Drift und der Diffusion wird somit um einen Freiheitsgrad erweitert. Anschaulich bedeutet dies, dass sich für einen festen Ort x zusätzlich noch die Position des Teilchens zur vergangenen Zeit $x(t - \tau)$ auf die Dynamik auswirkt, was bei der Mittelwertbildung als Nebenbedingung berücksichtigt werden muss. Da aber die Koordinate x und Delay-Koordinate y in einem stochastischen System nicht deterministisch gekoppelt sind, werden diese als zwei unabhängige Koordinaten aufgefasst. Der Zufallswert zu einem ganz bestimmten Zeitpunkt $X(t)$ lässt keinen deterministischen Rückschluss auf die Variable zum vergangenen Zeitpunkt $X(t - \tau)$ zu.

Das Verfahren lässt sich natürlich auch für multivariate Systeme mit Delay erweitern. Im Falle einer zweidimensionalen stochastischen Variable $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), X_2(t))$ mit einem Delay $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2) = (X_1(t - \tau), X_2(t - \tau))$ resultiert ein zweidimensionaler Driftvektor, der von vier Variablen $\mathbf{h}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ abhängt. Liegen mehrere Delays vor, also verschiedene Delay-Zeiten τ_i , so erhöht sich die Zahl der Delay-Koordinaten dementsprechend.

Beispiel: Modell für „Tracking Movements“

Das folgende Beispiel ist in den Bewegungswissenschaften von Relevanz [54, 53, 37] und soll als Motivation zur Zeitreihenanalyse von Systemen mit Delay dienen.

Zur Untersuchung von Bewegungs- und Koordinationsmechanismen werden externe visuelle Zeitverzögerungen eingesetzt. Dadurch lässt sich die visuelle Kontrolle über die Augen von dem sogenannten propriozeptiven Sinn, also der direkten Rückkopplung der Neuronen, entkoppeln. Für den erfolgreichen Ablauf einer Bewegung ist das Zusammenspiel intrinsischer Delays, also im wesentlichen die Laufzeit der Signale über die verschiedenen Rückkopplungswege, entscheidend.

Mit der Einführung eines zusätzlichen Delays in der visuellen Rückkopplung lassen sich mit der Delay-Zeit als Parameter diverse Bifurkationen zu anderen

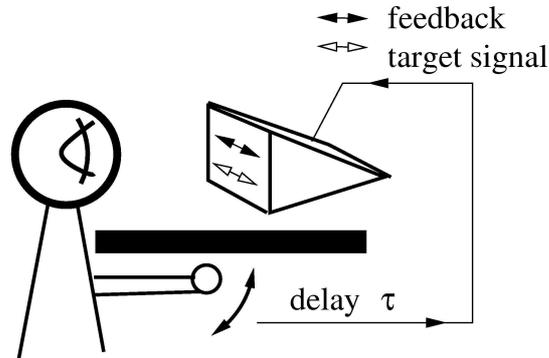


Abbildung 2.12: Schema zur Durchführung eines Tracking-Experimentes

Bewegungszuständen beobachten.

Im Experiment muss ein Proband einem periodisch oszillierenden Zielsignal (Target) folgen (vgl. Abb.(2.12)). Dieses wird durch einen Balken auf einem Bildschirm dargestellt. Mit dem Unterarm wird ein spezieller Joystick gesteuert, der ebenfalls einen Balken auf dem Bildschirm bewegt. Die Bewegung des Balkens erfolgt allerdings aufgrund eines künstlichen Delays zeitverzögert zu der Unterarmbewegung. Die Versuchsperson darf während des Versuchs ihren Unterarm nicht sehen. Das künstliche Delay τ ist sehr viel grösser als das natürliche Delay der visuellen Rückkopplung, so dass das natürliche Delay vernachlässigt werden kann.

Typische Gleichungen zur Beschreibung der Phasendifferenz ϕ zwischen dem Target und dem Joysticksignal führen im Wesentlichen auf folgende Form [54]:

$$\dot{\phi} = \underbrace{-\sin(\phi) - \sin(\phi_\tau)}_{h(\phi, \phi_\tau)} + \underbrace{\sqrt{Q}}_{g(\phi, \phi_\tau)} \Gamma(t) \quad (2.37)$$

ϕ_τ ist die zeitverzögerte Phasendifferenz. Zusätzlich wird das System mit der Stärke Q gestört. Es liegt ein stochastisches System mit additivem Rauschen vor, weil die Diffusion $D^{(2)}(\phi, \phi_\tau) = g^2(\phi, \phi_\tau) = Q$ konstant ist und nicht von ϕ und ϕ_τ abhängt. Da ϕ und ϕ_τ Winkelvariablen sind, wird für die Simulation und Analyse ein Phasenraum mit periodischen Rändern zugrunde gelegt.

Die Rauschstärke wird auf $Q = 0.5$ gesetzt und das Delay mit $\tau = 0.5$ gewählt. Die Zeitschrittweite für ein Simulationsschritt von (2.37) beträgt wie das Zeitinkrement der Analyse (2.35) und (2.36) $\Delta t = 0.01$. Der periodische Phasenraum wurde in 32 äquidistante Intervalle eingeteilt. Insgesamt wurden 10^9 Datenpunkte ausgewertet.

In Abbildung 2.13 ist die absolute Anzahl der Messpunkte in Abhängigkeit von ϕ und ϕ_τ abgebildet. Eine Normierung des Volumens auf 1 würde auf die stationäre Verteilungsdichte $f_{st}(\phi, \phi_\tau)$ führen. Man erkennt deutlich, dass der Großteil der Daten im Zentrum des um die Delay-Koordinate erweiterten Phasenraumes liegt. In der ϕ - ϕ_τ -Ebene ist ein Konturplot abgebildet. Die Höhenlinien

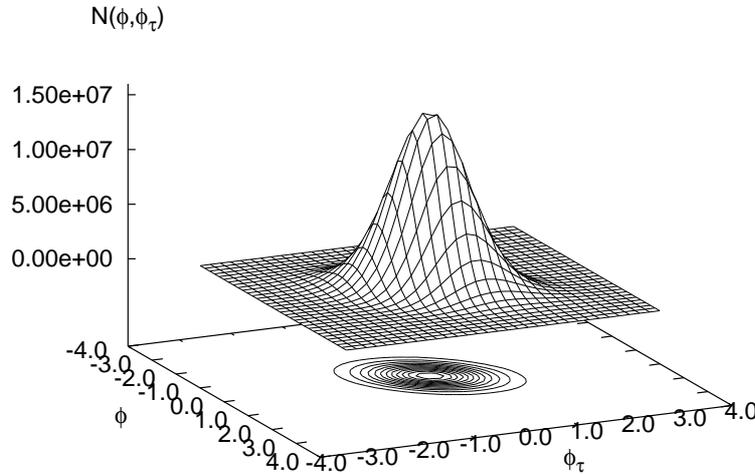


Abbildung 2.13: absolute Zahl der Meßpunkte im erweiterten Phasenraum $\phi \times \phi_\tau$ - die Zeitreihe beinhaltet insgesamt 10^9 Werte

haben einen Abstand von $1.25 \cdot 10^6$. Es ist vorteilhaft, wenn der Phasenraum möglichst gleichmäßig mit Werten überdeckt wird, damit die Schätzung gut konvergiert. Bei stark gepeakten Verteilungsdichten muss eine angepasste Diskretisierung gewählt oder sofern möglich bei der Generierung der Zeitreihe eine stärkere Rauschkraft verwendet werden.

Die Abbildungen 2.14a und 2.14b zeigen die Drift bzw. die Diffusion in Abhängigkeit von ϕ . Dabei werden achsenparallele Schnittebenen durch die gekrümmte Fläche, die mit $h(\phi, \phi_\tau)$ über (2.37) gegeben ist, betrachtet. Diese können als Projektion in einem zweidimensionalen Plot dargestellt werden.

Drift und Diffusion bei variablem ϕ_τ mit ϕ als Schnittparameter sind in Abbildung 2.14c und 2.14d dargestellt. Allen Plots ist gemein, dass die Qualität der Schätzung zum Rand hin stark abnimmt und die Fehler für die einzelnen Messpunkte rapide ansteigen.

Abbildung 2.15a zeigt die vollständige Abhängigkeit der Drift h im erweiterten Phasenraum, der von ϕ und ϕ_τ aufgespannt wird. In der ϕ - ϕ_τ -Ebene sind die Höhenlinien abgebildet. Man kann sehr gut erkennen, dass an den Randbereichen bei $(\phi, \phi_\tau) = (\pi, -\pi)$ und $(\phi, \phi_\tau) = (-\pi, \pi)$ die Werte stark fluktuieren und somit stark von $h(\phi, \phi_\tau)$ abweichen.

Einen qualitativ besseren Vergleich mit den theoretisch zu erwartenden Werten lässt die Abbildung 2.15b zu. Diese zeigt die äquidistanten Höhenlinien der geschätzten Drift als durchgezogene Linien und die theoretisch berechneten Werte als gestrichelte Linien. Der Abstand zweier Höhengniveaulinien beträgt 0.25. Im Zentrum des Plots überdecken sich die Konturen fast vollständig. In den eben genannten Eckbereichen fällt das divergente Verhalten unmittelbar auf, wie man es auf einem separaten Plot für den Fehler von $h(\phi, \phi_\tau)$ in Abbildung 2.15c und $g^2(\phi, \phi_\tau)$ in Abbildung 2.15d sieht.

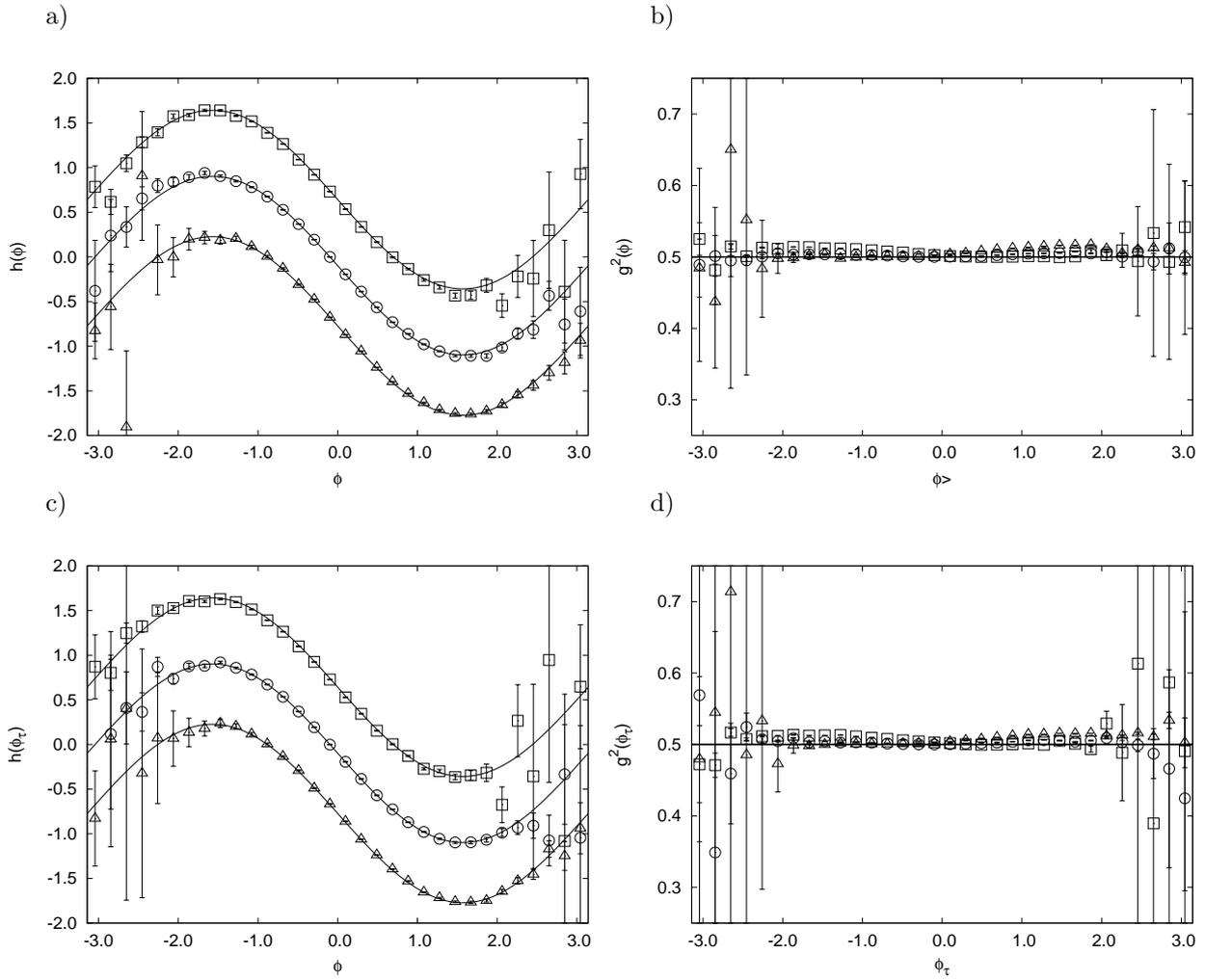


Abbildung 2.14: a) bis d) Drift und Diffusion in Abhängigkeit von einer Variablen. Zur einparametrischen Darstellung werden Schnittebenen mit konstantem ϕ_τ in a) und b) bzw. ϕ in c) und d) gelegt:
 Viereck: -0.6972 Kreis: 0.0982 Dreieck: 0.8836

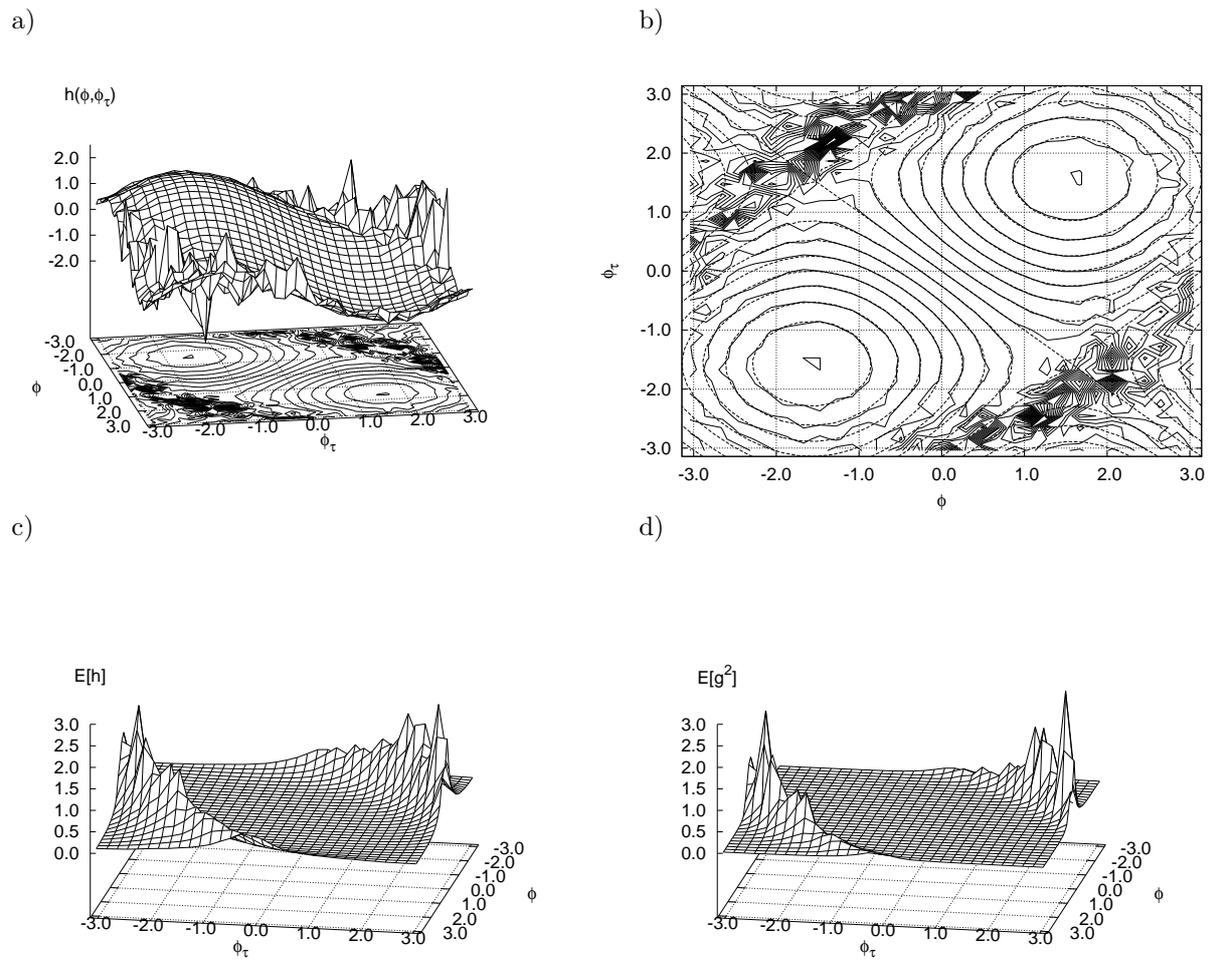


Abbildung 2.15: a) und b) Drift in Abhängigkeit von ϕ und ϕ_τ
 c) und d) der absolute Fehler für Drift und Diffusion

3 Test auf Selbstkonsistenz

3.1 Motivation

Soll eine nicht-parametrische Datenanalyse durchgeführt werden, so stellt sich unmittelbar die Frage, ob das Ergebnis in Form von Drift und Diffusion die Rekonstruktion der Systemdynamik erlaubt, also die Generierung einer typischen Trajektorie erfolgen kann.

Nach welchen Kriterien muss entschieden werden, welche Bereiche des vorliegenden Ergebnisses eine adäquate Beschreibung des stochastischen Systems darstellen, oder ob es sich lediglich um divergentes Verhalten bzw. Artefakte der Analyse handelt?

Ziel ist es also, ein Kriterium zu finden, mit dem man die Qualität der Ergebnisse besser einschätzen kann. Diese Fragestellung soll in diesem Kapitel behandelt werden. Dabei soll die Idee eines Selbstkonsistenztests motiviert und Probleme, die diese Methode mit sich bringt, diskutiert werden. Es wird die stationäre Verteilungsdichte der Zeitreihe mit der Verteilungsdichte verglichen, die aus einer erneuten Simulation des stochastischen Prozesses mittels der zuvor geschätzten Drift und Diffusion resultiert.

Folgende Voraussetzungen für eine erfolgreiche Durchführung der Zeitreihenanalyse sollen erfüllt sein:

- Der zu untersuchende Datensatz soll stationär sein. Um diese Eigenschaft zu testen, ermittelt man Übergangswahrscheinlichkeiten oder Momente verschiedener Zeitfenster innerhalb der Zeitreihe. Bei einem stationären Satz an Daten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten bzw. die Momente zeitunabhängig.
Bei synthetischen Daten kann man diese Größen ohne eine Verwendung von Zeitfenstern direkt über ein Ensemble berechnen. Eine genaue Ausführung soll allerdings nicht erfolgen, da die Stationarität der Daten als Voraussetzung für eine erfolgreiche Analyse und nicht als zentraler Aspekt dient.
Im Falle von periodisch angetriebenen Systemen wird auf Stationarität verzichtet. Stattdessen wird gefordert, dass das System im eingeschwungenen Zustand vorliegt. D.h. alle statistische Größen besitzen die Periode T . Insbesondere ist die Verteilungsdichte periodisch.
- Weiterhin wird je nach stationärer oder periodischer Verteilungsdichte der Zeitreihe, die einen Aufschluss über die Datenverteilung im Phasenraum gibt, eine geeignete Diskretisierung des Phasenraums durchgeführt. In dieser Arbeit wurde ausschließlich mit einer äquidistanten Diskretisierung gearbeitet. Passt man die Intervallbreite an die Datendichte an,

so würde bei einer geringen lokalen Dichte die örtliche Auflösung entsprechend ab- und die Konvergenz zunehmen. Es würde daher nur eine Problemverschiebung stattfinden, so dass eine Verbesserung der Schätzqualität nicht gewährleistet wird.

- Desweiteren muss bekannt sein, ob es sich um ein System mit zeitlich verzögerter Rückkopplung handelt. Liegt ein System mit einem oder mehreren Delays vor, müssen alle Delay-Zeiten vor der Analyse bekannt sein.
- Bei getriebenen Systemen muss die Periodendauer des Antriebs vor der eigentlichen Analyse bekannt sein. Falls diese a priori unbekannt sein sollte, kann sie über ein Fourierspektrum ermittelt werden. Dazu werden ebenfalls Zeitfenster verwendet, deren Spektren mittels einer diskreten Fourier-Transformation bestimmt werden können. Bildet man als nächstes den Mittelwert aller Zeitfenster, so kann aus diesem gemittelten Spektrum die Grundfrequenz des Treibers, die sich deutlich als Peak im Spektrum abzeichnet, abgelesen werden.
- Eine weitere grundlegende Voraussetzung ist, dass sowohl Treiber als auch Delay nicht fluktuieren dürfen, sondern über die gesamte Zeitreihe konstant bleiben müssen.

3.2 Test auf endlichem Gebiet

In Kapitel 2 wurde anhand einiger Beispiele gezeigt, dass je nach Problemstellung verschiedene Randbedingungen berücksichtigt werden müssen. Typisch sind stochastische Variablen in Zeitreihen mit natürlichen oder periodischen Rändern. Bei natürlichen Randbedingungen gilt für eine univariate Zufallsvariable, dass $X \in \mathbb{R}$ alle Werte auf der reellen Achse annehmen darf. Liegen periodische Ränder vor, so ist X nur auf einem begrenzten Intervall $X \in [a, b]$ mit $a < b$ und $X = [X \bmod (a - b)] + b$ definiert. Diese Form von Randbedingungen ist bei Winkelvariablen und Phasen typisch mit $X \in [-\pi, \pi]$, respektive $X \in [0, 2\pi]$.

Für natürliche Randbedingungen sieht man sofort ein, dass eine Analyse einer endlichen Zeitreihe ohne zusätzliche Informationen über das System nur eine Lösung auf einem endlichen Gebiet liefern kann.

Weitere Probleme können auftreten, wenn zusätzlich innere Bereiche im Phasenraum mit wenigen Messpunkten bedeckt werden, was z.B. bei einem stark ausgeprägten Doppelmuldenpotential mit sehr geringer Langevin-Kraft auftreten kann.

Um dieses Problem zu umgehen, gibt es mehrere Methoden. In diesem Kapitel soll der Test auf einem endlichen Gebiet präsentiert werden. Ein alternative Vorgehensweise wird am Ende dieses Kapitels angeschnitten.

Der gesamte Prozess der Datenanalyse lässt sich grob in drei Verfahrensschritte einteilen, wie in Abbildung 3.1 illustriert wird:

1. Schritt: Analyse der Zeitreihe

Es liegt zunächst eine endliche Zeitreihe vor. Da die Zeitreihe eine endliche Länge hat, kann diese deshalb nur einen endlichen Bereich in Ω überdecken, so dass aus dieser Zeitreihe nur eine lokale Schätzung der Drift $D^{(1)}$ und der Diffusion $D^{(2)}$ erfolgen kann. Zudem kann aus der Zeitreihe die Verteilungsdichte f extrahiert werden.

2. Schritt: Rekonstruktion des stochastischen Prozesses

Ausgangspunkt des Konsistenztest sind die numerisch ermittelten Werte für Drift und Diffusion, die in einem endlichen Bereich des Phasenraums lokalisiert sind. Bei der Simulation der zuvor ermittelten Drift und Diffusion tritt das Problem auf, dass die erneut simulierten Trajektorien den endlichen Bereich, in dem Ergebnisse für die Schätzung vorliegen, verlassen können. Der Grund dafür ist, dass durch Fluktuationen beliebige Werte für X auftreten können.

