

# Drei Punktwirbel im Inertialbereich

als Diplomarbeit vorgelegt von

Golo Strickmann

22. Juli 2012



Westfälische Wilhelms-Universität Münster



# Inhaltsverzeichnis

<b>0. Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>1. Theoretische Grundlagen</b>	<b>5</b>
1.1. Hydrodynamik . . . . .	5
1.1.1. Grundgleichungen . . . . .	5
1.1.2. Reynolds-Zahl . . . . .	6
1.1.3. Zweidimensionale Wirbeldynamik . . . . .	6
1.1.4. Punktwirbeldynamik . . . . .	7
1.1.5. Dynamik von drei Punktwirbeln . . . . .	9
1.2. Stochastik . . . . .	12
1.2.1. Zufallsvariable . . . . .	12
1.2.2. Verteilungsfunktion . . . . .	12
1.2.