Die Grundidee des Selbstkonsistenztest ist daher, dass für die Rekonstruktion künstliche Ränder eingeführt werden, um Werte, die außerhalb dieses Bereiches liegen, auszuschließen. Mit der Simulation des stochastischen Prozesses im neuen Bereich Ω' kann so die Verteilungsdichte f' ausgegeben werden. Der stochastische Prozess für den Konsistenztest wird mittels einer Langevin-Gleichung unter Berücksichtigung der speziellen Randbedingungen simuliert. In der Langevin-Gleichung werden dann die zuvor geschätzten Drift- und Diffusionsterme verwendet. Da Drift und Diffusion diskretisiert sind, werden diese in der Simulation der Langevin-Gleichung linear bzw. für Systeme mit einem Delay bilinear interpoliert, um Diskretisierungsfehler zu unterdrücken. Die Langevin-Gleichung generiert eine stationäre Zeitreihe, aus der sich die stationäre Verteilungsdichte f' über Gleichung (2.2) bestimmen lässt.

Eine andere Möglichkeit die Verteilungsdichte f' für den Konsistenztest zu ermitteln, wäre eine Simulation der Fokker-Planck-Gleichung mit den entsprechenden Drift und Diffusionstermen. Dazu wird eine Startverteilungsdichte solange iteriert bis diese zeitlich konstant bleibt. Aus praktischen Gründen wurde in dieser Studie die Berechnung von f' für den Konsistenztest mit einer Langevin-Gleichung durchgeführt.

3. Schritt: Renormierung und Vergleich der Verteilungsdichten

Es liegen jetzt zwei Verteilungsdichten vor: f stammt aus der ursprünglichen Zeitreihe und f' aus der Rekonstruktion. Beide Verteilungsdichten sind normiert. Allerdings unterscheiden sich im allgemeinen Fall die Grundgebiete Ω und Ω' für die eine Normierung von f bzw. f' erfolgt. Vergleicht man als nächstes die beiden Verteilungsdichten miteinander, so fällt auf, dass die rekonstruierte Verteilungsdichte f' häufig bis auf einen Faktor mit f übereinstimmt. Dies tritt dann auf, wenn Ω und Ω' nicht identisch sind und ist mit der Normierung auf den unterschiedlich großen Grundgebieten Ω und Ω' zu begründen, wie in Ab-

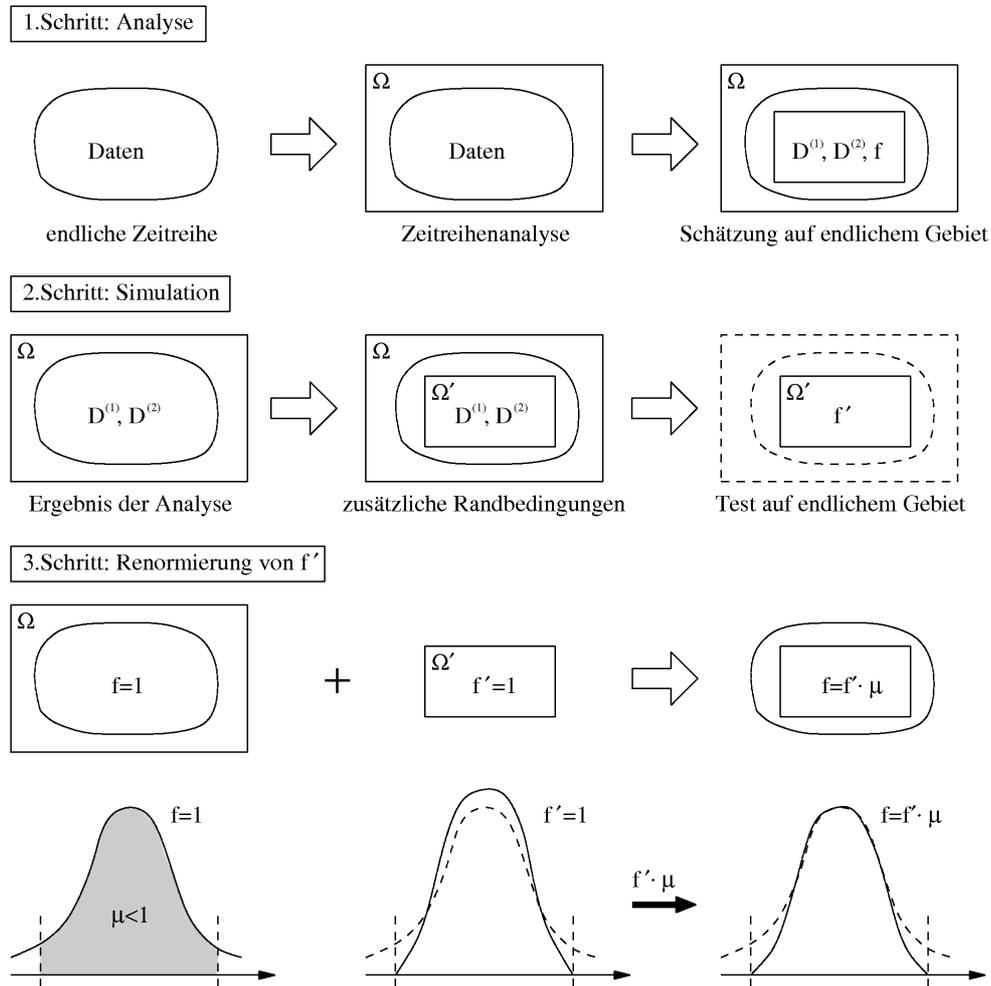


Abbildung 3.1: Schema zur Durchführung des Selbstkonsistenztests

Abbildung 3.1 durch die beiden Verteilungsdichten f und f' angedeutet wird. Der letzte Schritt für einen Vergleich ist daher eine geeignete Renormierung von f' . Der Renormierungsfaktor μ ist das Integral von f über den durch Ω' eingeschränkten Bereich. In Abbildung 3.1 ist dies für einen eindimensionalen Fall dargestellt. Dabei soll sich Ω über die gesamte Abszisse und Ω' lediglich über den markierten Teilausschnitt erstrecken. Der Renormierungsfaktor μ entspricht in diesem Fall der grau schraffierten Fläche.

Nachdem f' renormiert wurde, stellt sich die Frage, welche Einflüsse sich negativ auf den Vergleich der beiden Verteilungsdichten auswirken.

Das Ergebnis des Selbstkonsistenztests hängt im Wesentlichen von einer geschickten Wahl der Ränder für Ω' ab. Ein allgemeines Kriterium ist, dass die stationäre Verteilungsfunktion f des ursprünglichen Prozesses sich durch

Einführung künstlicher Randbedingungen nicht qualitativ ändert, sondern nur durch einen Renormierungsfaktor verändert wird. Dies gilt zum Beispiel für eine Potentialdynamik der Form

$$\frac{d}{dt}X = -\frac{dV}{dx} + \sqrt{Q}\Gamma(t) \quad (3.1)$$

mit global attraktivem Potential $V(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow \infty$ und reflektiven Randbedingungen $X \in [-a, a]$. Die stationäre Verteilungsfunktion f ist gegeben durch

$$f(x; a) = \frac{1}{N(a)} \exp \left\{ \frac{V(x)}{Q} \right\}$$

mit

$$N(a) = \int_{-a}^a dx \exp \left\{ \frac{V(x)}{Q} \right\} .$$

Sei a der Rand des ursprünglichen Prozesses und a' ein künstlicher Rand mit $a' < a$ dann gilt $f'(x) = f(x; a')$ und

$$f'(x) = \frac{N(a)}{N(a')} f(x; a)$$

Diese Beziehung gilt auch für den Fall, daß der ursprünglichen Prozess natürlichen Randbedingungen ($a = \infty$) aufweist:

$$f'(x) = \frac{N(\infty)}{N(a')} f(x; \infty)$$

Ein praktisches Kriterium für eine sinnvolle Wahl der Ränder ist, dass die Verteilungsdichte f auf den Randbereichen nach Möglichkeit klein sein soll. Allerdings sollte die Zahl der Datenpunkte im Randbereich noch so groß sein, dass die Schätzung für die Drift und die Diffusion konvergent bleibt. Daher sind große Datenmengen für einen Erfolg des Verfahrens förderlich, da trotz lokal geringer Verteilungsdichte absolut gesehen eine noch ausreichende Menge an Daten zur Konvergenz der Drift-Diffusions-Schätzung in den Randbereichen beitragen.

Weiterhin können instabile Fixpunkte innerhalb von Ω zu Problemen führen, da dort meistens nur geringe Datenmengen für eine Analyse zur Verfügung stehen. Als Beispiel sei der Grenzzyklus im Phasenraum eines nichtlinearen Oszillators unter Einfluss von Rauschen genannt. Innerhalb des Grenzzyklus befindet sich ein instabiler Fixpunkt. Bei geringem Rauschen liegen daher hauptsächlich Werte im Bereich um den Grenzzyklus vor, so dass der Konvergenzbereich nicht unbedingt einfach zusammenhängend ist. Wenn solche „Löcher“ in Drift und Diffusion vorliegen, wird die Durchführung eines Konsistenztest sehr anspruchsvoll, da die Wahl der Randbedingungen vor allem in höherdimensionalen Phasenräumen sehr kompliziert werden kann.

Die grundlegenden Parameter, die letztendlich aufeinander abgestimmt werden müssen, sind: Datenmenge, Diskretisierung des Phasenraums und Wahl des Typs und der Lage für die Randbedingungen von Ω' . Bei Berücksichtigung dieser Kriterien sind Auswirkungen der künstlichen Randbedingungen auf die

Verteilungsdichte vernachlässigbar, d.h., f und f' stimmen bis auf die entsprechenden Randbereiche überein.

Die Art der Randbedingungen für Ω' hängt von den Eigenschaften der vorgegebenen Zeitreihe ab. Die Zeitreihe besteht aus einer Folge von Werten der stochastischen Variable X_n mit $n = 0, \dots, N - 1$, deren Dynamik und Wertebereich mit dem Charakter des stochastischen Systems einhergehen.

- In vielen Fällen liegen natürliche Ränder für den Ordnungsparameter vor, d.h., es gilt $X_n \in \mathbb{R}$. In diesem Fall muss immer eine Renormierung von f' vorgenommen werden, da dann das endliche Ω' immer als Untermenge in \mathbb{R} enthalten ist. In der Praxis üblich sind periodische oder reflektive Randbedingungen.

Wenn der stochastische Prozess mittels einer Langevin-Gleichung beschrieben wird, so wird die Dynamik mit einer überdämpften Bewegung in einem geeigneten Potential modelliert. Bei periodischen Randbedingungen liegen dann für die Koordinaten des Phasenraums Modulo-Bedingungen vor, d.h., bei Durchlaufen der oberen Grenze erscheint die Trajektorie wieder an der unteren Grenze. Werden hingegen reflektive Randbedingungen gewählt, so wird die Trajektorie bei Überschreitung des reflektierenden Randes, in den Bereich Ω' zurückgespiegelt. Liegt keine überdämpfte Bewegung vor, erfolgt die Beschreibung mit einer stochastischen Differentialgleichung zweiter oder höherer Ordnung. Diese Gleichungen höherer Ordnung lassen sich auf ein System gekoppelter Differentialgleichungen erster Ordnung transformieren, wie später in Kapitel 5 deutlich wird. Bei stochastischen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Zufallsvariablen sich als Ort und Geschwindigkeit interpretieren lassen, muss bei Durchführung der Reflektion eine Richtungsänderung der Geschwindigkeitskomponente berücksichtigt werden.

Ein Vorteil von reflektiven gegenüber periodischen Randbedingungen ist, dass keine laufenden Lösungen induziert werden können. Darunter versteht man eine Vorzugsrichtung der Trajektorie durch das gesamte Gebiet Ω' . Dieses Verhalten kann bei getriebenen oder selbsterregten Prozessen beobachtet werden.

- Liegt als Zufallsvariable eine Winkelgröße oder Phase vor, wie es häufig bei Messreihen in den Bewegungswissenschaften der Fall ist, so besitzen diese häufig periodische Ränder mit einer Periodenlänge von 2π . In diesem Fall kann eine globale Schätzung der Drift und Diffusion in Ω erzielt werden, falls die Daten den gesamten endlichen Phasenraum Ω bedecken. Es muss dann keine Renormierung für f' erfolgen, da die Gebiete Ω und Ω' identisch sind.

Wenn trotz des endlichen Phasenraums Ω nur eine lokal begrenzte Konvergenz der Schätzung erreicht wird, muss Ω' dem Resultat entsprechend angepasst werden. Als Randbedingung kommen sowohl reflektive als auch periodische Ränder in Frage.

In beiden Beispielen aus Kapitel 2 zur *Synchronisation* und *Tracking-Movements* wurde das Gebiet Ω' nicht weiter eingeschränkt. Das Resultat des Konsistenz-

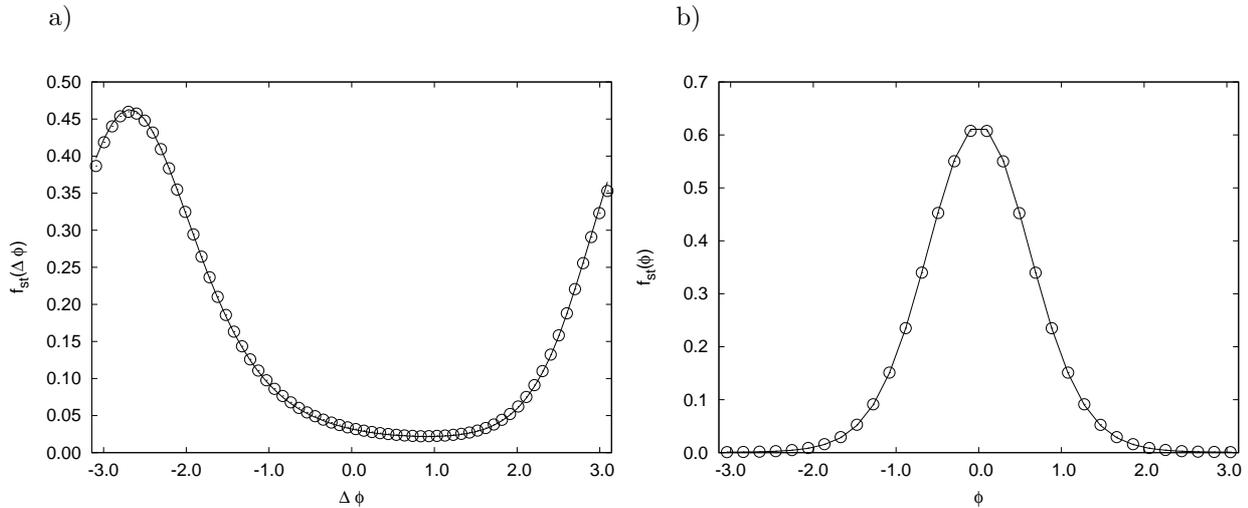


Abbildung 3.2: Probe auf Selbstkonsistenz bei periodischen Rändern: Verteilungsdichte der Zeitreihe (durchgezogene Linie) und der erneuten Simulation (Punkte)
 a) für Bsp.(2.31): $h(\Delta\phi) = 0.5 - \sin(\phi_\tau)$
 b) für Bsp.(2.37): $h(\phi, \phi_\tau) = -\sin(\phi) - \sin(\phi_\tau)$

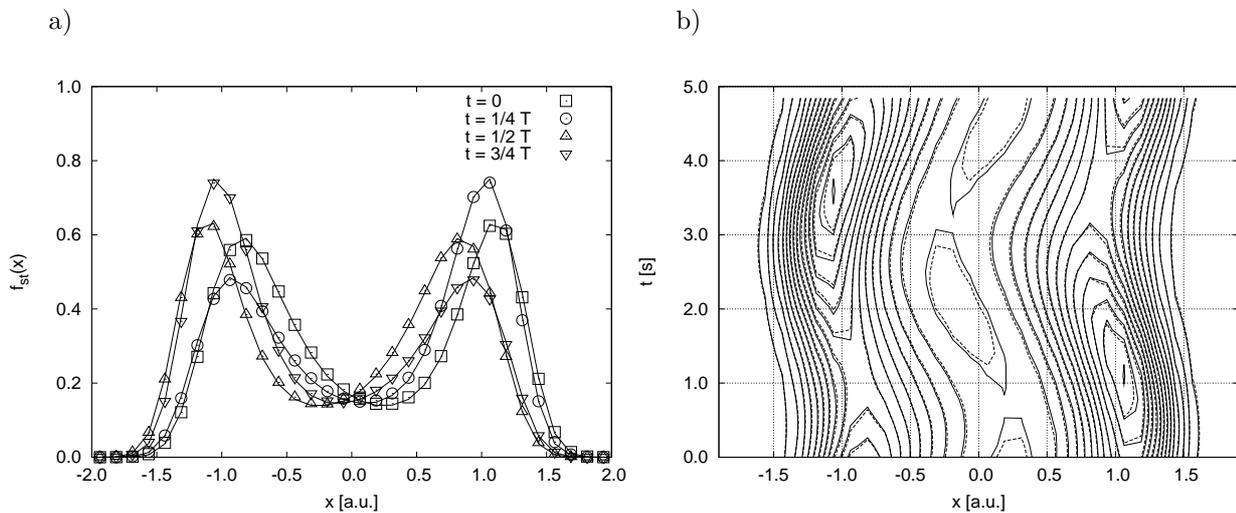


Abbildung 3.3: Konsistenztest mit reflektiven Rändern bei $|x| = 2$ für das Doppelmuldenpotential aus Bsp.(2.34)
 a) Verteilungsdichte der Zeitreihe (durchgezogene Linie) und der erneuten Simulation (Punkte) bei einer stroboskopischen Abtastung der Zeit für verschiedene t
 b) Vergleich der Verteilungsdichte im Konturplot: Zeitreihe (durchgezogene Linie) und Konsistenztest (gestrichelte Linie)

tests mit periodischen Randbedingungen ist in Abbildung 3.2 zu sehen. Dabei liefert der Test eine sehr gute Übereinstimmung der beiden Verteilungsdichten, d.h. die Werte der Schätzung liefern die gesuchte Drift bzw. Diffusion.

Die Abbildung 3.3 zeigt das Ergebnis für das Doppelmuldenpotential, welches aufgrund des periodischen Antriebs noch zusätzlich von der Zeit abhängt. Hier treten kleinere Abweichungen der Verteilungsdichtefunktionen im mittleren Bereich auf, was besonders im Konturplot 3.3b gut sichtbar wird. Dass in diesem Bereich des Phasenraumes Probleme auftreten, war schon zu erwarten, da um den instabilen Fixpunkt weniger Daten vorliegen. Es ist ebenfalls gut erkennbar, dass die Amplitude der Verteilungsdichte für die verschiedenen Halbperioden des Treibers unterschiedlich stark ausgeprägt sind.

Der Test auf Selbstkonsistenz wird in den folgenden Kapiteln zur Überprüfung der Zeitreihenanalyse dienen, da die Drift- und Diffusionsterme nicht mehr vollständig bzw. nur unter sehr großem Aufwand in einer Grafik dargestellt werden können.

Eine Alternative, um die Güte der Schätzung zu überprüfen, besteht in der Betrachtung der bedingten Momente. Dazu wählt man einen beliebigen aber festen Startpunkt und ermittelt das bedingte Moment für verschiedene Δt . Diese können mit den bedingten Momenten aus einer erneut simulierten Zeitreihe, die also mit der geschätzten Drift und Diffusion gewonnen wurde, verglichen werden [46].

Im weiteren Verlauf wird der Vergleich der beiden Verteilungsdichten zur Qualitätskontrolle der Analyseergebnisse verwendet.

4 Stochastische Systeme 1.Ordnung mit Antrieb und Delay

4.1 Zeitreihenanalyse für periodisch getriebene Systeme mit Delay

Im Kaptitel 2 wurde das prinzipielle Verfahren der Drift-Diffusions-Schätzung anhand einiger Beispiele gezeigt. In diesem Kapitel soll die Erweiterung des Verfahrens für getriebene Delay-Systeme präsentiert werden. Diese Erweiterung gewinnt man aus der Kombination der Gleichungen (2.32) bzw. (2.33) mit (2.35) bzw. (2.36) (vgl. dazu auch die Methoden aus [20] und [10, 11]). Man geht zunächst davon aus, dass sich das System allgemein mit einer nichtlinearen Langevin-Gleichung der Form (2.10) beschreiben lässt. Die nichtlineare Langevin-Gleichung lässt sich mittels der Interpretation stochastischer Integrale nach Itô folgendermaßen formulieren:

$$\frac{d}{dt}X = D^{(1)}(X, Y, F(t)) + \sqrt{D^{(2)}(X, Y, F(t))} \Gamma(t) \quad (4.1)$$

$$\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$$

Die zeitverzögerte Zufallsvariable wird wie üblich mit $Y = X(t - \tau)$ bezeichnet. Die Abhängigkeit von der Funktion $F(t)$ in den Argumenten der Koeffizienten soll andeuten, dass es sich um ein Zeitargumente der Periode T handelt. Eine konjugierte Formulierung des physikalischen Problems erfolgt über eine Fokker-Planck-Gleichung. Diese gibt die zeitliche Evolution der JPDF $p(x, t|x', t', y, t - \tau)$ unter expliziter Berücksichtigung der Zeitverzögerung mit

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t|x', t'; y, t - \tau) = \hat{L} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, y, t \right) p(x, t|x', t'; y, t - \tau)$$

und dem Fokker-Planck-Operator

$$\hat{L} \left(x, \frac{\partial}{\partial x}, y, t \right) = -\frac{\partial}{\partial x}D^{(1)}(x, y, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}D^{(2)}(x, y, t)$$

an. Die Methode zur Schätzung von Drift und Diffusion führt mit einer Delay-Koordinate und einem zusätzlichen Zeitparameter auf die beiden Ausdrücke:

$$D^{(1)}(x, y, t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle X(t_k + \Delta t) - x \rangle \Big|_{X(t_k)=x, X(t_k-\tau)=y} \quad (4.2)$$

$$D^{(2)}(x, y, t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (X(t_k + \Delta t) - x)^2 \rangle \Big|_{X(t_k)=x, X(t_k-\tau)=y} \quad (4.3)$$

Die Interpretation und Umsetzung dieser Gleichungen ist äquivalent zu den spezielleren Fällen, die in Teil 2.5 behandelt wurden. Die Schätzung für Drift und Diffusion unterscheidet sich lediglich durch eine größere Zahl an Nebenbedingungen. Diese führt auch auf eine höhere Dimension des Phasenraums, welcher wie zuvor einer Diskretisierung unterzogen werden muss. Für die Orts- und die Delay-Koordinate liegen in den meisten Fällen natürliche Ränder vor. Es können aber je nach physikalischer Problemstellung andere Einschränkungen für den Phasenraum gemacht werden, wie z.B. periodische Ränder in den Beispielen im vorangegangenen Kapitel 2 zur Synchronisation und Tracking Movements. Die Zeit wird, wie zuvor in Teil 2.5 erläutert, stroboskopisch abgetastet; es liegt also zusätzlich zur Diskretisierung der Ortskoordinaten eine diskretisierte Treiberperiode vor.

Die beiden Ausdrücke für Drift (4.2) und Diffusion (4.3) sollen als nächstes numerisch aus der Zeitreihe gewonnen werden. Das generelle numerische Verfahren wird im nächsten Teil genauer dargestellt, wobei insbesondere auf problematische Aspekte bei der praktischen Durchführung der Methode eingegangen wird. Die Voraussetzungen für eine erfolgreiche Durchführung wurden schon zum Teil in Kapitel 3 angeschnitten.

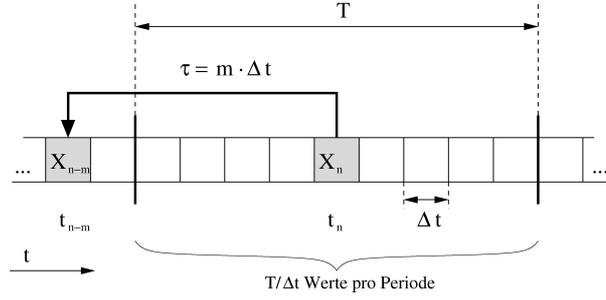
4.2 Numerisches Verfahren zur Zeitreihenanalyse

Es gilt hier die Annahme, dass ein periodischer Prozess vorliegt. Ist diese nicht erfüllt, kann keine Schätzung ohne Weiteres aus einer einzelnen Zeitreihe gewonnen werden. In diesem Fall müsste man, sofern vorhanden, mit einem Ensemble von Zeitreihen oder notfalls mit endlichen Zeitfenstern arbeiten. Später wird man sehen, dass eine Verwendung kleiner Zeitfenster für nichtstationäre Prozesse mit Delay und Treiber in der Praxis ausgeschlossen werden kann, da die Datenmenge in solchen Zeitfenstern zu gering sein würde. Das hängt natürlich stark von dem Prozess und den entscheidenden Zeitskalen ab. Daher ist es schwierig allgemeine Aussagen darüber zu treffen.

Zunächst muss eine Diskretisierung des generalisierten Phasenraumes Ω , auf dem die Drift (4.2) und Diffusion (4.3) definiert sind, erfolgen. Die Freiheitsgrade des Phasenraums hängen unmittelbar mit den Nebenbedingungen zusammen, da jede neue Nebenbedingung eine Erweiterung des Phasenraums um eine Dimension darstellt. Der erweiterte Phasenraum für univariate Systeme erster Ordnung mit Delay und Treiber umfasst drei Freiheitsgrade: eine Ortskoordinate x , die zeitverzögerte Koordinate y und die Zeit t . Der Vektor \mathbf{q} ist Element des erweiterten Phasenraums Ω , d.h. es gilt

$$\mathbf{q} = (x, y, t \bmod T) \in \Omega \quad (4.4)$$

Die Länge der gesamten Zeireihe entspricht L Perioden, so dass für die Zeit $t \in [0, L \cdot T)$ gilt. Durch die Modulo Operation $\bmod T$ ist die Zeit im Phasenraum im Intervall $[0, T)$ definiert. Zur Durchführung der Schätzung muss der Phasenraum einer Diskretisierung unterzogen werden. Diese erfolgt in äquidistante Intervalle mit einer Intervallbreite von $\Delta x = \Delta y$ und Δt . Die Intervalle werden auch *Bins* genannt.


 Abbildung 4.1: Einteilung der Zeitreihe in Zeitfenster der Periode T :

Dargestellt ist ein Zeitfenster aus einer univariaten Zeitreihe. Die einzelnen Kästchen stehen für die Werte der Zufallsvariablen. Die Zufallsvariable X_n zu dem Zeitpunkt t_n ist über Gleichung (4.1) mit der zeitlich verzögerten Zufallsvariablen X_{n-m} zu der Zeit t_{n-m} verknüpft.

Da der Treiber periodisch mit T ist, gelten periodische Randbedingungen für die Zeitkoordinate im Phasenraum. Aufgrund der Diskretisierung werden die x - und y -Koordinaten durch eine obere und untere Grenze eingeschränkt, d.h. es erfolgt eine Auswertung der Drift und Diffusion für einen endlichen Bereich der Orts- und Delay-Koordinate $x, y \in [x_{\min}, x_{\max}]$. Für den diskretisierten Phasenraum verwendet man folgende Formulierung:

$$\Delta\Omega_{ijk} = ([x_i, x_i + \Delta x), [y_j, y_j + \Delta x), [t_k, t_k + \Delta t))$$

Als nächstes benötigt man eine Indikatorfunktion $\chi_{ijk}(\mathbf{q})$, die einen endlichen Beitrag liefert, wenn der Vektor \mathbf{q} sich in einem bestimmten Bin des Phasenraumes befindet. Falls \mathbf{q} außerhalb des diskretisierten Bereiches liegt, kann der entsprechende Wert der Zeitreihe nicht zur Schätzung beitragen. Die Indikatorfunktion entspricht im Wesentlichen bis auf einen Normierungsfaktor, der von der Diskretisierung abhängt, einer diskretisierten Formulierung der Dirac'schen δ -Funktion.

$$\chi_{ijk}(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{q} \in \Delta\Omega_{ijk} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4.5)$$

Durch die Diskretisierung der Koordinaten liegen nur Werte auf einem Gitter für (4.2) und (4.3) vor. Die Approximation von Drift und Diffusion an den diskreten Stützstellen erfolgt mit Hilfe der Indikatorfunktion (4.5):

$$D^{(1)}(x, y, t) = \sum_{ijk} D_{ijk}^{(1)} \chi_{ijk}(\mathbf{q}) + O(\Delta x, \Delta t) \quad (4.6)$$

$$D^{(2)}(x, y, t) = \sum_{ijk} D_{ijk}^{(2)} \chi_{ijk}(\mathbf{q}) + O(\Delta x, \Delta t) \quad (4.7)$$

Nachdem Phasenraum, Drift und Diffusion diskretisiert wurden, wird als nächstes die Zeitreihe zerlegt. Die Samplingfrequenz bzw. der Zeitschritt zwischen zwei Werten soll Δt betragen. Die vorliegende Zeitreihe mit insgesamt N Werten wird in Strecken mit der Länge $T/\Delta t$ eingeteilt. Die Treiberperiode soll

zunächst ein Vielfaches von Δt sein, was bei einer gemessenen Zeitreihe nicht unbedingt der Fall sein muss.

Es wird für die Zufallsvariable $X(t)$ zum gesampelten Zeitpunkt $t_n = (n-1)\Delta t$ die abkürzende Schreibweise $X_n = X(t_n)$ verwendet. Der Index läuft über $n = 0, \dots, N-1$. Das Delay $\tau = m\Delta t$ soll wie der Treiber ein ganzzahliges Vielfaches des Zeitschrittes Δt betragen. Damit lässt sich für die zeitverzögerte Zufallsvariable $X_{n-m} = X(t_n - \tau)$ schreiben (vgl. Abb. 4.1).

Für jeden Zeitschritt n erhält man so einen Messwert im Phasenraumelement $\Delta\Omega(\mathbf{q}_n)$ mit dem entsprechenden Vektor

$$\mathbf{q}_n = (X_n, X_{n-m}, t_n \bmod T) . \quad (4.8)$$

Für die numerische Umsetzung von Gleichung (4.2) und (4.3) erhält man folgende Ausdrücke

$$D^{(1)}(x, y, t) = \sum_{ijk} \tilde{D}_{ijk}^{(1)} \chi_{ijk}(\mathbf{q}) + O(\Delta x, \Delta t, \Delta t^{-\frac{1}{2}}, N^{-\frac{1}{2}}) \quad (4.9)$$

$$D^{(2)}(x, y, t) = \sum_{ijk} \tilde{D}_{ijk}^{(2)} \chi_{ijk}(\mathbf{q}) + O(\Delta x, \Delta t, N^{-\frac{1}{2}}) \quad (4.10)$$

mit der Drift $\tilde{D}_{ijk}^{(1)}$ und der Diffusion $\tilde{D}_{ijk}^{(2)}$ aus einer endlichen Schätzung mit N Werten. Der Fehler für endliche Zeitreihen ist in Gleichung (2.29) und (2.30) gegeben. Die Zeitmittelung lautet explizit:

$$\tilde{D}_{ijk}^{(1)} = \frac{1}{\Delta t} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1} - X_n) \chi_{ijk}(\mathbf{q}_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} \chi_{ijk}(\mathbf{q}_n)} \quad (4.11)$$

$$\tilde{D}_{ijk}^{(2)} = \frac{1}{2\Delta t} \frac{\sum_{n=0}^{N-1} (X_{n+1} - X_n)^2 \chi_{ijk}(\mathbf{q}_n)}{\sum_{n=0}^{N-1} \chi_{ijk}(\mathbf{q}_n)} \quad (4.12)$$

Der Fehler für die Drift in (4.11) der Ordnung $O(\Delta t^{-\frac{1}{2}})$ ist durch die Schätzung einer nur endlichen Zeitreihe begründet, wie in [32] gezeigt wurde. Die Nebenbedingungen $X(t_k) = x$ und $X(t_k - \tau) = y$ in Gleichung (4.11) und (4.12) werden über die Indikatorfunktion $\chi_{ijk}(\mathbf{q}_n)$ berücksichtigt. Diese selektiert das entsprechende Bin im erweiterten Phasenraum, das zu den Nebenbedingungen konform ist. Die Summe über $\chi_{ijk}(\mathbf{q}_n)$ im Nenner dient als Zähler für den Normierungsfaktor der Zeitmittelung. Der Limes in (4.2) und (4.3) wird für synthetische Daten nicht explizit ausgeführt, d.h. das Zeitinkrement Δt für die Analyse entspricht, wenn nicht anders angegeben, dem kleinst möglichen Zeitschritt der Zeitserie.

Die praktische Umsetzung von (4.11) und (4.12) erfolgt über zwei Histogrammstrukturen mit jeweils drei Parametern (x, y, t) , in der zum einen die Inkremente $(X_{n+1} - X_n)$ bzw. $(X_{n+1} - X_n)^2$ kumulieren und zum anderen die Anzahl der Datenpunkte pro Bin zur Normierung gezählt werden. Die Schätzung für

Drift und Diffusion benötigt nur einen Durchlauf der Zeitserie, in der die Histogrammstruktur gefüllt wird. In Abbildung 4.2 ist schematisch dargestellt, wie die Einteilung der Zeitreihe in Zeitfenster, die Berücksichtigung der einzelnen Nebenbedingung sowie die stroboskopische Abtastung erfolgen.

In dieser Arbeit wurden ausschließlich synthetische Daten analysiert, um die Analyse im direkten Vergleich mit den exakten Werten verifizieren zu können. Die Analyse erfolgt direkt im Anschluss an die Erzeugung der Zeitreihe, so dass keine vollständige Speicherung der Daten erforderlich ist. Das hat den Vorteil, dass man sehr große Datenmengen zur Analyse heranziehen kann. Eine typische Gesamtlänge eines Datensatzes beträgt $N = 10^9$ Datenpunkte für die Schätzung von Drift und Diffusion im dreidimensionalen Phasenraum. Für die Implementierung der Methode muss lediglich ein Speichervektor der Länge $m + 2$ für die Zufallsvariable zwischengespeichert werden, wobei $m \in \mathbb{N}$ unmittelbar von der Länge des Delays abhängt.

Liegen natürliche Randbedingungen für die Zufallsvariable X vor, hängt die Grösse des Phasenraums $[x_{\min}, x_{\max}]$ von der Rauschstärke, sowie von der Datenmenge und von der Verteilung der Daten ab. Die in Gleichung (4.4) und (4.8) verwendete stroboskopische Abtastung wird für jeden Zeitschritt Δt durchgeführt. Sowohl für eine sinnvolle Simulation, als auch bei einer experimentellen Messung gilt, dass $T \gg \Delta T$ sein muss, um den externen Treiber überhaupt numerisch auflösen zu können. (Dies ist auch notwendig um bei der Digitalisierung Aliasing-Effekten vorzubeugen.) Dies hat zur Folge, dass die diskretisierte Zeitkoordinate im Phasenraum eine große Anzahl an Intervallen besitzt, auf die sich die Messdaten verteilen. Die Zahl der Stützstellen für eine typische Ortsdiskretisierung liegt in der Größenordnung von 10^2 . Im Vergleich dazu besitzt die Zeitdiskretisierung, die nach der Phasenraumdiskretisierung in (4.8) für große Treiber $T \gg \Delta T$ erfolgt, Einteilungen der Größenordnung 10^3 . Insgesamt hat der Phasenraum mit dieser Diskretisierung ca. 10^5 bis 10^6 Bins, auf die sich die Werte der Zeitreihe verteilt. Das Resultat führt in den meisten Fällen zu einer schlechten Konvergenz der Schätzung. Daher wird folgender Trick angewendet: Die stroboskopische Abtastung erfolgt nicht für jedes Zeitinkrement, d.h. die Treiberperiode wird in größere Zeitintervalle unterteilt, so dass eine lokale Zeitmittelung durch die Zusammenfassung von benachbarten Messpunkten vorgenommen werden kann. Die Zahl der Bins im Phasenraum kann mit dieser Methode auf eine Größenordnung von ca. 10^4 bis 10^5 reduziert werden, so dass bei der gleichen Zahl an Messpunkten eine bessere Konvergenz erzielt werden kann. Der Nachteil ist jedoch eine schlechtere zeitliche Auflösung der Schätzung.

Weiterhin kommt bei der Analyse experimenteller Zeitreihen das Problem auf, dass Delay und Treiber im Allgemeinen nicht ganzzahlige Vielfache der Samplingzeit sein müssen. Die Abweichung des Delays zu einer Stützstelle spielt aufgrund der Tatsache, dass der Phasenraum generell diskretisiert werden muss, allgemein keine entscheidende Rolle, wenn das Delay $\tau \gg \Delta t$ ist. Problematisch hingegen können sich Diskretisierungsfehler des Treibers auswirken, da sich dadurch die feste Phase der stroboskopischen Zeitabtastung zu dem externen Treiber im Laufe der Analyse verschiebt. Daher muss die stroboskopische Abtastung mit der nicht diskretisierten Periode sorgfältig während der gesamten Analyse synchronisiert werden.

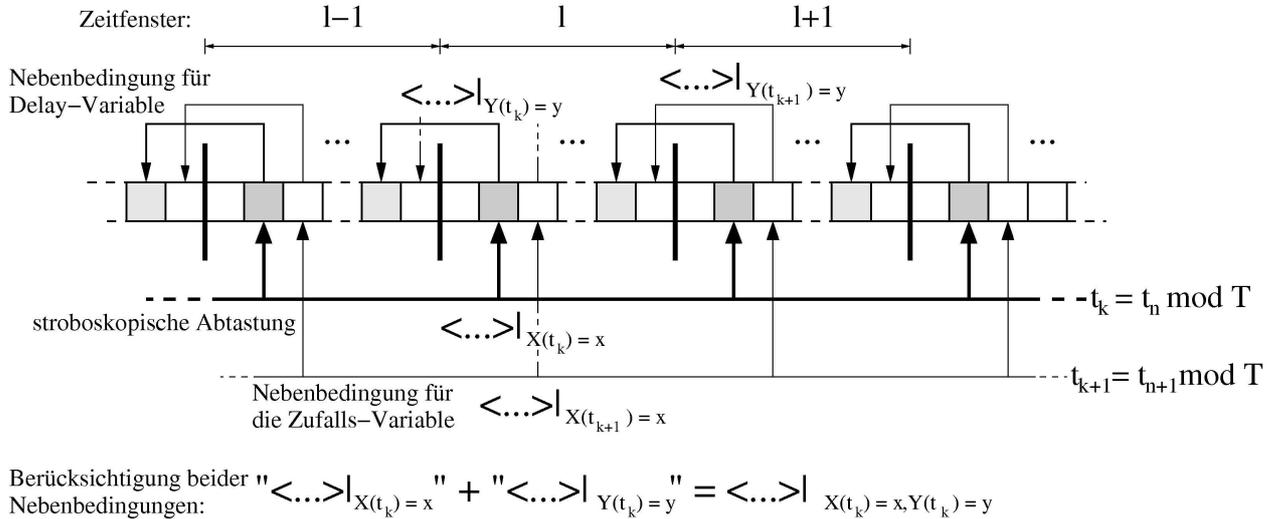


Abbildung 4.2: Abgebildet ist ein Ausschnitt einer univariaten Zeiteihe mit der Zufallsvariablen X_n . Das prinzipielle Verfahren der Zeitreihenanalyse mit Treiber und Delay ist folgendes:

1) Es wird die Zeitreihe in Zeitfenster der Treiberlänge T eingeteilt. Es sind drei Zeitfenster zu sehen ($l-1, l, l+1$).

2) Als nächstes erfolgt eine Mittelung $\langle \dots \rangle_{X(t_k)=x}$ der stroboskopisch abgetasteten Daten (dargestellt durch die Pfeile unter der Zeitreihe). Genauer gesagt: es wird das Mittel über alle Zeitfenster $0 \leq l \leq L-1$ bei einer konstanten Phase t_k zu dem Treiber gebildet.

3) Bei Prozessen mit Delay wird zusätzlich die Nebenbedingung $\langle \dots \rangle_{Y(t)=x}$ mit $Y(t) = X(t - \tau)$ bei der Mittelwertbildung eingehalten (dargestellt durch Pfeile oberhalb der Zeitreihe). Da das System aber periodisch getrieben wird, muss die stroboskopische Zeitabtastung noch berücksichtigt werden: $\langle \dots \rangle_{Y(t_k)=x}$ mit $Y(t_k) = X(t_k - \tau)$

4) Für das vollständige Verfahren müssen beide Nebenbedingungen für $X(t_k) = x$ und $X(t_k - \tau) = y$ mit der phasenstarrten Abtastung t_k eingehalten werden.

4.3 Additive Kopplung von Delay und Treiber

In diesem Teilabschnitt soll als erstes Beispiel ein Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Delay und sinusförmigem Antrieb aus einer Zeitreihe rekonstruiert werden. Die Verwendung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses hat den Vorteil, dass sich analytische Berechnungen zur Stabilität durchführen lassen. Analytische Voraussagen für andere Delay-Systeme sind im Allgemeinen nicht möglich.

Eine wesentliche Schwierigkeit liegt in der Darstellung von Drift und Diffusion, da diese jetzt von drei Parametern abhängt. Die Abbildungen erfolgen durch Verwendung einer bzw. zweier Schnittebenen durch den Phasenraum. Dabei werden dreidimensionale Plots bzw. zweidimensionale Graphen mit den theoretischen Werten verglichen. Bei den dreidimensionalen Plots erfolgt ein Vergleich indirekt über Konturlinien.

Bevor allerdings eine Zeitreihe simuliert werden kann, müssen geeignete Parameter für die SDDGL gefunden werden. Bei der Verwendung von zeitlich-verzögerten Rückkopplungen kann es zu Stabilitätsproblemen des Systems kommen, da Delays Systeme destabilisieren können [5, 40, 38, 34]. Die Lösungen können in diesem Falle mit einer systemspezifischen Frequenz oszillieren. Daher soll zunächst für das erste Beispiel der Einfluss der Parameter auf die Stabilität des Systems beschrieben werden.

Stabilität des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses mit Delay

Als erstes wird der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ohne externen Antrieb betrachtet, wobei Y wieder die zeitlich verzögerte Zufallsvariable ist:

$$\frac{d}{dt}X = -aX - bY + \sqrt{Q}\Gamma(t) \quad (4.13)$$

$$\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$$

Eine ausführliche Herleitung der Varianz in Abhängigkeit der Delayzeit wird in [11, 34] gezeigt. Der Zugang erfolgt mit Hilfe der Autokorrelationsfunktion, aus der bei einem verschwindenden Faltungparameter die Varianz resultiert. Das Ergebnis der analytischen Herleitung für $\sigma^2(\tau)$ im stationären Fall lautet wie folgt:

$$\sigma^2(\tau) = \begin{cases} b > a \geq 0, & Q \left(\frac{1 + b\Omega^{-1} \sin(\Omega\tau)}{a + b \cos(\Omega\tau)} \right) \\ a > b \geq 0, & Q \left(\frac{1 + b\Omega^{-1} \sinh(\Omega\tau)}{a + b \cosh(\Omega\tau)} \right) \\ a = b \geq 0, & \frac{Q}{2a} (1 + a\tau) \end{cases} \quad \text{mit } \Omega = \sqrt{|a^2 - b^2|} \quad (4.14)$$

Für die Parameterwahl $b > a \geq 0$ divergiert die Varianz in (4.14) bei einem endlichen Delay τ_c :

$$a + b \cos(\Omega\tau_c) = 0$$

Bei der Überschreitung des kritischen Delays tritt eine Hopf-Bifurkation auf, welche zur Folge hat, dass das erste Moment des Systems anfängt zu oszillieren. Für den Fall, dass $a \geq b \geq 0$ ist, erhält man eine endliche Varianz gemäß (4.14), die für endliche τ nicht singular wird. Mit der Varianz lässt sich ein Ausdruck für die stationäre Verteilungsdichte finden. Das Ergebnis ist eine Gaußverteilung mit der in Gleichung (4.14) berechneten Varianz:

$$f_{st}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sigma^2(\tau)}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2(\tau)}} \quad (4.15)$$

Wird der Limes $\tau \rightarrow 0$ gebildet, so gehen die Lösungen (4.14) und (4.15) in die Gleichung (2.8) für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ohne Delay über.

Ornstein-Uhlenbeck-Prozess mit Delay und Treiber

Nachdem die Stabilität für den Ornstein-Uhlenbeck-Prozess betrachtet wurde, wird dieser um einen additiven periodischen Treiber $F(t)$ ergänzt. Dieser verursacht, wie man später anhand der Lösungen aus der Simulation sehen wird, eine Oszillation der stationären Verteilungsdichte $f_{st}(x)$ mit dem externen Treiber. Der Grund dafür ist, dass der Antrieb für eine beliebige aber feste Phase $t_k \in [0, T)$ einen Offset des Mittelwertes bewirkt, wie in Abbildung 4.3a illustriert. Das Resultat ist eine T -periodische Oszillation des 1. Momentes.

Zur Generierung der Zeitreihe werden die Koeffizienten $a = 1$ und $b = 1$ gewählt. Es liegt also der dritte Fall von Gleichung (4.14) vor. Die Länge des Delays wird auf $\tau = 1$ gesetzt und die Periode des Treibers soll $T = 2.56$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ betragen. Mit der Rauschstärke von $Q = 1$ schreibt sich die Gleichung:

$$\frac{d}{dt}X = \underbrace{-X - Y + \sin(\omega t)}_{h(X, Y, F(t))} + \Gamma(t) \quad (4.16)$$

$$\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$$

Zunächst wurde überprüft, bei welcher Zeit der Prozess in den periodischen Zustand übergeht. Nach zwei Perioden läuft die Varianz in eine Sättigung (s. Abb. 4.3a). Aus der Linearität der Gleichung (4.16) folgt, dass im eingeschwungenen Zustand (Sättigungszustand) die Verteilungsfunktion wie folgt aussieht:

$$f_{st}(x, t_k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\tau)}} e^{-\frac{[x - M(t_k)]^2}{2\sigma^2(\tau)}}$$

wobei $\sigma^2(\tau)$ durch Gl. (4.14) gegeben ist und $M(t)$ eine Funktion der Zeit darstellt. Genauer gesagt genügt $M(t)$ der Gleichung

$$\frac{d}{dt}M(t) = -M(t) - M(t - \tau) + \sin(\omega t)$$

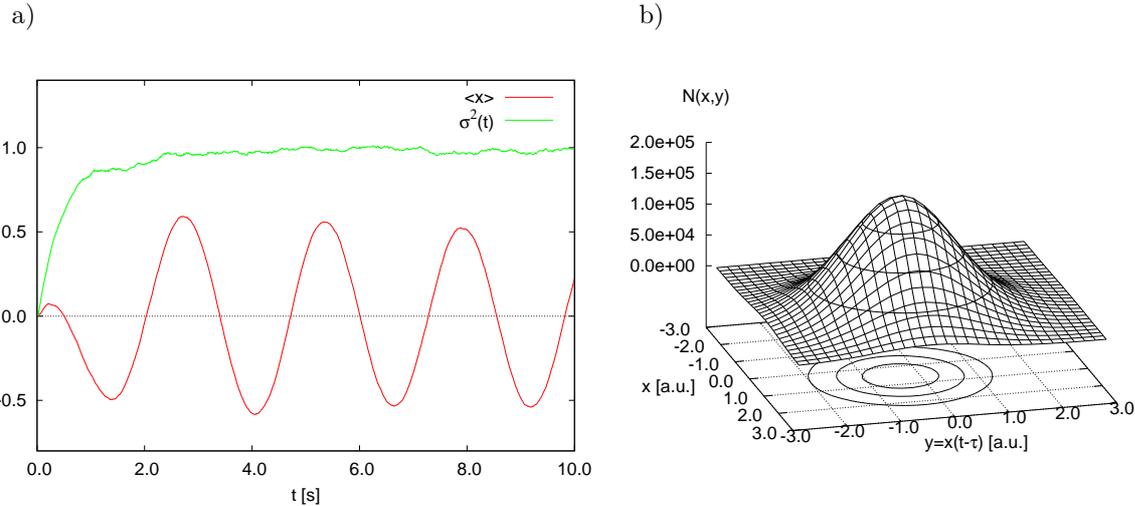


Abbildung 4.3: a) zeitliche Entwicklung des 1. Momentes und der Varianz; Berechnung durch Ensemblemittelung mit 10^4 Realisierungen
 b) Verteilung der Datenpunkte - Histogramm mit insgesamt 10^9 Messwerten

Der Index "st" in $f_{st}(x, t_k)$ soll andeuten, dass es sich um die Verteilungsfunktion eines eingeschwungenen periodischen Zustandes handelt. D.h., für festes t_k ist f_{st} eine stationäre Verteilung. Nach Formel (4.14) für den Fall, dass $a = b$ ist, errechnet sich diese in Übereinstimmung mit Abbildung 4.3a mit den obigen Parametern zu $\sigma^2(\tau = 1) = 1$.

Für die Generierung der Zeitreihe nach Methode (2.11) wird eine Zeitschrittweite von 0.01 verwendet. Das Zeitinkrement für die Analyse beträgt zunächst $\Delta t = 0.01$. Der Phasenraum

$$\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [0, T]$$

wird in $32^3 = 2^{15} = 32768$ Bins eingeteilt. Die Gesamtlänge der Zeitreihe beträgt $N = 10^9$.

Das Resultat des Tests auf Selbstkonsistenz ist in Abbildung 4.4 dargestellt. In der Abbildung 4.4a werden die Verteilungsdichten $f_{st}(x)$ für verschiedene Zeiten aufgeführt. Zur Durchführung des Tests wurden reflektive Ränder für $|x| = 2.75$ und $|y| = 2.75$ verwendet.

Die erneute Simulation auf endlichem Gebiet stimmt sehr gut mit der Verteilung aus der Zeitreihe überein. Nennenswerte Abweichungen sind, wie erwartet, an den Rändern für $|x| = 2.75$ erkennbar, was besonders gut in Abbildung 4.4b in dem Vergleich zwischen den Konturlinien der beiden Verteilungsdichten sichtbar wird. Aufgrund des positiven Ergebnisses des Selbstkonsistenztests kann davon ausgegangen werden, dass sich hier solche Drift- und Diffusionsterme ergeben, dass die Dynamik des Systems über eine nichtlineare Langevin-Gleichung (2.10) rekonstruiert werden kann.

Die Graphen 4.5a bis 4.5d zeigen insgesamt vier verschiedene von sechs möglichen Schnittebenen durch den Drifterm. Da es sich in diesem Beispiel aus-

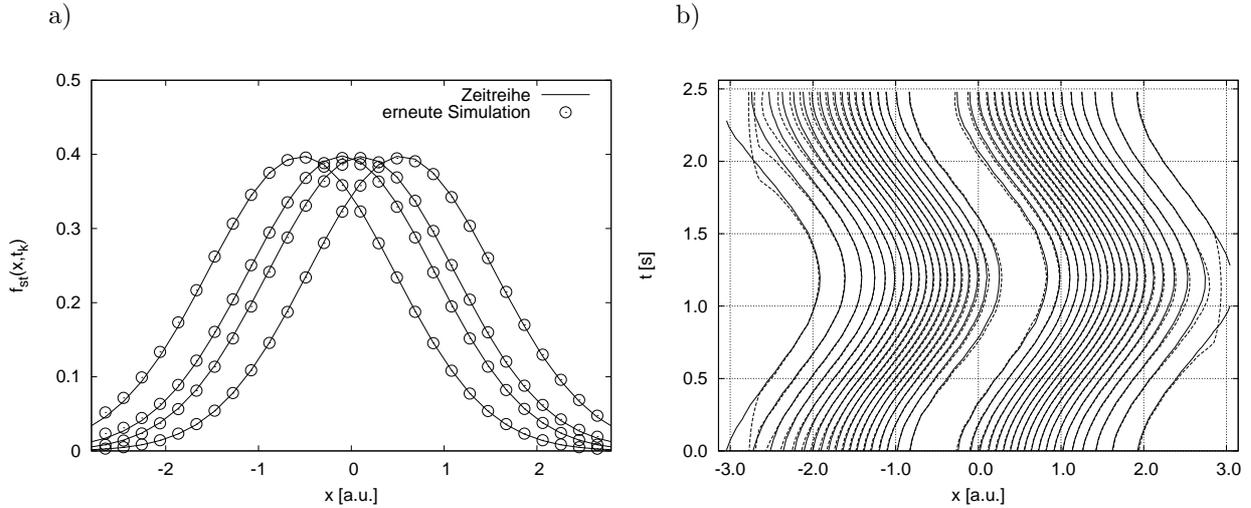


Abbildung 4.4: Konsistenztest mit reflektiven Rändern bei $|x| = 2.75$.

- a) Verteilungsdichte der Zeitreihe (durchgezogene Linie) und der erneuten Simulation (Punkte) bei einer stroboskopischen Abtastung der Zeit für verschiedene t
- b) Vergleich der Verteilungsdichte im Konturplot: Zeitreihe (durchgezogene Linie) und Konsistenztest (gestrichelte Linie) der Abstand zweier Höhenlinien beträgt 0.02.

schließlich um eine additive Kopplung der Form

$$h(X, Y, t) = h_x(X) + h_y(Y) + F(t) \quad (4.17)$$

handelt, ergeben die Projektionen der jeweiligen Schnittflächen lediglich Offsets der Kurven in den einzelnen Graphen. Auf die Darstellung von $h(x, t)$ und $h(y, t)$ mit t als festen Schnittparameter wurde verzichtet, da sich diese nicht qualitativ von Abbildung 4.5a und 4.5b unterscheiden. Die Qualität der Schätzung ist insgesamt sehr gut. Größere Abweichungen prägen sich erst in den Randbereichen aus. Für $h(x)$ in Abbildung 4.5a ist der absolute Fehler an der unteren Grenze, bedingt durch die oszillierende Verteilungsdichte in Abbildung 4.4, größer. In Abbildung 4.5b hingegen sind die Fehlerbalken für $h(y)$ am oberen Rand größer, da sich durch die zeitliche Verzögerung mit $\tau = 1$ die Phase zum Treiber mit $T = 2.56$ entsprechend verschiebt, so dass die Delay-Koordinate in Bereiche geringerer Datendichte rutscht. Die Abbildungen 4.5c und 4.5d für $F(t)$ unterscheiden sich ebenfalls kaum in der Güte der Schätzung. Unterschiede der Konvergenz zwischen den Variablen x und y treten dann in Erscheinung, wenn die Parameter $a \neq b$ gewählt werden. Die Verteilung der Daten würde für ungleiche Parameter die in Abbildung 4.3b erkennbare Rotationsinvarianz verlieren und eine ellipsenförmige Symmetrie annehmen.

Abbildung 4.6a bis 4.6d zeigen die entsprechenden Graphen für die Diffusion $D^{(2)}(x, y, t) = g^2(x, y, t)$. Da in diesem Beispiel (4.16) additives Rauschen vorliegt, erwartet man eine orts- und zeitunabhängige Diffusion, wie man den

4.3 Additive Kopplung von Delay und Treiber

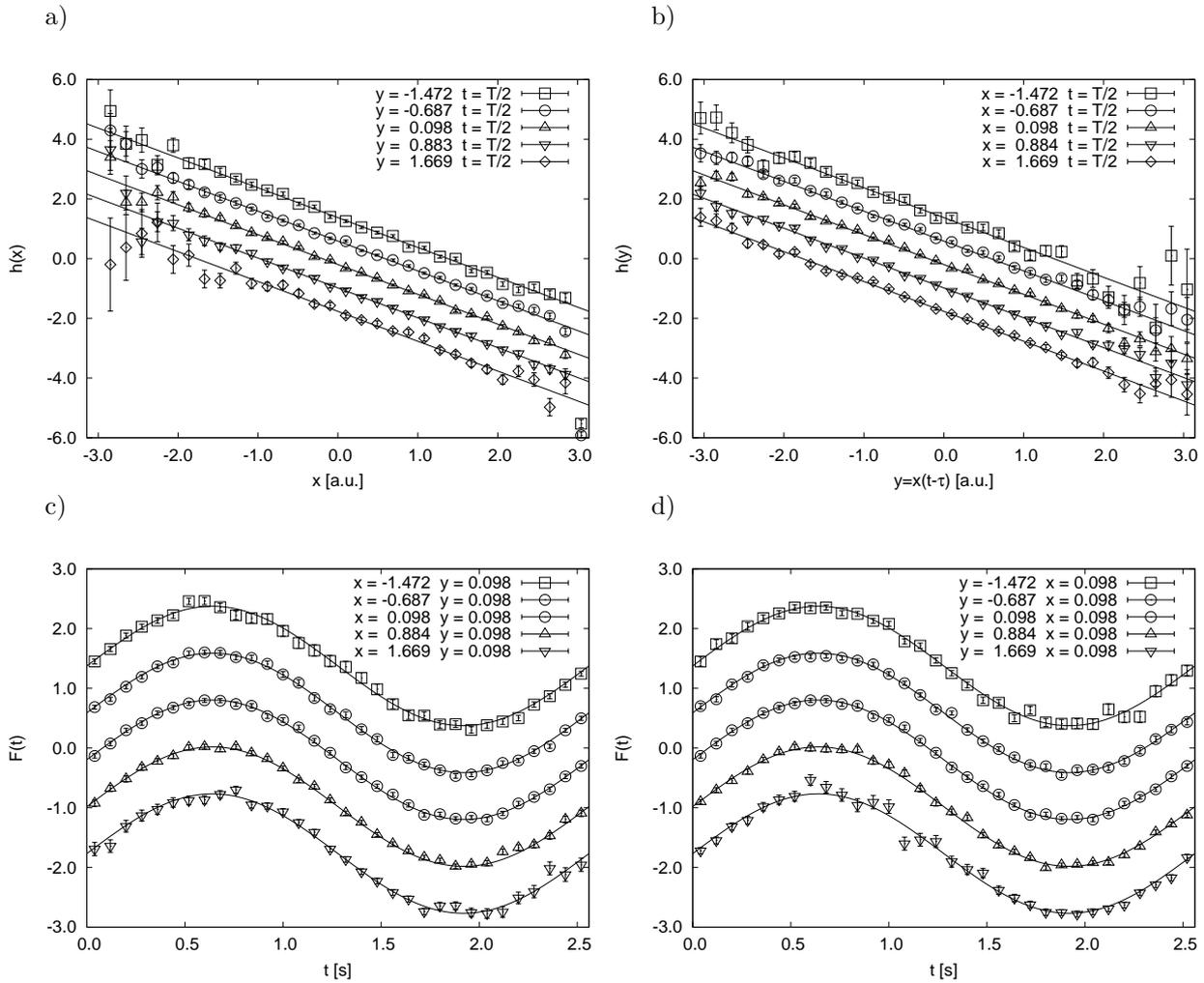


Abbildung 4.5: a) bis d) Drift in Abhängigkeit von einer Variablen

Abbildungen auch entnehmen kann. Die Divergenz des Fehlers in den Randbereichen ist in Abbildung 4.6a und 4.6b stärker ausgeprägt als zuvor bei der Drift. Dies ist ein generelles Problem bei der Schätzung der Diffusion. Die Darstellung der Diffusion in Abhängigkeit von der Zeit (4.6c und 4.6d) zeigt für die Randbereiche bzgl. der x - und y -Koordinate eine Tendenz zu hohen Werten.

In den Abbildungen 4.7a bis 4.7f wird die Drift in Abhängigkeit eines Parameters in 3d-Plots dargestellt, indem jeweils eine Schnittebene durch den dreidimensionalen Parameterraum der Drift gelegt wird. Dabei zeigen die Plots 4.7a und 4.7b die Drift für den Zeitpunkt $t = T/2$ mit x und y als laufende Parameter. Die Schnittebene ist entsprechend Gleichung (4.16) gewählt. Der Konturplot in Abbildung 4.7b lässt einen qualitativen Vergleich mit den theoretischen Werten zu. Für eine vollständige Darstellung müsste der Plot für verschiedene Zeiten abgebildet werden. In einer Animation würde sich die Ebene sinusförmig auf und ab bewegen. Das Gleiche gilt im wesentlichen für die

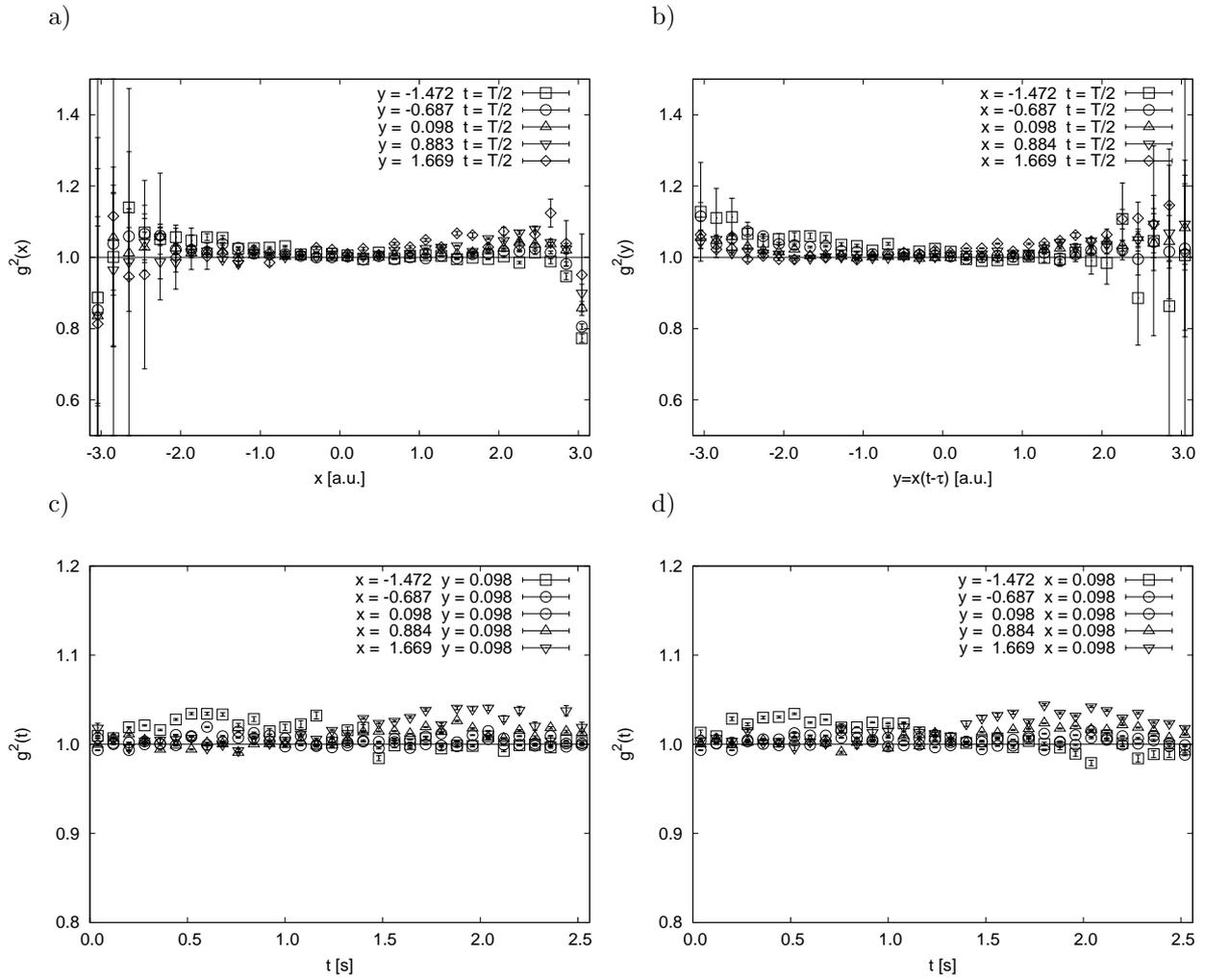


Abbildung 4.6: a) bis d) Diffusion in Abhängigkeit einer Variablen für verschiedene Schnittparameter

restlichen vier Plots 4.7c bis 4.7f, in denen die Drift in Abhängigkeit von x und t mit $y = 0.098$, respektive y und t mit $x = 0.098$ gezeigt wird. Auch hier würde man für die vollständige Darstellung eine Schar von Flächen benötigen, die sich lediglich um einen konstanten Offset unterscheiden.

Die Abbildungen 4.8a bis 4.8f zeigen das Verhalten bei Vergrößerung des Zeitinkrementes in der Analyse. Der Schnitt liegt für Abbildung 4.8a und 4.8b bei $y = 0.098$ und $t = 0.098$, für Abbildung 4.8c und 4.8d bei $x = 0.098$ und $t = 0.098$ und für Abbildung 4.8e und 4.8f bei $x = 0.098$ und $y = 0.098$. Mit zunehmenden Zeitinkrementen prägt sich in der Drift eine zu geringe Steigung aus. Die Diffusion hingegen nimmt eine leicht konvexe Form an (Abb. 4.8b und 4.8d).

4.3 Additive Kopplung von Delay und Treiber

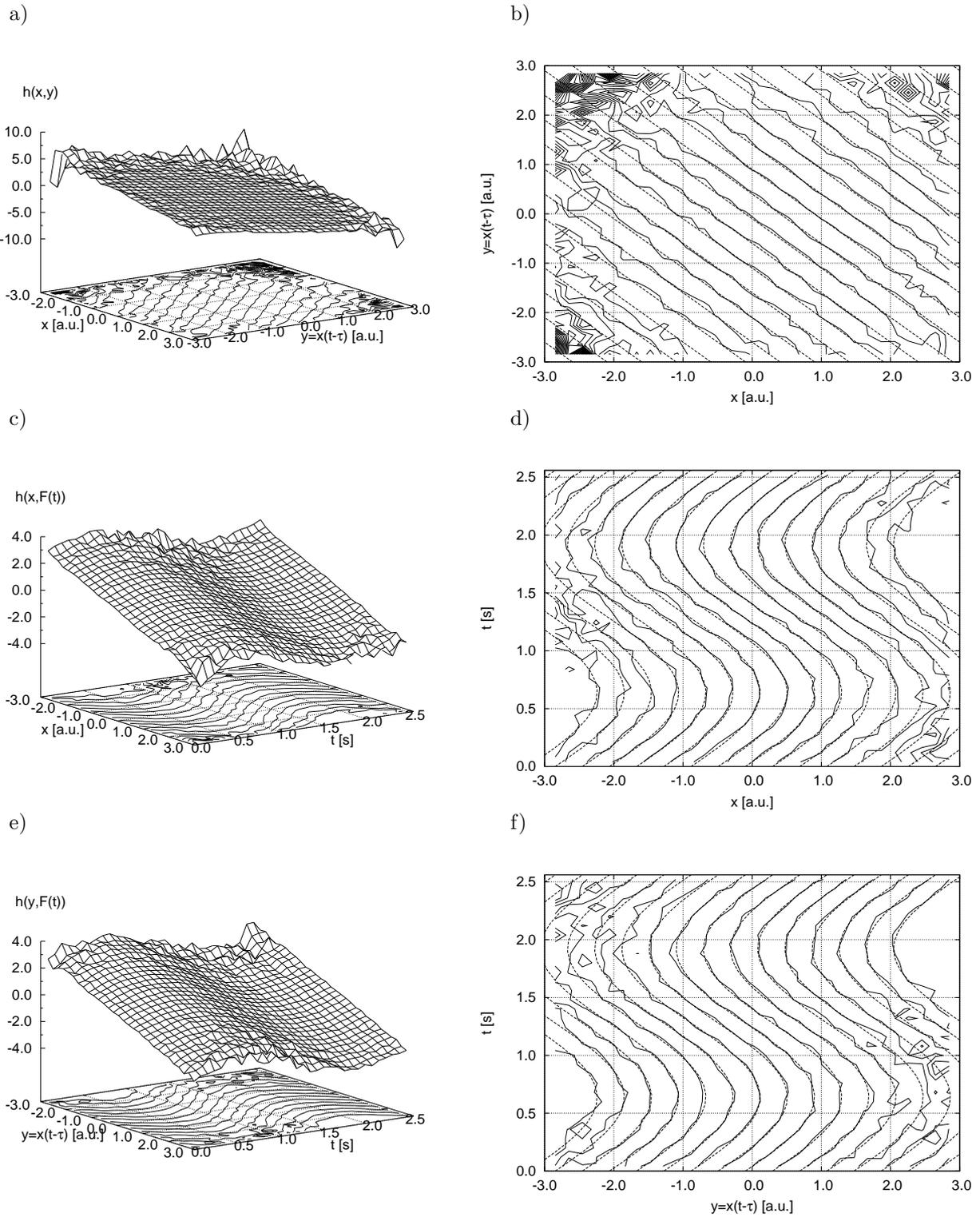


Abbildung 4.7: a) bis f) die Drift $h(X, Y, t) = -X - Y + \sin(\omega t)$ in Abhängigkeit von zwei Variablen; Konturplots in b), d) und f): Vergleich zwischen Analyse (durchgezogener Linie) und Theorie (gestrichelter Linie) - Abstand zweier Höhenlinien: 0.5

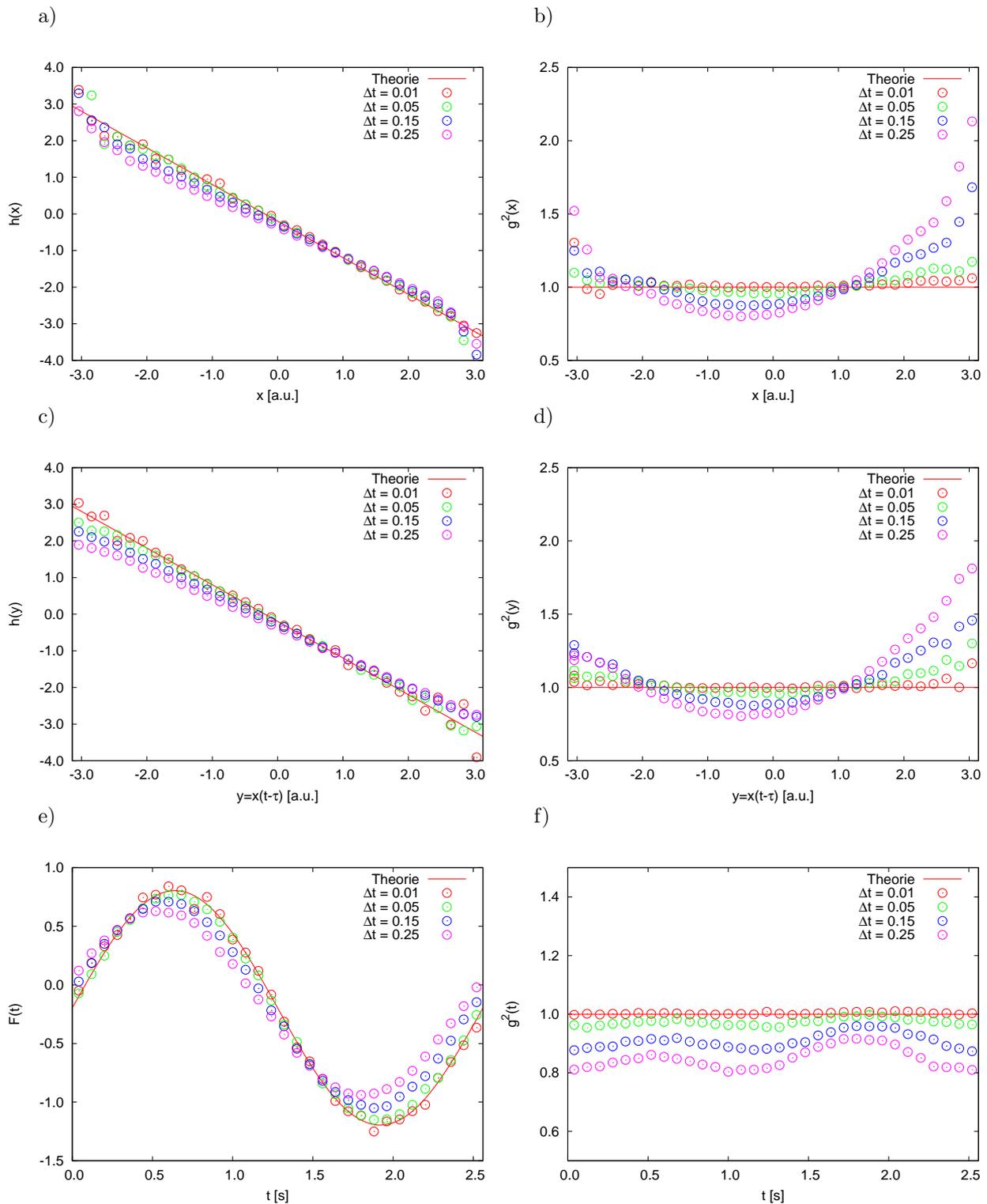


Abbildung 4.8: a) bis f) konvergentes Verhalten gegen die exakte Lösung von Drift und Diffusion bei kleinem Δt

Das Resumé dieses Beispiels ist, dass die Interpretation des funktionalen Zusammenhangs in der Drift bei einem additiv zerlegbaren Term wie in Gleichung (4.17) noch relativ einfach ist, da die Variation der Schnittparameter lediglich eine konstante Verschiebung für den jeweiligen Anteil der Drift in (4.17) verursacht. Diese Eigenschaft geht bei einer multiplikativen Kopplung verloren, so dass die vollständige Darstellung und besonders die Interpretation des gesamten funktionalen Zusammenhangs erschwert wird.

Zur Analyse wurde ein erweiterter Phasenraum mit insgesamt 32^3 Bins verwendet. Anhand der Plots wird deutlich, dass bei einer starken Erhöhung der Intervalle auf gleichem Grundgebiet z.B. bei einer Verdoppelung der Intervallzahl auf 64^3 die Datenmenge nicht mehr ausreicht, um eine gute Konvergenz zu garantieren. Noch gravierender würde sich eine Erhöhung der Dimension des Ordnungsparameters X auswirken. Für einen multivariaten Prozess mit $X \in \mathbb{R}^2$ würde die Parameterzahl mit einem Treiber und einem Delay auf fünf Freiheitsgrade ansteigen. Geht man von einer gleichmäßigen Verteilung der Werte im Phasenraum aus, so müsste man bei der gleichen Datenmenge die Zahl der Intervalle pro Parameter auf $32^{3/5} = 8$ heruntersetzen, um die gleiche Datendichte wie in dem univariaten Fall zu erreichen. Bei einer Zahl von 32^5 Intervallen müsste für eine vergleichsweise konstante Dichte der Messwerte die Länge der Zeitreihe von $N = 10^9$ auf $N = 10^{12}$ heraufgesetzt werden. An diesen beiden extremen Beispielen sieht man, dass eine Zeitreihenanalyse für getriebene Delay-Prozesse in mehreren Dimension in dieser Form praktisch kaum durchführbar ist. Dabei ist die Auflösung durch die Diskretisierung des Phasenraums in 32 Intervalle je Freiheitsgrad noch relativ gering.

4.4 Multiplikative Kopplung von Delay und Treiber

Als nächstes soll ein allgemeineres Beispiel anhand einer multiplikativen Kopplung zwischen der Delay-Variablen und dem externen Treiber diskutiert werden. Die generelle Vorgehensweise bleibt gleich. Allerdings wird die Interpretation der Plots für die Drift und die Diffusion anspruchsvoller.

$$\frac{d}{dt}X = \underbrace{-X + Y \sin(\omega t)}_{h(X, Y, F(t))} + \Gamma(t) \quad (4.18)$$

$$\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma(t)\Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t')$$

Die Rauschstärke wurde wie im vorherigen Beispiel mit $Q = 1$ gewählt. Das Delay τ beträgt eine Zeiteinheit und die Periodendauer $T = 2.56$ mit der entsprechenden Kreisfrequenz $\omega = \frac{2\pi}{T}$. Der Koeffizient vor der Zufallsvariable X muss aus Gründen der Stabilität kleiner als Null sein. Die Stabilität des Systems wurde mittels Abbildung 4.9a numerisch überprüft. Die Varianz konvergiert schnell gegen einen konstanten Wert. Der Mittelwert oszilliert nicht wie bei einer additiven Kopplung, sondern läuft gegen Null, da die Amplitude des Treibers mit einem zufallsbehafteten Wert versehen ist. Für diese Parameter lässt sich eine periodische Zeitreihe erzeugen.

Es werden bei der Simulation von Gleichung (4.18) insgesamt 10^9 Datenpunkte

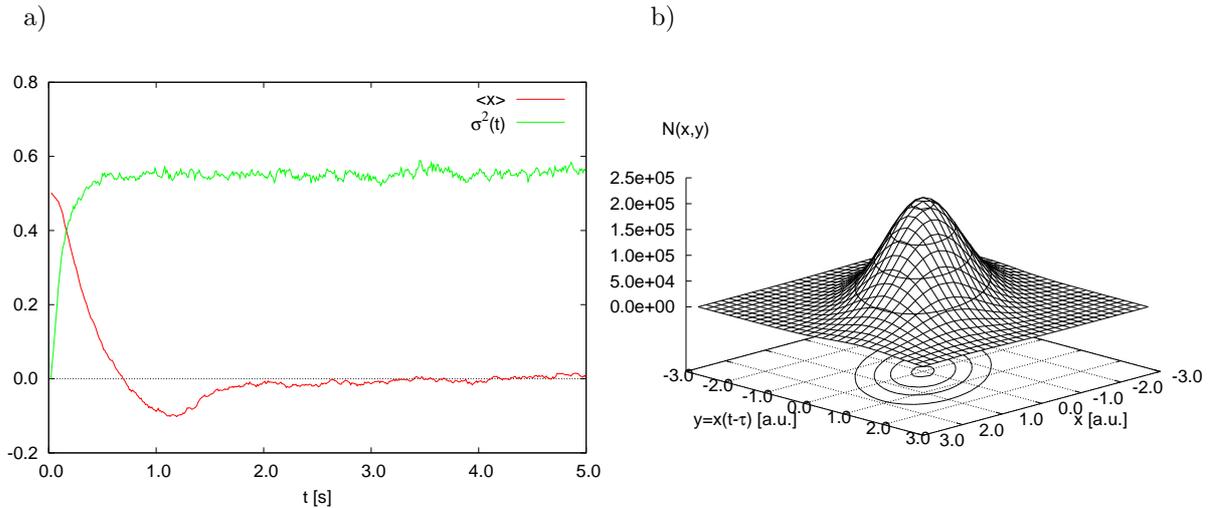


Abbildung 4.9: a) zeitliche Entwicklung des 1. Momentes und der Varianz; Berechnung durch Ensemblemittelung mit 10^4 Realisierungen
 b) Verteilung der Datenpunkte - Histogramm mit insgesamt 10^9 Messwerten

generiert. Das Zeitinkrement der Analyse ist wie die Zeitschrittweite der Simulation gewählt und beträgt $\Delta t = 0.01$. Die Diskretisierung des Phasenraumes erfolgt in 32^3 Bins. Die Grenzen liegen, wie zuvor, bei:

$$\Omega = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi] \times [0, T]$$

Die Simulation der Zeitreihe wird für die Zufallsvariable mit natürlichen Rändern vorgenommen. Der Test auf Selbstkonsistenz in Abbildung 4.10a und 4.10b reproduziert die Verteilungsdichte der Zeitreihe. Nur an den Rändern treten geringe Abweichungen auf.

Die auf dem Grundgebiet ellipsenförmige Verteilungsdichte in Abbildung 4.9b lässt schon vermuten, dass die Konvergenz in den Eckbereichen um $(x, y) = (-3, 3)$ und $(3, -3)$ schlechter als in den Bereichen um $(-3, -3)$, bzw. $(3, 3)$ ist. Der x -abhängige Teil der Drift liefert für verschiedene Schnittebenen eine Schar von Geraden mit einer konstanten Steigung von -1 , wie man in Abbildung 4.11a erkennen kann. Die Breite des Abstands zweier Geraden hängt von dem Wert der Delay-Koordinate und der Zeit ab. Würde man z.B. für $t = 0$ oder $t = T/2$ schneiden, würde kein Offset vorliegen.

Liegt ein bestimmter funktionaler Zusammenhang, in diesem Fall also eine Gerade mit einer Steigung von -1 , bei verschiedenen Schnittpunkten vor, so unterscheiden sich die Kurven verschiedener Schnittparameter nur um einen konstanten Offset, wenn eine additive Koppelung des Driftanteils, in diesem Fall $h(x) = -X$, zugrunde liegt. Auf sämtliche Möglichkeiten der Darstellung der Drift soll verzichtet werden, da diese prinzipiell keine neuen Einsichten geben. Die Amplitude des Treibers $F(t) = \sin(\omega t)$ in Abbildung 4.11b hängt linear von dem Parameter y ab, da hier eine multiplikative Kopplung vorliegt. Diese wird in anderer Form unmittelbar in Abbildung 4.11d deutlich, da die Stei-

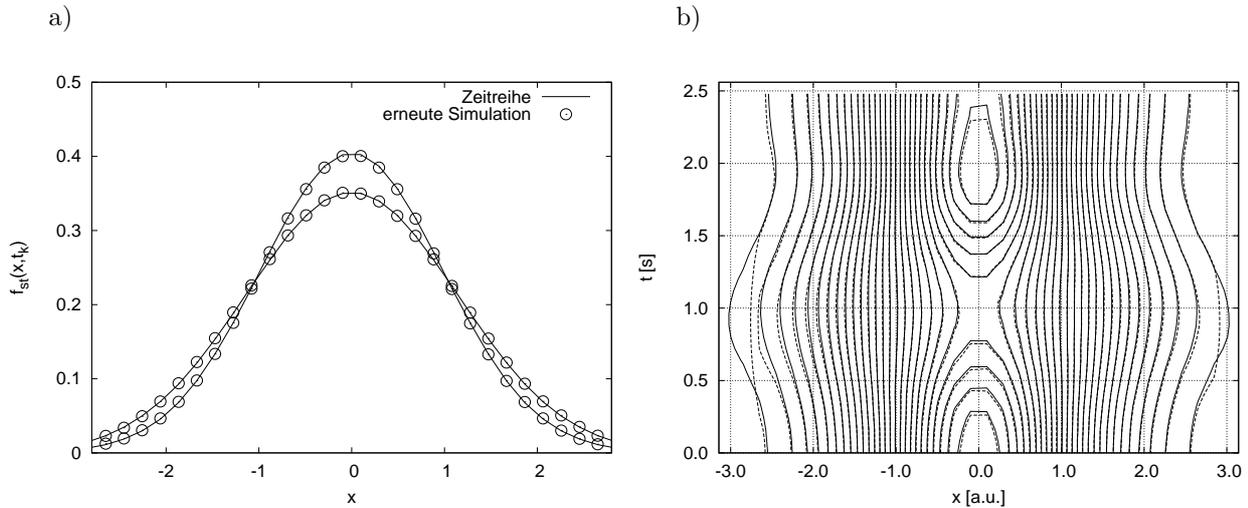


Abbildung 4.10: Konsistenztest mit reflektiven Rändern bei $|x| = 2.75$.

- a) Verteilungsdichte der Zeitreihe (durchgezogene Linie) und der erneuten Simulation (Punkte) bei einer stroboskopischen Abtastung der Zeit für verschiedene t
- b) Vergleich der Verteilungsdichte im Konturplot: Zeitreihe (durchgezogene Linie) und Konsistenztest (gestrichelte Linie) der Abstand zweier Höhenlinien beträgt 0.015.

gung der Drift $h(y)$ von der Zeit abhängt. Für beide Plots 4.11b und 4.11d wurde der additive Anteil $-X$ der Drift auf $x = 0.098$ gesetzt. Die Variation des Schnittparameters x führt, wie zuvor erläutert, lediglich um eine vertikale Verschiebung der Kurvenscharen. Dieser Zusammenhang wird für eine Zeit $t = T/4$ in Abbildung 4.11c demonstriert.

Da in diesem Beispiel ein additiver Rauschterm mit $Q = 1$ vorliegt, bringt die Betrachtung der Diffusion $D^{(2)}(x, y, t) = g^2(x, y, t) = Q$ für sämtliche Schnittparameter keine neuen Erkenntnisse. Die Abbildung 4.12a bis 4.12c zeigen die Ergebnisse der Analyse für die Diffusion.

Der 3d-Plot 4.13a und 4.13b zeigen für $t = T/4$ die Drift $h(x, y)$. Für andere Zeiten als Schnittparameter ändert sich die Steigung der Ebene bezüglich der Delay-Koordinate mit $\sin(\omega t)$. Aufgrund der zuvor erwähnten „gequetschten“ Verteilungsdichte in Abbildung 4.9b divergiert in den beiden Eckbereichen um $(-\pi, \pi)$ und $(\pi, -\pi)$ die Drift.

In den Plots 4.13c und 4.13d ist die Drift als Funktion von x und t dargestellt. Da der Plot bei einem konstanten $y = 0.098$ gemacht wurde, ist die Amplitude des Treibers entsprechend gering. Hier wirkt sich die multiplikative Kopplung auf die Höhe der Amplitude aus. Bei betragsmäßig größeren Werten für y erhält man Plots analog zu Abbildung 4.7c und 4.7d mit den entsprechenden Amplituden.

An den letzten beiden Graphen 4.13e und 4.13f ($h(y, t)$ mit $x = 0.098$) wird die multiplikative Kopplung demonstriert, da sich die Amplitude des Treibers mit dem Wert der y -Koordinate verändert. Der dazu additiv gekoppelte x -abhängi-

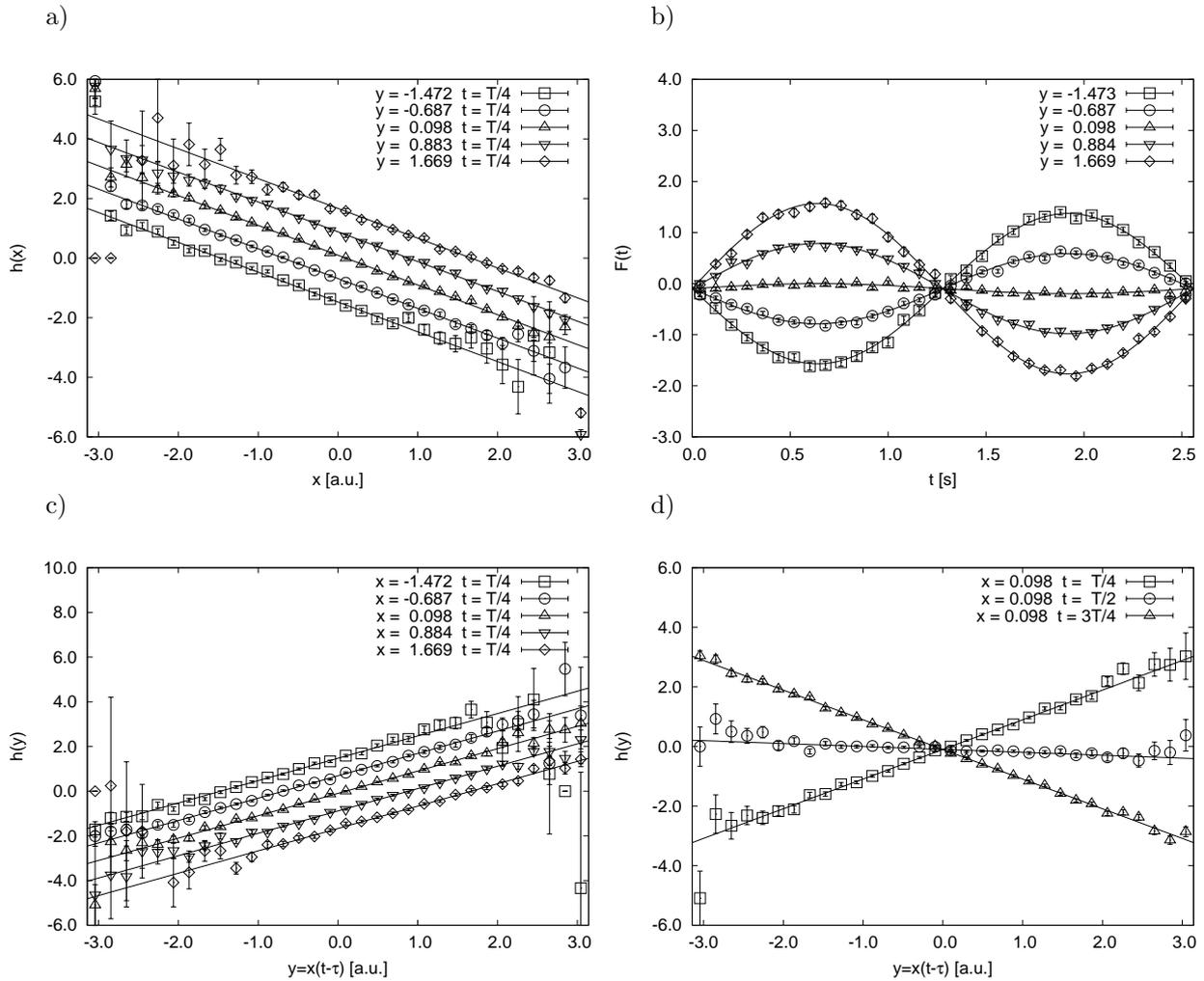


Abbildung 4.11: a) bis d) verschiedene Darstellungen der Drift in Abhängigkeit von einer Variablen

ge Anteil verursacht lediglich einen Offset der geplotteten Fläche.

Anhand der beiden Beispiele wurde gezeigt, dass die Analyse für stationäre Zeitreihen mit einem periodischen Treiber und Delay erfolgreich durchgeführt werden kann. Im ersten Beispiel kann aufgrund der additiven Kopplung der einzelnen Terme für X, Y und T der funktionale Zusammenhang in der Drift $h(X, Y, t) = -X - Y - \sin(\omega t)$ schnell aus den Graphen abgelesen werden. Insbesondere reicht es aus die einzelnen Terme in einem 2d-Plot darzustellen.

Die Variation der Drift $h(X, Y, t) = -X + Y \sin(\omega t)$ in eine multiplikative Kopplung im zweiten Beispiel ändert nichts an der generellen Verfahrensweise. Allerdings sieht man an dem noch sehr einfachen Beispiel, dass die Interpretation bzw. Darstellung für allgemeine Fälle $h(X, Y, F(t))$ äußerst komplex werden kann. Zur Verifikation wurde der in Kapitel 3 vorgestellte Test auf Selbstkonsistenz verwendet. Dieser kann ohne zusätzliches Wissen über die Drift bzw. Diffusion angewendet werden und hat in beiden Beispielen ein positives Resultat.

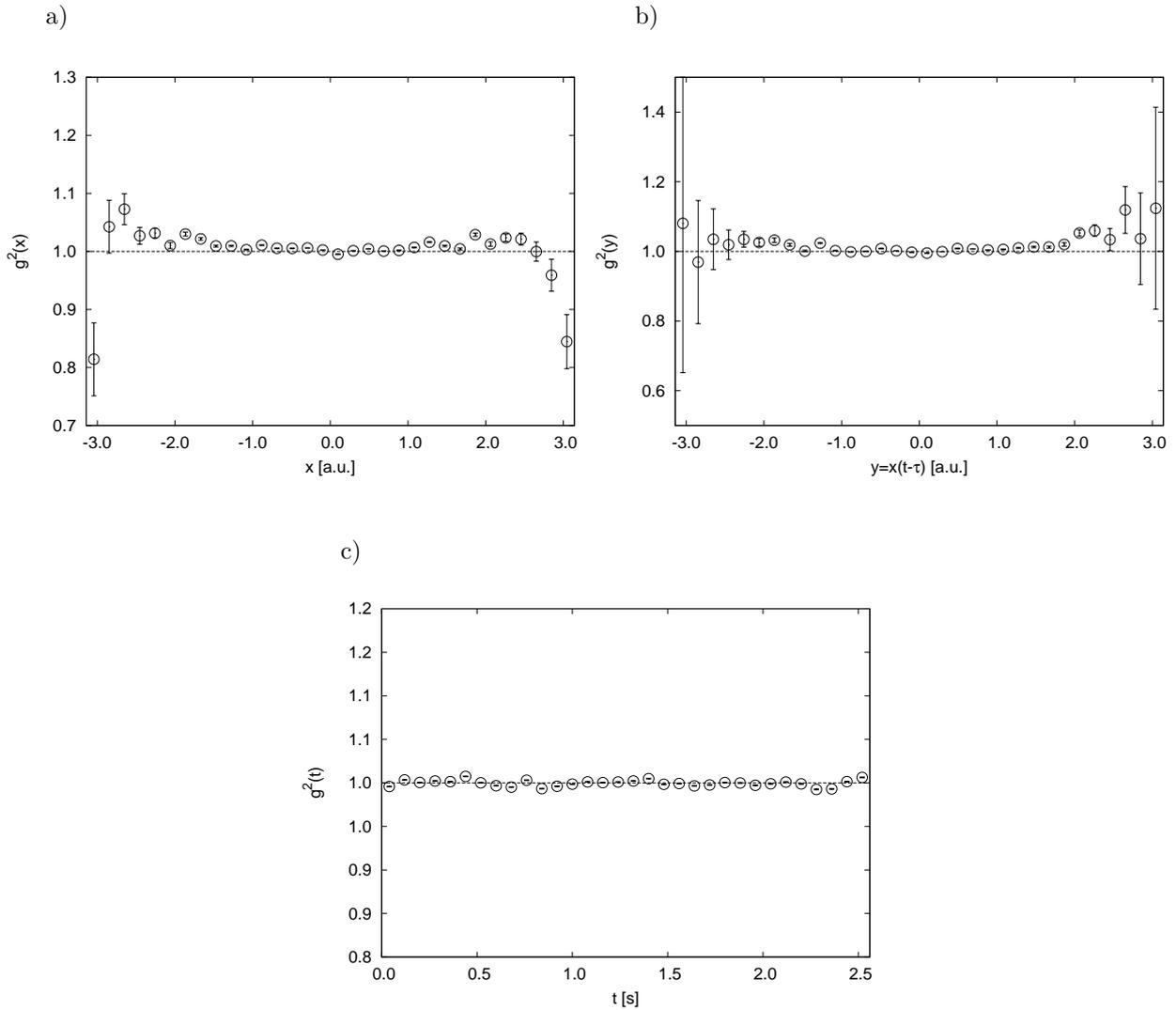


Abbildung 4.12: a) bis c) Diffusionsterm bei additivem Rauschen
 a) $y = 0.098$ und $t = 0.040$
 b) $x = 0.098$ und $t = 0.040$
 c) $x = 0.098$ und $y = 0.098$

tat ergeben.

Es wurden in beiden Beispielen nur additive Rauschterme, also $g(X, Y, F(t)) = const$ verwendet. Die Auswertung der Zeitreihe und des Selbstkonsistenztests hätte aber auch multiplikatives Rauschen $g(X, Y, F(t))$ korrekt berücksichtigt, da die Diffusion für den erweiterten Phasenraum Ω geschätzt wird. Die Darstellungen der Diffusion erfolgt analog zu der Darstellung der Drift.

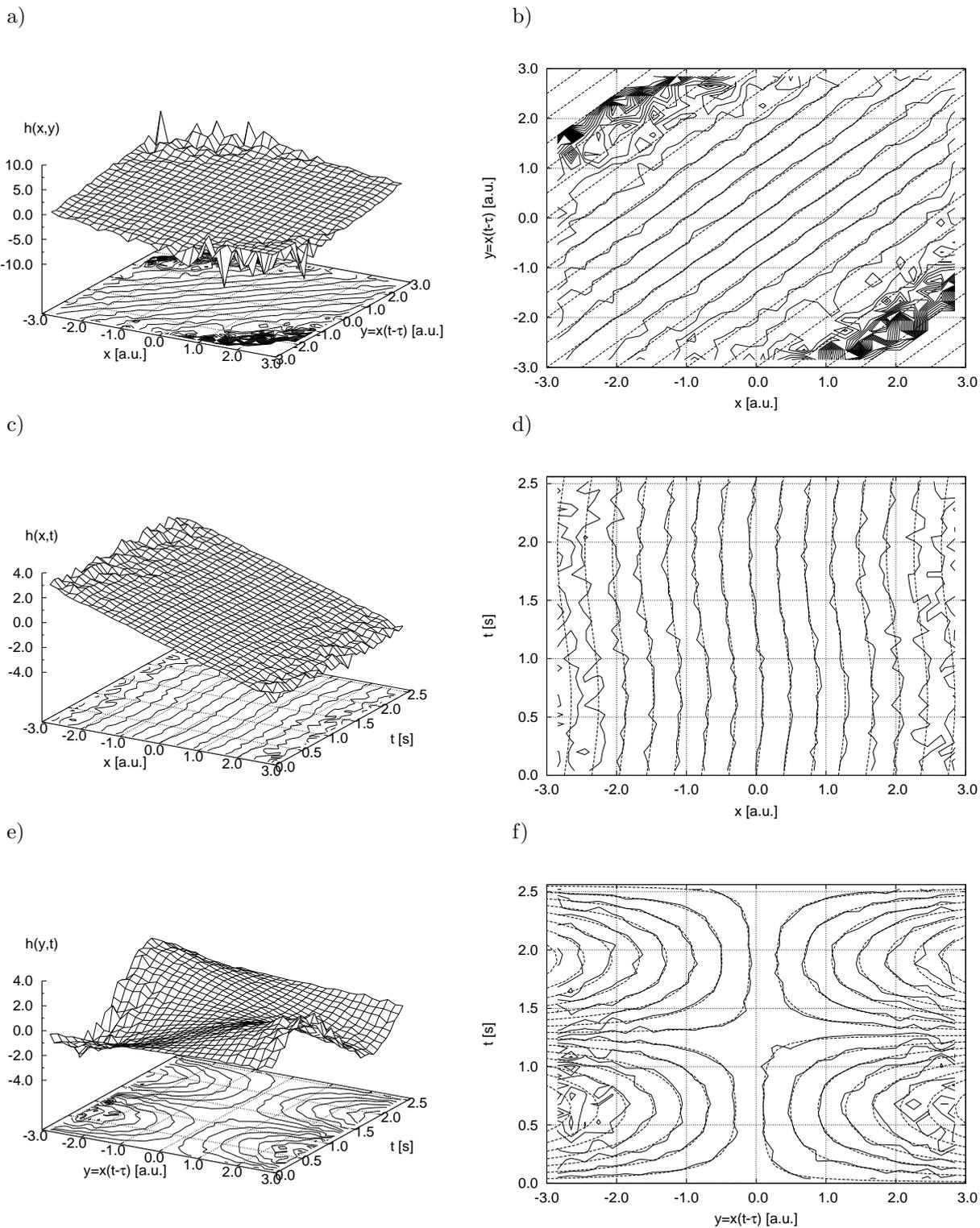


Abbildung 4.13: a) bis f) die Drift $h(X, Y, t) = -X + Y \sin(\omega t)$ in Abhängigkeit von zwei Variablen;
 Konturplots in b), d) und f): Vergleich zwischen Analyse (durchgezogener Linie) und Theorie (gestrichelter Linie) - Abstand zweier Höhenlinien: 0.5

5 Stochastische Systeme 2.Ordnung mit Antrieb und Delay

In diesem Kapitel soll die Zeitreihenanalyse erweitert werden, so dass auch Systeme behandelt werden können, die mittels gewöhnlicher stochastischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung der Form

$$\ddot{X} = h(X, \dot{X}, t) + g(X, \dot{X}, t) \Gamma(t) \quad (5.1)$$

mit einem stochastischen Term $\Gamma(t)$ beschrieben werden. Gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung sind z.B. in der klassischen Mechanik als Newton'sche Bewegungsgleichung bekannt. Dabei lässt sich der Term $h(X, \dot{X}, t)$ als eine deterministische und $g(X, \dot{X}, t) \Gamma(t)$ als eine stochastische Kraft deuten. Gewöhnliche Differentialgleichungen höherer Ordnung lassen sich auf ein System von gekoppelten Differentialgleichungen erster Ordnung reduzieren. Die stochastische Bewegungsgleichung schreibt sich somit als bivariates System:

$$\dot{X} = V \quad (5.2)$$

$$\dot{V} = h(X, V, t) + g(X, V, t) \Gamma(t) \quad (5.3)$$

In vielen Prozessen kann angenommen werden, dass es sich bei $\Gamma(t)$ um ein mittelwertfreies, δ -korreliertes Rauschen handelt

$$\text{mit } \langle \Gamma(t) \rangle = 0 \quad \text{und} \quad \langle \Gamma(t) \Gamma(t') \rangle = 2\delta(t - t') .$$

Eine Drift-Diffusions-Schätzung gekoppelter Systeme der Form (5.2) und (5.3) kann prinzipiell wie in Kapitel 4 mit den Gleichungen (4.2), respektive (4.3) erfolgen. Gleichung (5.3) hat genau die Form einer Langevin-Gleichung in V mit dem zusätzlichen Argument X , das über den Zusammenhang (5.2) gegeben ist.

Für die Zeitreihenanalyse bedeutet das, dass eine zusätzliche Nebenbedingung berücksichtigt werden muss, da die Kräfte bzw. Drift und Diffusion durch die gekoppelten DGL-Systeme von Ort und Geschwindigkeit abhängen können. Um die Analyse zur Bestimmung von $h(X, V, t)$ und $g(X, V, t)$ in (5.3) anwenden zu können, wird eine bivariate Zeitreihe mit den Wertepaaren

$$\{(X_k(t), V_k(t)), k = 1 \dots N\}$$

benötigt. In diesem Kapitel sollen ebenfalls periodisch getriebene Systeme mit einer zeitverzögerten Rückkopplung behandelt werden. Dabei soll das Feedback nur für den Ort x und nicht für die Geschwindigkeit vorliegen. Der Treiber

soll wie zuvor periodisch sein mit $F(t) = F(t + T)$ und für das Delay wird die übliche Bezeichnung $Y = X(t - \tau)$ verwendet.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V \\ \dot{V} &= h(X, Y, V, F(t)) + g(X, Y, V, F(t)) \Gamma(t)\end{aligned}\quad (5.4)$$

Da die Schätzung aus einer Datenreihe erfolgen soll, benötigt man, wie zuvor schon in Kapitel 2.5 diskutiert, eine periodische Zeitreihe der Form:

$$\{(X(t_k), V(t_k)), k = 1 \dots N\}$$

Unter Berücksichtigung der zusätzlichen Nebenbedingungen für die Zeitabtastung und die Delay-Koordinate lassen sich somit Drift und Diffusion bestimmen:

$$D^{(1)}(x, y, v, t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle V(t_k + \Delta t) - v \rangle \Big|_{X(t_k)=x, X(t_k-\tau)=y, V(t_k)=v} \quad (5.5)$$

$$D^{(2)}(x, y, v, t_k) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (V(t_k + \Delta t) - v)^2 \rangle \Big|_{X(t_k)=x, X(t_k-\tau)=y, V(t_k)=v} \quad (5.6)$$

Der Zusammenhang zwischen (5.5), (5.6) und (5.4) erfolgt über die Interpretation nach Itô (s. Kapitel 2):

$$D^{(1)}(x, y, v, t_k) = h(x, y, v, t_k) \quad \text{und} \quad D^{(2)}(x, y, v, t_k) = g^2(x, y, v, t_k)$$

Im Vergleich zu Systemen erster Ordnung erscheint bei der Analyse noch ein zusätzlicher Parameter, der den erweiterten Phasenraum um eine Dimension auf insgesamt vier Dimensionen erhöht. In Kapitel 4 wurde die Datenanalyse für einen dreiparametrischen Phasenraum erfolgreich durchgeführt. Dazu wurden Zeitreihen mit $N = 10^9$ Datenpunkten ausgewertet. Weil für die gleiche Dichte an Datenpunkte im vierdimensionalen Phasenraum ca. die zehn- bis hundertfache Datenmenge benötigt würde, ist eine direkte numerische Umsetzung von (5.5) und (5.6) unpraktikabel,

5.1 Zwei-Schritt-Methode

Für eine spezielle Klasse von Systemen lässt sich die Analyse in (5.5) und (5.6) von einen vier- auf einen zweiparametrischen Phasenraum reduzieren. Dies hat den Vorteil, dass nur noch ein Bruchteil der Datenmenge benötigt wird. Dazu müssen folgende Annahmen gemacht werden:

- Das System besitzt eine Drift, die sich folgendermaßen in eine additive Form zerlegen lässt:

$$h(X, V) + u(Y, F(t); \beta)$$

Der Parameter β ist die Kopplungskonstante der beiden Driftterme, d.h. für $\beta = 0$ soll gelten, dass $u(Y, F(t); 0) \equiv 0$ zu setzen ist.

- Es liegt jeweils eine Zeitreihe für die Kopplung $\beta = 0$ und $\beta \neq 0$ vor.
- Die Diffusion ist nur von dem Ort und der Geschwindigkeit abhängig.

Diese spezielle Form scheint auf den ersten Blick aufgrund der restriktiven Voraussetzungen sehr akademisch zu sein. Allerdings lassen sich eine Vielzahl an Modellen aus den Bewegungswissenschaften oder Ingenieurwissenschaften über diesen Ansatz beschreiben [41, 28, 52, 6].

$$\begin{aligned}\dot{X} &= V \\ \dot{V} &= h(X, V) + u(Y, F(t); \beta) + \sqrt{D^{(2)}(X, V)} \Gamma(t)\end{aligned}\quad (5.7)$$

Man geht zunächst von einem ungestörten System mit $\beta = 0$ aus, mit dem sich mittels einer stationären Zeitreihe die Drift $h(x, v)$ und die Diffusion $D^{(2)}(x, v)$ bestimmen lassen. Es werden im ersten Schritt somit weder Delay-Koordinaten noch eine stroboskopische Zeitabtastung gebraucht:

$$h(x, v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle V(t + \Delta t) - v \rangle \Big|_{X(t)=x, V(t)=v} \quad (5.8)$$

$$D^{(2)}(x, v) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2\Delta t} \langle (V(t + \Delta t) - v)^2 \rangle \Big|_{X(t)=x, V(t)=v} \quad (5.9)$$

Als nächstes wird eine zweite Messreihe aufgenommen, die einer externen Störung in Form eines periodischen Treibers ausgesetzt wird. Unter der Voraussetzung, dass die Einwirkung der Störung auf das System klein sein soll (d.h. eine Störung, die die charakteristischen Eigenschaften des Systems nicht gänzlich verändert) kann eine additive Zerlegung der Drift vorgenommen werden. Zudem gelte die Annahme, dass die Diffusion nur von x und v abhängt.

Weiterhin nimmt man an, dass das System über ein zeitlich verzögertes Feedback auf eine externe Störung reagiert. Diese Art von Steuer- und Regelmechanismen sind typisch für biologische, aber auch technische Systeme, da in solchen Systemen immer Signallaufzeiten berücksichtigt werden müssen.

Wendet man nun die Schätzung der Drift mit der Restriktion $X(t_k - \tau) = y$ für die Mittelwertbildung an, so erhält man für das erste bedingte Moment der Zeitreihe des gestörten Systems den Ausdruck:

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle V(t_k + \Delta t) - V(t_k) \rangle \Big|_{X(t_k - \tau) = y} &= u(y, t_k; \beta) \\ &+ \langle h(x, v) \rangle \Big|_{X(t_k - \tau) = y}\end{aligned}\quad (5.10)$$

Die numerische Durchführung erfolgt, wie in Kapitel 4 beschrieben, indem eine stroboskopische Zeitabtastung über die Länge der Treiberperiode zur Mittelwertbildung herangezogen wird. Dabei lässt sich die Mittelwertbildung in (5.10) aufgrund des additiven Charakters der Drift in zwei Terme zerlegen. Das Ergebnis der bedingten Mittelung setzt sich aus zwei Anteilen zusammen. Der eine Anteil besteht in der gesuchten Drift $u(y, t; \beta)$. Den anderen Teil erhält man über eine bedingte Mittelwertbildung der schon bekannten Drift $h(x, v)$. Die einfache Umstellung zum gesuchten Term $u(y, t; \beta)$ führt schließlich auf das Ergebnis für den zweiten Schritt:

$$\begin{aligned}u(y, t_k; \beta) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \langle V(t_k + \Delta t) - V(t_k) \rangle \Big|_{X(t_k - \tau) = y} \\ &- \langle h(x, v) \rangle \Big|_{X(t_k - \tau) = y}\end{aligned}\quad (5.11)$$

Mit Gleichung (5.8) und (5.11) ist das Werkzeug vorhanden, um Zeitreihen für stochastische Delay-Differentialgleichungen zweiter Ordnung zu analysieren, die zusätzlich die obengenannten Einschränkungen besitzen. Es gelten weiterhin die Voraussetzungen, die bei der Analyse von Systemen erster Ordnung gegeben sein müssen, also eine konstante und bekannte Delay-Zeit und Treiberperiode. Die Analyse erfolgt in zwei Schritten. Die Drift $h(x, v)$ und Diffusion $D^{(2)}(x, v)$ des ungestörten Systems werden aus einer bivariaten Zeitreihe (X_i, V_i) ermittelt. Mit der Drift lässt sich im zweiten Arbeitsschritt aus einer zweiten Zeitreihe des gestörten Systems $u(y, t; \beta)$ über (5.11) bestimmen. Es handelt sich somit um ein Zwei-Schritt-Verfahren, wie es in anderen Zusammenhängen bereits vorgeschlagen wurde [3, 13].

Mit den zuvor gewonnen Termen $h(x, v)$, $D^{(2)}(x, v)$ und $u(y, t; \beta)$ wird im letzten Schritt durch die Simulation von Gleichung (5.7) die stationäre Verteilungsdichte $f_{st}(x, v)$ der Zeitreihe mit derjenigen aus der erneuten Simulation verglichen, um den Selbstkonsistenztest (s. Kapitel 3) durchzuführen.

5.2 Beispiel: Modell für bimanuelle rhythmische Koordination

Die Zwei-Schritt-Methode soll als nächstes auf ein Modell aus den Bewegungswissenschaften angewandt werden, welches aus der Theorie der Synchronisation bei sensomotorischer Koordination stammt. Typische Experimente sind *Tracking-* oder *Tapping-*Experimente. Ein typisches Tracking-Experiment wurde bereits in Kapitel 2 vorgestellt. Bei Tapping-Experimenten soll ein rhythmisch gleichmäßiger Stimulus (z.B. ein Metronom) möglichst präzise „mitgeklopft“ werden.

Da das Nervensystem extrem parallel arbeitet, können die intrinsischen Prozesse, die zusätzlich zur Synchronisationsaufgabe verarbeitet werden, in erster Approximation als weißes Hintergrundrauschen genähert werden. Häufig spielt ein sensorisches Feedback eine wichtige Rolle, d.h. die Verarbeitung der Signale erfolgt dezentral, so dass Signallaufzeiten der Nervenimpulse in Betracht gezogen werden müssen. Diese führen schließlich auf die Behandlung von Delay-Differentialgleichungen.

Mit der Hypothese, dass das System einen externen Stimulus mit der zeitverzögerten Version des Signals vergleicht, um mittels dieser Feedback-Kontrolle den Fehler zu minimieren, erhält man folgendes Modell [25, 6]:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= V \\ \dot{V} &= \underbrace{V(a - X^2) - V^3 - X}_{h(x, v)} + \underbrace{\beta [\sin(\omega t) - Y]^2}_{u(y, t; \beta) \equiv u(y, t)} + \underbrace{\sqrt{Q}}_{g(x, v)} \Gamma(t) \end{aligned} \quad (5.12)$$

Das System (5.12) beschreibt für den ungestörten Fall mit $\beta = 0$ einen nichtlinearen Oszillator ähnlich einem „van der Pol-Bonhoeffer-Oszillator“. Wenn der Parameter $a > 0$ gewählt wird, liegt der entdämpfte Fall also ein selbsterregter Oszillator vor. Mit dem Parameter $a = 1$ besitzt der Oszillator eine Periodendauer von $T_0 = 2\pi$.

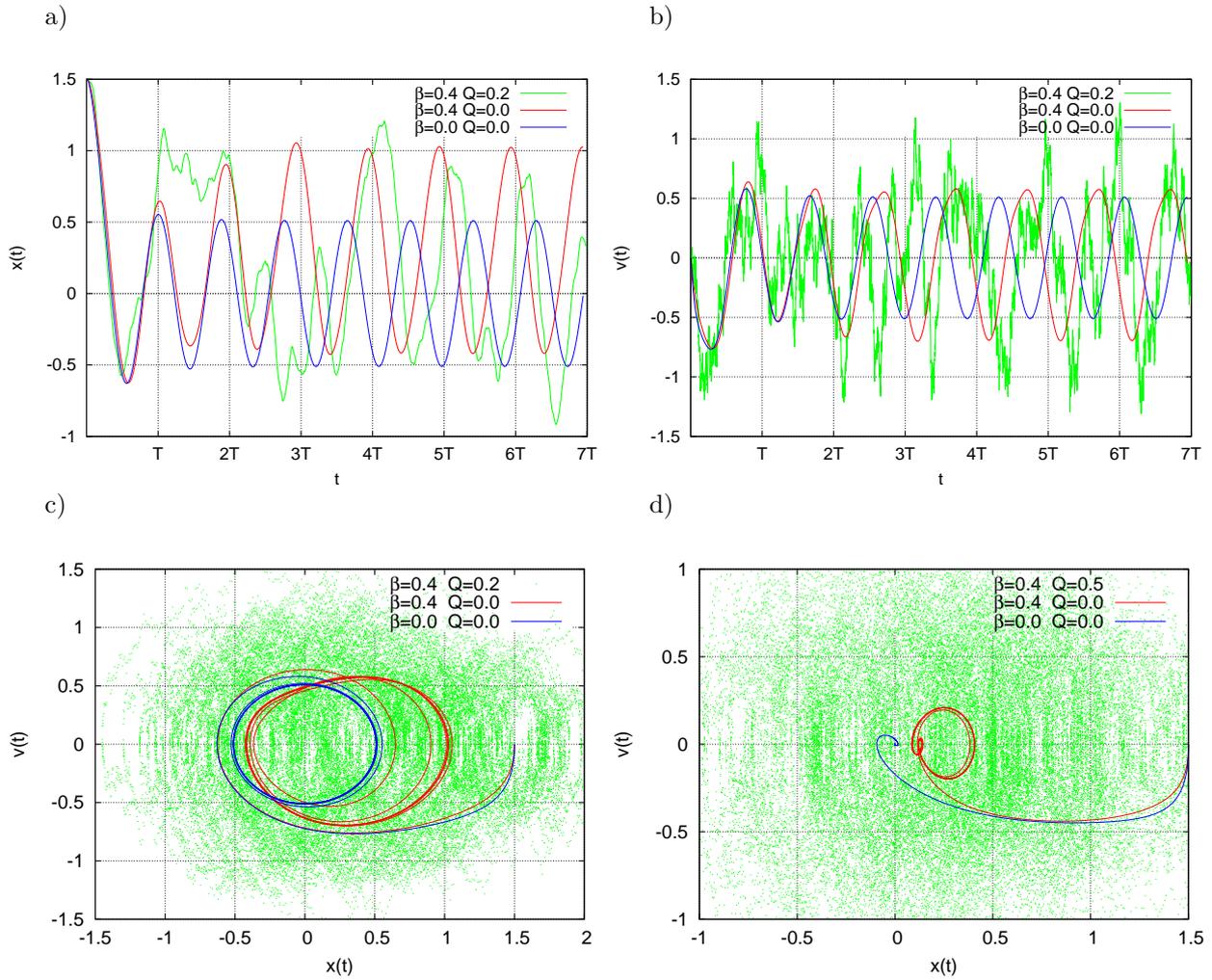


Abbildung 5.1: a) und b) Synchronisation des enddämpften Oszillators zum externen Treiber T mit $a = 0.25$
 c) Deformation des Grenzzyklus ($a = 0.25$) durch die externe Störung und Auswirkung einer Fluktuationskraft
 d) gedämpfter Oszillator ($a = -1$) mit und ohne Störung

In [6] werden folgende Parameterwerte für Gleichung (5.12) verwendet:

- die Parameter $a = 1$ und $\beta = 0.4$
- Delay $\tau = 0.4$ und Treiber $T = 7.14$ mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ für die Störung
- Stärke der Fluktuation $Q = 0.0004$

Bei Einschaltung der Störung synchronisiert der Oszillator mit dem externen Treiber. Dieses Verhalten ist in Abbildung 5.1a und 5.1b für den Fall $Q = 0$ zu erkennen. Die Abbildung 5.1c und 5.1d zeigt die Auswirkungen der Feedback-Kontrolle auf den Grenzzyklus im Phasenraum.

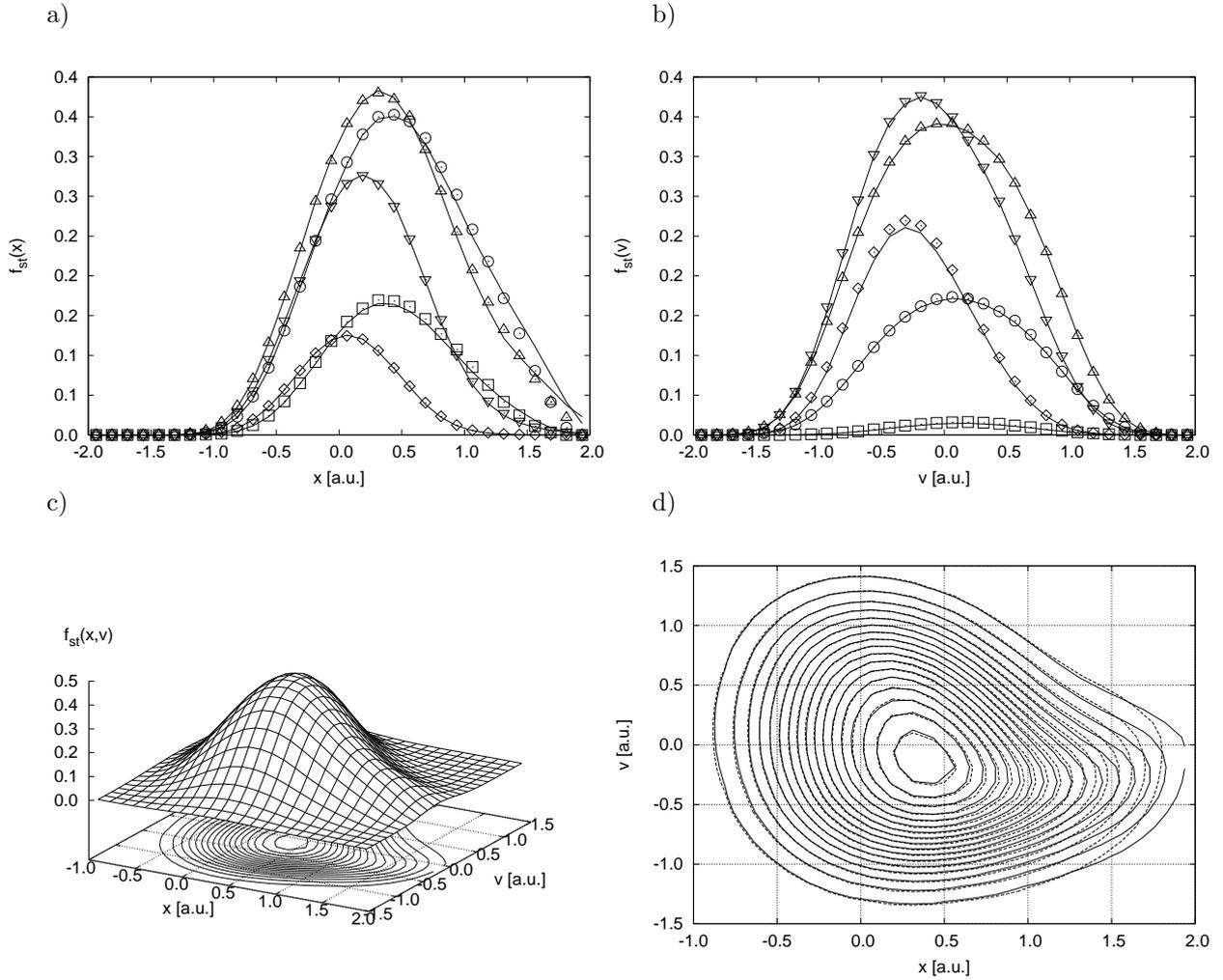


Abbildung 5.2: Test auf Selbstkonsistenz mit reflektiven Rändern bei $|x| = 1.8$ und $|v| = 1.8$ für den gedämpften Oszillator mit der integralen Verteilungsdichte der Zeitreihe:

$$f_{st}(x, v) = \int_0^T dt' f_{st}(x, v, t')$$

a) $f_{st}(x)$ für verschiedene v_i und b) $f_{st}(v)$ für verschiedene x_i (durchgezogene Linie) und der erneuten Simulation (Punkte)
 c) und d) integrale Verteilungsdichte der Zeitreihe und Vergleich der integralen Verteilungsdichten im Konturplot: Zeitreihe (durchgezogene Linie) und Konsistenztest (gestrichelte Linie); der Abstand zweier Höhenlinien beträgt 0.025.

Gedämpfter nichtlinearer Oszillator: $a = -1$

Für den Parameter $a < 0$ befindet sich das System vor einer Hopf-Bifurkation, d.h., es liegt noch kein selbsterregter Oszillator vor, sondern nur eine gedämpfte Oszillation mit einem stabilen Fixpunkt im Ursprung des Phasenraums, wie in Abbildung 5.1d sichtbar wird. Der Grund, weshalb zunächst ein gedämpfter Oszillator betrachtet werden soll, ist, dass der entdämpfte Oszillator bei $a = 1$ mit Delay und Treiber bei großen Rauschstärken $Q \sim 1$ instabil wird.

Zur erfolgreichen Zeitreihenanalyse ist jedoch ein starkes Rauschen unabdingbar, damit der Prozess große Bereiche ohne „Löcher“ im Phasenraum bedeckt. Der stochastisch getriebene gedämpfte Oszillator ($a = -1$) ist in 5.1d abgebildet. Ohne externen Treiber relaxiert dieser auf den stabilen Fixpunkt, also den Nullpunkt. Mit der Störung $\beta = 0.4$ wird der Oszillator auf einen periodischen Orbit gezwungen. Eine zusätzliche stochastische Kraft vergrößert den Bereich im Phasenraum, in dem die Bewegung abläuft. Dabei kommt es zu einer vollständigen Überdeckung mit Datenpunkten im inneren Bereich. Gebiete, die weniger frequentiert werden, kommen z.B. bei instabilen Fixpunkten innerhalb eines Grenzzyklus vor, wie in Abbildung 5.1c für die Fälle ohne Rauschen illustriert.

Es wurden insgesamt zwei Zeitreihen (X_n, V_n) mit jeweils $N = 2 \cdot 10^9$ Werten simuliert. Die Größe des Zeitschritts beträgt $\Delta t = 0.01$. Die Diskretisierung des Phasenraumes wurde mit jeweils 32 Intervallen für die Koordinaten x , y , v , und t unternommen.

Weiterhin werden bei $|x| = 2$ und $|v| = 2$ reflektive Ränder verwendet. Diese sind im gedämpften Fall nicht unbedingt notwendig. Bei der Reflektion muss jedoch darauf geachtet werden, dass sich dadurch das Vorzeichen der Geschwindigkeit ändert.

Mittels des Selbstkonsistenztests in Abbildung 5.2a bis 5.2d werden die Ergebnisse für die Driftterme $h(x, v)$ und $u(y, t)$ und der Diffusion $D^{(2)}(x, v)$ insgesamt erfolgreich verifiziert. Negative Einflüsse auf die Verteilungsdichte aufgrund von Randeffekten treten besonders am rechten Rand in Abbildung 5.2d für x auf. Die Bereiche mit der höchsten Wahrscheinlichkeitsdichte, also diejenigen, die im Zentrum des Phasenraums liegen, zeigen eine sehr gute Überdeckung.

Auf die Darstellung der Diffusion soll verzichtet werden, da diese (wie in den Beispielen in Kapitel 4) lediglich additiv ist. Trotz der x - und v -Unabhängigkeit wird diese orts- und geschwindigkeitsaufgelöst numerisch nach Gleichung (5.9) ermittelt, um den Prozess für den Konsistenztest mit der geschätzten Diffusion simulieren zu können.

Die Schätzungen für die Drift $h(x, v)$ und $u(y, t)$ stimmen sehr gut mit den theoretisch zu erwartenden Termen überein. In Abbildung 5.3 ist eine ausgeprägte Grenze zu erkennen, innerhalb der sich der Großteil der Meßpunkte befindet. Es ist deswegen teilweise sinnvoll für oszillatorische Systeme reflektive Ränder entlang einer Kreisumrandung im x - v -Phasenraum vorzunehmen. Problematischer ist allerdings der vergleichsweise relativ kleine Bereich $-1.5 < x < 1.8$, in

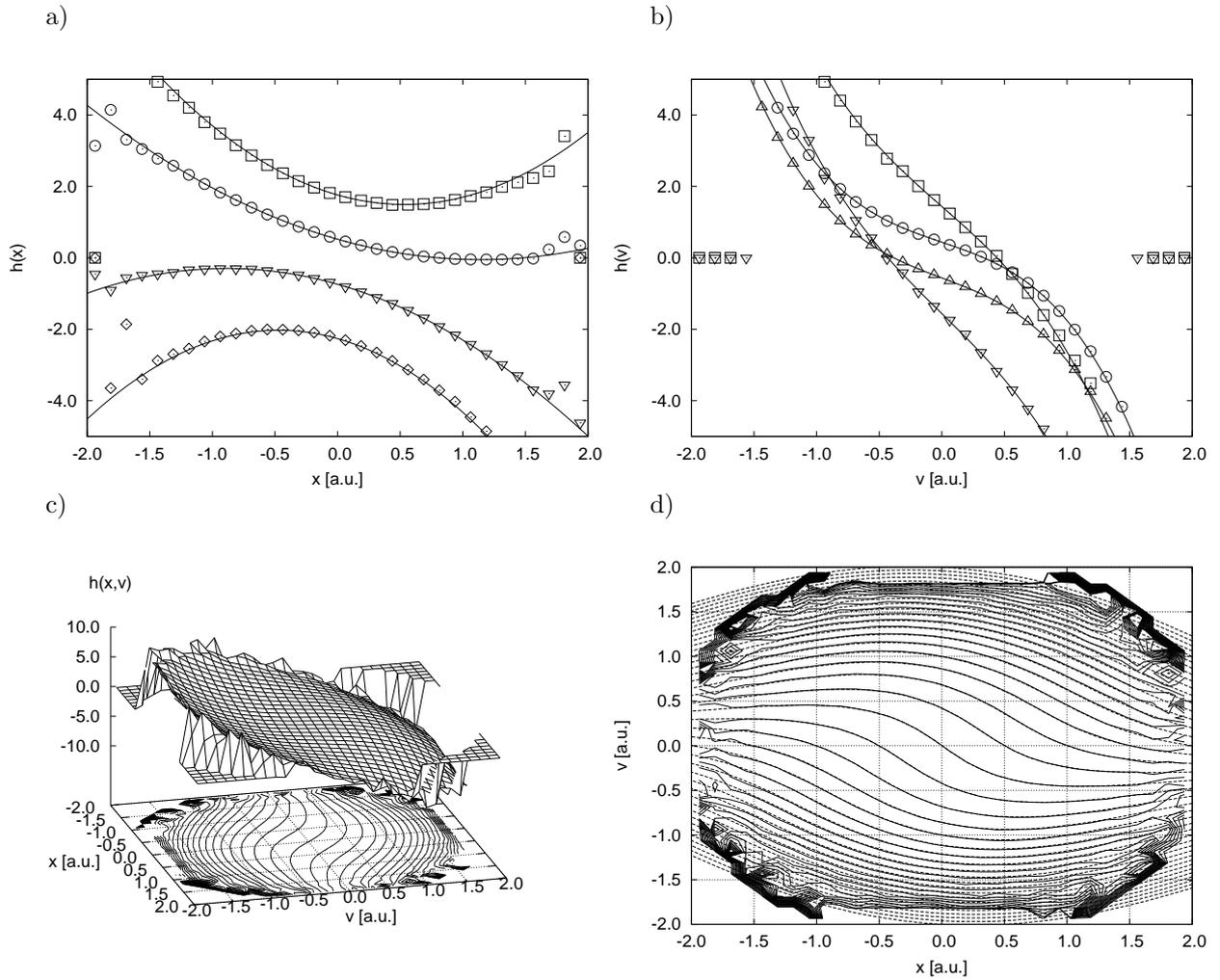


Abbildung 5.3: a) bis d) Darstellung für den x - und v -abhängigen Anteil der Drift $h(x, v)$ des gedämpften Oszillators
 a) $h(x)$ für verschiedene v_i und b) $h(v)$ für verschiedene x_i
 d) Vergleich zwischen Analyse (durchgezogene Linie) und Theorie (gestrichelte Linie) - Abstand zweier Höhenlinien: 0.5

dem eine gute Schätzung für die Drift $u(y, t)$ vorliegt. Aufgrund der schlechten Konvergenz am linken Rand in $u(y, t)$ ist eine Reflektion am Kreisrand nicht sinnvoll. Bei dem Zwei-Schritt-Verfahren gibt die Drift mit dem schlechteren Ergebnis aus der Schätzung die Größe des endlichen Bereiches für den Konsistenztest vor. Daher wird der Konsistenztest auf einem quadratischen Grundgebiet der Größe $[-1.8, 1.8] \times [-1.8, 1.8]$ simuliert.

Bei einer unbekanntenen Drift müsste entweder die Größe des Grundgebietes durch Ausprobieren der Randwerte ermittelt werden – und könnte dann mittels des Ergebnisses aus dem Selbstkonsistenztest verifiziert werden – oder aber es

5.2 Beispiel: Modell für bimanuelle rhythmische Koordination

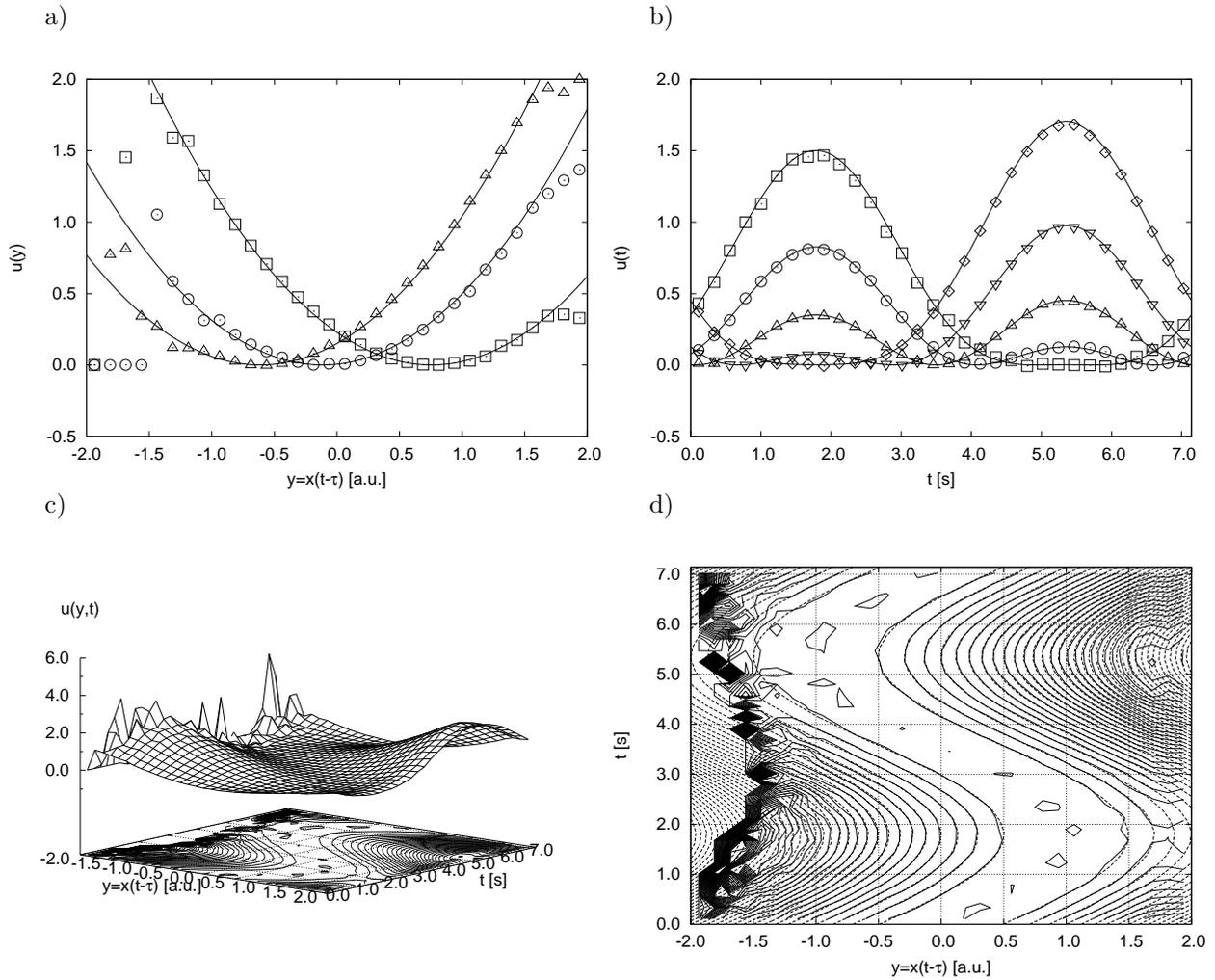


Abbildung 5.4: a) Darstellung der Drift $u(y, t)$ für verschiedene Zeiten t_k
 b) Abhängigkeit der Drift $u(y, t)$ für verschiedene Schnittparameter y_i
 c) Ergebnisse der Schätzung für $u(y, t)$
 d) Vergleich zwischen Analyse (durchgezogene Linie) und Theorie (gestrichelte Linie) - Abstand zweier Höhenlinien: 0.1

müsste eine vollständige Analyse der Verteilungsdichte durchgeführt werden, in diesem Fall also von $f_{st}(x, y, v, t)$ für beide Zeitreihen. Mit der vollständigen Information von $f_{st}(x, y, v, t)$ könnte so auf die Datenmenge im Phasenraum geschlossen werden.

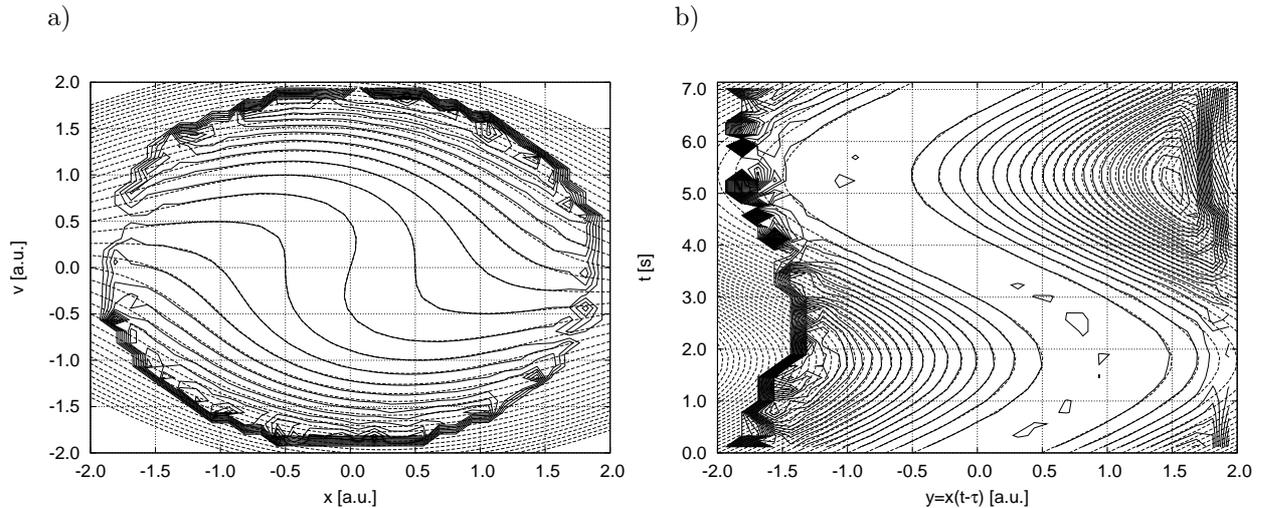


Abbildung 5.5: a) Konturplot für $h(x,v)$ b) Konturplot für $u(y,t)$ für den entdämpften Oszillator
 Analyse (durchgezogene Linie), Theorie (gestrichelte Linie)

Entdämpfter nichtlinearer Oszillator: $a = 0.25$

Als letztes Beispiel soll die Zeitreihenanalyse mittels der Zwei-Schritt-Methode für einen entdämpften Oszillator (5.12) durchgeführt werden. (Siehe dazu die Abbildungen 5.1a bis 5.1c.) Dabei muss darauf geachtet werden, dass beim Einschalten der Störung der Oszillator zum externen Treiber synchronisiert wird (Phase Locking). Die Wahl der Parameter für den Prozess und für die Analyse entspricht im Wesentlichen derjenigen aus dem vorherigen Beispiel. Es wird lediglich der Dämpfungsterm $a = 0.25$ und die Rauschstärke $Q = 0.2$ gewählt. Synchronisation zum Treiber $T_0 = 7.14$ ist für diesen Parametersatz gegeben, da in den Abbildungen 5.1a und 5.1b keine Schwebung der Amplitude vorliegt, sondern eine Frequenzänderung auf die Frequenz der Treiberperiode zu erkennen ist. Eine Schwebung wäre außerdem in 5.1c im Grenzzyklus sichtbar. In Fällen bei denen eine Synchronisation nicht so deutlich in Erscheinung tritt, muss im Zweifelsfall eine Analyse der zeitabhängigen Phasendifferenz zwischen dem Oszillator und dem Treiber unternommen werden.

Die Wahl für eine kleineres a als in [6] wurde aufgrund von Stabilitätsschwierigkeiten getroffen. Eine Begründung könnte darin bestehen, dass zur Simulation ein einfaches Euler-Schema nach Gleichung (2.11) in Kapitel 2 verwendet worden ist. Allerdings ließe sich keine Stabilität durch eine Verkleinerung des Zeitschritts Δt erzwingen. Da eine analytische Behandlung parametrischer SDDGLs sehr anspruchsvoll ist und der Schwerpunkt nicht auf Stabilitätsanalysen von stochastischen Systemen mit Delay liegt, wurde der treibende Term a und eine geeignete *Rauschkraft* aus pragmatischen Gründen empirisch festgelegt.

Damit sich das System nicht aufschaukelt (dies ist unter Umständen denkbar,

wenn ungeeignete Fluktuationen auftreten), werden zur zusätzlichen Absicherung reflektive Ränder bei der Generierung der Zeitreihe berücksichtigt. Dabei ist wichtig, dass die Reflektion im Phasenraum bezüglich Ort und Geschwindigkeit stattfindet und daher zu schnelle Teilchen abgebremst werden.

Das Resultat der Analyse für die Drift $h(x, v)$ sieht man in Abbildung 5.5a, dasjenige für $u(y, t)$ in Abbildung 5.5b. Dass die Qualität der Schätzung sehr gut ist, ist weniger überraschend, da im Vergleich zu der Schätzung für eine dreiparametrische Drift in Kapitel 4 die 64-fache Datenmenge pro Zeitreihe vorhanden ist. Die Qualität für $u(y, t)$ hängt unmittelbar mit der Qualität des aus dem ersten Verfahrensschritt gewonnenen $h(x, v)$ zusammen (5.11). Daher ist es notwendig ein möglichst gutes Ergebnis nach dem ersten Schritt zu erhalten. Der Bereich, in dem die Lösung für $h(x, v)$ konvergiert (vgl. Abb. 5.5a), ist kleiner als im vorherigen Beispiel Abbildung 5.3d, da die Rauschstärke geringer ist. Es treten zusätzlich Bereiche schlechter Konvergenz in $u(y, t)$ im Randbereich für $x > 1.8$ auf (Abb. 5.5b).

Die Abbildung 5.6c zeigt die Verteilungsdichte für den Oszillator mit Störung ($\beta = 0.4$). Die kleine Eindellung in der Mitte deutet darauf hin, dass es sich um einen entdämpften Oszillator handelt, da an dieser Stelle der instabile Fixpunkt liegt. Die Plots 5.6a, 5.6b und 5.6d lassen den Vergleich mit der Verteilungsdichte zu, die aus der gestörten Zeitreihe gewonnen wurde. Im Gegensatz zu dem gedämpften Oszillator sind im entdämpften Fall deutliche Unterschiede zwischen den Verteilungsdichten erkennbar. Die größten Unterschiede werden für $x > 1.5$ deutlich; also gerade in den Bereichen, in denen eine schlechte Konvergenz der Drift $u(y, t)$ vorliegt. Trotz dieser Abweichung konnte das charakteristische Aussehen der Verteilungsdichte rekonstruiert werden. An diesem Beispiel sieht man, dass die Behandlung stochastischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung mehr Schwierigkeiten mit sich bringt als im Falle von Differentialgleichungen erster Ordnung, da diese von Natur aus ein komplexeres Verhalten aufweisen können.

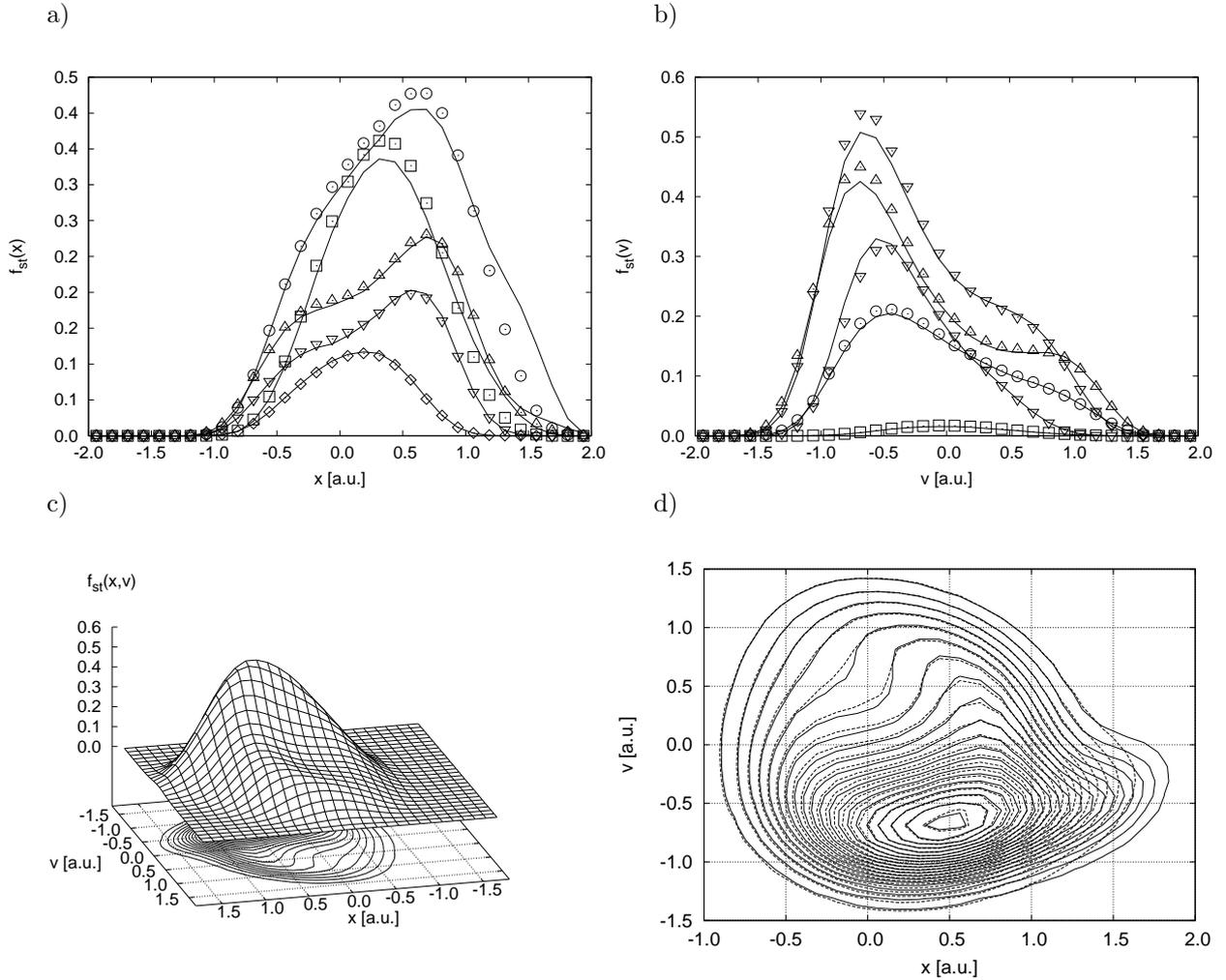


Abbildung 5.6: Test auf Selbstkonsistenz mit reflektiven Rändern bei $|x| = 1.8$ und $|v| = 1.8$ für den endämpften Oszillator mit der integralen Verteilungsdichte der Zeitreihe:

$$f_{st}(x, v) = \int_0^T dt' f_{st}(x, v, t')$$

a) $f_{st}(x)$ für verschiedene v_i und b) $f_{st}(v)$ für verschiedene x_i (durchgezogene Linie) und der erneuten Simulation (Punkte)
 c) und d) integrale Verteilungsdichte der Zeitreihe und Vergleich der integralen Verteilungsdichten im Konturplot: Zeitreihe (durchgezogene Linie) und Konsistenztest (gestrichelte Linie); der Abstand zweier Höhenlinien beträgt 0.025.

6 Zusammenfassung und Ausblick

Ein generelles Verfahren zur Analyse stochastischer Zeitreihen, die durch die Klasse der Langevin-Gleichungen beschrieben werden können, beruht auf der in [14, 15, 50] vorgestellten Methode der Drift-Diffusions-Schätzung. Das Verfahren wurde erstmals in [20] für periodisch getriebene Systeme etabliert. Eine Erweiterung des Analyseverfahrens für zeitlich verzögerte Systeme wurde in [11] präsentiert.

Im Rahmen dieser Arbeit wurde ein Verfahren zur Analyse von solchen Zeitreihen entwickelt, die aus einem stochastischen System mit zeitverzögerter Rückkopplung und periodischem Antrieb hervorgehen.

Eine Verallgemeinerung des Analyseverfahrens auf Systeme mit Delay und Treiber erfolgte durch eine geeignete Kombination der in [20, 11] vorgestellten Methoden.

Weiterhin wurde ein Test auf Selbstkonsistenz implementiert, der eine Verifikation der Ergebnisse aus einer nicht-parametrischen Datenanalyse erlaubt. Schließlich wurde noch eine Erweiterung dieses Analyseverfahrens auf stochastische Systeme zweiter Ordnung mit Feedback-Kontrolle umgesetzt.

Die Kombination aus Analyse und anschließendem Test auf Selbstkonsistenz erzielte in allen Beispielen ein positives Ergebnis. Es konnte also gezeigt werden, dass das Verfahren für stochastische Systeme erster und zweiter Ordnung mit Delay und Treiber funktioniert.

Das prinzipielle Verfahren der Analyse lässt sich außerdem beliebig für andere Systemtypen modifizieren. Zum Beispiel können Systeme mit mehreren Delays unter Berücksichtigung entsprechender Delay-Koordinaten analysiert werden. Oder es lassen sich zeitverzögerte Rückkopplungen für die Geschwindigkeit umsetzen. Theoretisch können so beliebige Fälle bei geeigneter Erweiterung des Phasenraumes analysiert werden.

Das prinzipielle Verfahren beruht auf einer Berechnung der bedingten Momente im erweiterten Phasenraum. Der Phasenraum wurde um eine Delay-Koordinate und um eine Zeitkoordinate vergrößert und muss zur numerischen Umsetzung des Verfahrens diskretisiert werden. Aus den bedingten Momenten lassen sich Drift und Diffusion berechnen, welche eine Formulierung des stochastischen Prozesses über eine Fokker-Planck-Gleichung erlauben. Die Drift entspricht dem deterministischen und die Diffusion dem stochastischen Anteil des Systems. Mit diesen beiden Größen kann einerseits eine Rekonstruktion des stochastischen Prozesses über eine konjugierte Langevin-Gleichung erfolgen, d.h. es können typische Trajektorien des Systems generiert werden. Andererseits ist eine Extraktion einer rein deterministischen Dynamik ohne Einflüsse von Fluktuationen möglich [21].

Da eine möglichst vorurteilsfreie Zeitreihenanalyse erwünscht ist, wird eine Methode benötigt, die ohne zusätzliche Informationen über das System eine Verifikation der Ergebnisse erlaubt. Diese wurde in Kapitel 3 durch die Einführung eines Tests auf Selbstkonsistenz realisiert. Dabei wird die Verteilungsdichte der Zeitreihe mit einer rekonstruierten Verteilungsdichte verglichen.

Die Analyse und der Test auf Selbstkonsistenz wurden erfolgreich in Kapitel 4 an zwei Beispielen demonstriert. Das erste Beispiel enthielt eine additive Kopplung zwischen der Zufallsvariable, dem Delay und dem Antrieb. Der allgemeine Fall einer multiplikativen Kopplung wurde im zweiten Beispiel veranschaulicht. Im Kapitel 5 wurde die Erweiterung der Methode erfolgreich für stochastische Delay-Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Treiber über eine Analyse bivariater Datensätze umgesetzt. Allerdings wurde die Einschränkung gemacht, dass sich der Teil der Drift, in dem Delay und Treiber enthalten sind, additiv separieren lässt. Trotz dieser Einschränkung sind Systeme dieser Form für eine große Klasse von Prozessen mit Feedback-Kontrolle (z.B. in den Bewegungswissenschaften oder der Steuerungstechnik) von Relevanz []. Der Vorteil besteht darin, dass die benötigte Datenmenge mittels der in Kapitel 5 vorgestellten Zwei-Schritt-Methode erheblich reduziert werden kann. Für die Zwei-Schritt-Methode erfolgt eine Auswertung von zwei Zeitreihen: Der eine Datensatz wird ohne Störung aufgenommen und beschreibt ein System ohne Feedback-Kontrolle. Die andere Zeitreihe wird unter Einfluss eines externen Treibers ausgewertet, welche aus einem Prozess mit einer Feedback-Kontrolle gewonnen wird. Mittels der Analyse beider Zeitreihen kann unter Beachtung der Nebenbedingungen die Drift bestimmt werden.

Die Anwendung der Zwei-Schritt-Methode erfolgte in dieser Arbeit für stochastische Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Die Methode lässt sich analog für Systeme erster Ordnung durchführen.

Für eine erfolgreiche Umsetzung des Analyseverfahrens wurde vorausgesetzt, dass es sich bei Delay und Treiber um deterministische Größen handelt. Darüber hinaus müssen die Werte für Delay und Treiber vor der Schätzung bekannt sein. Die Treiberfrequenz kann, wie in Kapitel 3 erläutert wurde, aus dem Spektrum der Zeitreihe gewonnen werden. Die Bestimmung des Time Delays ist im Allgemeinen nicht einfach implementierbar. Ideen zur Bestimmung des Time Delays folgen im Anschluss.

Anhand der Beispiele in Kapitel 4 konnte man erkennen, dass für die Umsetzung des Analyseverfahrens sehr große Datenmengen gebraucht werden, da sich mit zunehmenden Nebenbedingungen in der Schätzung die Dimension des erweiterten Phasenraums erhöht. In den Beispielen wurden Zeitreihen mit 10^9 Zufallsvariablen verwendet. Zeitreihen dieser Länge sind besonders bei der Auswertung experimenteller Datensätze (z.B. aus dem medizinischen Sektor) problematisch, da bei einer Samplingfrequenz von 1kHz eine Messung unter stationären Bedingungen über einen Zeitraum von 12 Tagen erfolgen müsste.

Dieser Aspekt ist besonders für eine vollständige Analyse von stochastischen Delay-Differentialgleichungen zweiter Ordnung entscheidend, da Systeme zweiter Ordnung eine zusätzlich Nebenbedingung und somit eine höhere Dimension im erweiterten Phasenraum aufweisen.

Weitere Probleme können bei Prozessen mit geringen Fluktuationen auftreten. Besonders in multistabilen oder oszillatorischen Systemen können „Löcher“ im Phasenraum entstehen, in denen keine sicheren Ergebnisse vorliegen. In solchen Systemen mißlingt die Ausführung des Tests auf Selbstkonsistenz, wenn Gebiete mit schlechter Konvergenz in dem Bereich des Phasenraums liegen, in dem eine Rekonstruktion des Prozesses stattfinden soll.

Zur Untersuchung experimenteller Datensätze ist eine Optimierung des Verfahrens auf kürzere Zeitreihen sinnvoll. Eine Möglichkeit besteht in der Implementierung einer Analyse mit *Kuhlback-Minimierung*. Dieses Verfahren wurde in [32, 33] erfolgreich für Zeitreihen ohne Delay und Treiber angewandt. Es handelt sich dabei um eine Minimierung des durch das *Kuhlback-Maß* gegebenen Abstandes zweier Verteilungsdichten. Die Abstandsminimierung wird numerisch aus einer JPDF der Zeitreihe und einer JPDF, die aus einem parametrischen Ansatz für Drift und Diffusion resultiert, umgesetzt. Dabei können die in dem Ansatz enthaltenen Parameter durch die eindeutige Minimierung bestimmt werden.

Eine Abstandsminimierung könnte bei einer nicht-parametrischen Datenanalyse bei der Wahl der Randbedingungen für den in Kapitel 3 vorgestellten Test auf Selbstkonsistenz verwendet werden. Die Minimierung erfolgt dann zwischen den Verteilungsdichten der Zeitreihe und der Rekonstruktion.

Ein numerisches Verfahren zur Schätzung des Delays wäre ebenfalls von großem Interesse, um die Analyse von Datensätzen mit unbekannter Delay-Zeit zu ermöglichen. Hierbei wird das Delay in der Analyse als Parameter variiert. Die Qualität der Analyse wird mit dem Abstand der Verteilungsdichten aus dem Konsistenztest gemessen. Das Delay lässt sich nun als Parameter durchstimmen, so dass letztlich durch eine Minimierung des Abstandsmaßes der Wert für das Delay bestimmt werden kann. Mit dieser Methode ist es möglich a priori unbekannte Prozesse zu untersuchen, da kein spezieller Ansatz für die Abstandsminimierung gewählt werden muss.

Da die Rückkopplung in einem dynamischen Prozess auch Teil eines komplexen Systems ist, können prinzipiell Fluktuationen der Form $\tau + \delta\tau(t)$ für das Delay auftreten. Deswegen wäre eine Untersuchung der Auswirkung von fluktuierenden Delays $\delta\tau(t)$ auf die Qualität der Schätzung eine zukünftige Aufgabe.

Literaturverzeichnis

- [1] J. H. Argyris, John H. G. Faust, and M. Haase. *Die Erforschung des Chaos*. Vieweg, Braunschweig, 1995.
- [2] P. J. Beek, W. E. I. Rikkert, and P. C. W. van Wieringen. Limit cycle properties of rhythmic forearm movements. *J. Exp. Psychol. - Hum. Percept. Perform.*, 22:1077–1093, 1996.
- [3] H. U. Bödeker, A.W. Liehr, M. C. Röttger, T. D. Frank, R. Friedrich, and H. G. Purwins. Measuring the interaction law of dissipative solitons. *New J. Phys.*, 6:62, 2004.
- [4] F. Böttcher, J. Peinke, D. Kleinhans, and R. Friedrich. Quantifying noise in complex dynamical systems. In preparation, 2005.
- [5] A. A. Budini and M. O. Caceres. Functional characterization of linear delay Langevin equations. *Phys. Rev. E*, 70:046104, 2004.
- [6] Y. Chen, M. Ding, and J. A. S. Kelso. Long memory processes ($1/f^\alpha$ type) in human coordination. *Phys. Rev. Lett.*, 79:4501–4504, 1997.
- [7] R. V. Culshaw and S. Ruan. A delay-differential equation model of HIV infection of CD4+ T-cells. *Math. Biosciences*, 165:27–39, 2000.
- [8] J. M. Cushing. *Integro-differential equations and delay models in population dynamics*. Springer, Berlin, 1977.
- [9] A. Daffertshofer, C. van den Berg, and P. J. Beek. A dynamical model for mirror movements. *Physica D*, 132:243–266, 1999.
- [10] T. D. Frank. Multivariate Markov processes for stochastic systems with delays: application to the stochastic Gompertz model with delay. *Phys. Rev. E*, 66:011914, 2002.
- [11] T. D. Frank, P. J. Beek, and R. Friedrich. Fokker-Planck perspective on stochastic delay systems: exact solutions and data analysis of biological systems. *Phys. Rev. E*, 68:021912, 2003.
- [12] T. D. Frank, P. J. Beek, and R. Friedrich. Identifying noise sources of time-delayed feedback systems. *Phys. Lett. A*, 328:219–224, 2004.
- [13] T. D. Frank, R. Friedrich, and P. J. Beek. Time series analysis for multivariate time-delayed systems with noise: applications to laser physics and human movements. *Stochastics and Dynamics*, 5:297–306, 2005.

-
- [14] R. Friedrich and J. Peinke. Description of a turbulent cascade by a Fokker-Planck equation. *Phys. Rev. Lett.*, 78:863–866, 1997.
- [15] R. Friedrich and J. Peinke. Statistical properties of a turbulent cascade. *Physica D*, 102:147–155, 1997.
- [16] R. Friedrich, J. Peinke, and Ch. Renner. How to quantify deterministic and random influences on the statistics of the foreign exchange market. *Phys. Rev. Lett.*, 84:5224–5227, 2000.
- [17] R. Friedrich, S. Siegert, J. Peinke, St. Lück, M. Seifert, M. Lindemann, J. Raethjen, G. Deuschl, and G. Pfister. Extracting model equations from experimental data. *Phys. Lett. A*, 271:217–222, 2000.
- [18] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, and F. Marchesoni. Stochastic resonance. *Rev. Mod. Phys.*, 70:223–287, 1998.
- [19] C. W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods*. Springer, Berlin, 2 edition, 1997.
- [20] J. Gradisek, R. Friedrich, E. Govekar, and I. Grabec. Analysis of data from periodically forced stochastic processes. *Phys. Lett. A*, 294:234–238, 2002.
- [21] J. Gradisek, S. Siegert, R. Friedrich, and I. Grabec. Analysis of time series from stochastic processes. *Phys. Rev. E*, 62:3146–3155, 2000.
- [22] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*. Springer, Berlin, 1984.
- [23] H. Haken. *Brain dynamics: Synchronization and Activity Patterns in Pulse-Coupled Neural Nets with Delays and Noise*. Springer, Berlin, 2002.
- [24] H. Haken. *Synergetics: Introduction and Advanced topics*. Springer, Berlin, 2004.
- [25] H. Haken, J. A. S. Kelso, and H. Bunz. A theoretical model of phase transitions in human hand movements. *Biol. Cybern.*, 51:347–356, 1985.
- [26] J. Honerkamp. *Stochastische Dynamische Systeme*. VCH, Weinheim, 1990.
- [27] W. Horbelt, J. Timmer, and H. U. Voss. Parameter estimation in nonlinear delayed feedback systems from noisy data. *Phys. Lett. A*, 299:513–521, 2002.
- [28] N. B. Janson, A. G. Balanov, and E. Schöll. Delayed feedback as a means of control of noise-induced motion. *Phys. Rev. Lett.*, 93:010601, 2004.
- [29] V. K. Jirsa and J. A. S. Kelso. Spatiotemporal pattern formation in neural systems with heterogeneous connection topologies. *Phys. Rev. E*, 62:8462–8465, 2000.
- [30] H. Kantz and T. Schreiber. *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

- [31] J. A. S. Kelso, J. D. DelColle, and G. Schöner. Action-perception as a pattern formation process. In M. Jeannerod, editor, *Attention and performance XIII*, pages 139–169, Hillsdale, New Jersey, 1990. Erlbaum.
- [32] D. Kleinhans. *Analyse stochastischer Prozesse: Eine iterative Methode zur Bestimmung von Drift und Diffusion*. Diplomarbeit, Münster, 2005.
- [33] D. Kleinhans, R. Friedrich, A. Nawroth, and J. Peinke. An iterative procedure for the estimation of drift and diffusion coefficients of langevin processes. *Phys. Lett. A*, 346:42–46, 05.
- [34] U. Kùchler and B. Mensch. Langevin stochastic differential equation extended by a time-delayed term. *Stochastics and stochastic reports*, 40:23–42, 1992.
- [35] Y. Kuramoto. *Chemical oscillations, waves, and turbulence*. Springer, Berlin, 1984.
- [36] T. Kuusela. Stochastic heart-rate model can reveal pathologic cardiac dynamics. *Phys. Rev. E*, 69:31916–, 2004.
- [37] U. Langenberg, H. Hefter, K. R. Kessler, and J. D. Crooke. Sinusoidal forearm tracking with delayed visual feedback: I. dependence of the tracking error on the relative delay. *Exp. Brain Res.*, 118:161–170, 1998.
- [38] A. Longtin, J. G. Milton, J. E. Bos, and M. C. Mackey. Noise and critical behavior of the pupil light reflex at oscillation onset. *Phys. Rev. A*, 41:6992–7005, 1990.
- [39] M. C. Mackey and L. Glass. Oscillations and chaos in physiological control systems. *Science*, 197:287–289, 1977.
- [40] M. C. Mackey and I. G. Nechaeva. Solution moment stability in stochastic differential delay equations. *Phys. Rev. E*, 52:3366–3376, 1995.
- [41] A. Namajunas, K. Pyragas, and A. Tamasevicius. An electronic analog of the Mackey-Glass system. *Phys. Lett. A*, 201:42–46, 1995.
- [42] P. W. Nelson, J. D. Murray, and A. S. Perelson. A model of HIV-1 pathogenesis that includes an intracellular delay. *Math. Biosciences*, 163:201–215, 2000.
- [43] G. Nicolis. *Introduction to nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [44] E. Ott. *Chaos in dynamical systems*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 2002.
- [45] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths. *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*. Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

- [46] C. Renner, J. Peinke, and R. Friedrich. Evidence of Markov properties of high frequency exchange rate data. *Physica A*, 298:499–520, 2001.
- [47] H. Risken. *The Fokker-Planck equation — Methods of solution and applications*. Springer, Berlin, 1989.
- [48] M. Siefert, A. Kittel, R. Friedrich, and J. Peinke. On a quantitative method to analyse dynamical and measurement noise. *Europhysics Letters*, 61:466–472, 2003.
- [49] S. Siegert. *Entwicklung eines Verfahrens zum Schätzen deterministischer und stochastischer dynamischer Strukturen*. Shaker, Aachen, 2001.
- [50] S. Siegert, R. Friedrich, and J. Peinke. Analysis of data sets of stochastic systems. *Phys. Lett. A*, 243:275–280, 1998.
- [51] K. U. Smith. *Delayed sensory feedback and behavior*. W. B. Saunders Company, Philadelphia, 1962.
- [52] G. Stepan. *Retarded dynamical systems: stability and characteristic functions*. Longman Scientific & Technical, New York, 1989.
- [53] P. Tass, J. Kurths, M. G. Rosenblum, G. Guasti, and H. Hefter. Delay-induced transitions in visually guided movements. *Phys. Rev. E*, 54:R2224–R2227, 1996.
- [54] P. Tass, A. Wunderlin, and M. Schanz. A theoretical model of sinusoidal forearm tracking with delayed visual feedback. *J. Biol. Phys.*, 21:83–112, 1995.
- [55] P. A. Tass. *Phase Resetting in Medicine and Biology: Stochastic Modelling and Data Analysis*. Shaker, Aachen, 2001.
- [56] V. van den Berg, P. J. Beek, R. C. Wagenaar, and P. C. W. van Wieringen. Coordination disorders in patients with Parkinson’s disease: a study of paced rhythmic forearm movements. *Exp. Brain Res.*, 134:174–186, 2000.
- [57] K. Vasilakov and A. Beuter. Effects of noise on a delayed visual feedback system. *J. Theo. Biol.*, 165:389–407, 1993.
- [58] K. Wiesenfeld and F. Moss. Stochastic resonance and the benefits of noise: From ice ages to crayfish and squids. *Nature*, 373:33–36, 1995.

Danksagung

Ich möchte mich an dieser Stelle bei all denjenigen bedanken, die mich während der Diplomarbeit unterstützt haben.

Dabei möchte ich mich an erster Stelle bei Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die interessante Themenstellung und die freundliche Betreuung bedanken.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Till D. Frank für die gute Betreuung und Einführung in das Themengebiet. Bei Fragen konnte er mir stets schnell und kompetent helfen.

Herrn Professor P.J. Beek danke ich für finanzielle Unterstützung, die ich im Rahmen des Drittmittelprojekts "Physics of Human Movements - Deterministic and Stochastic Properties of Human Movement" erhalten habe.

Ich bin Oliver Kamps sehr dankbar für die konstruktive Kritik beim Schreiben dieser Arbeit und für die Beantwortung unzähliger Fragen physikalischer Natur, die er mir jederzeit geduldig und sehr anschaulich beantworten konnte. Desweiteren bedanke ich mich herzlich bei Susanne Zeglin und Doris Reiter, die viel Zeit mit der Fehlerkorrektur meiner Diplomarbeit – ...und ich mache viele Fehler ;) – verbracht und mir dadurch sehr geholfen haben.

Ich möchte mich ebenfalls sehr bei Holger Zimmermann und Lars Lühning, Susanne Zeglin, Doris Reiter und Sabine Körbel für die schöne Studienzeit bedanken. Sie waren immer gute und verlässliche Freunde mit denen ich das Physikstudium erfolgreich bestreiten konnte.

Danken möchte ich auch allen anderen Mitgliedern der Arbeitsgruppe für die sehr angenehme und freundliche Atmosphäre.

Besonders möchte ich mich bei meinen Eltern und meiner Familie für die moralische und finanzielle Unterstützung während meiner gesamten Studienzeit bedanken.

Erklärung zur Diplomarbeit

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und außer den angegebenen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den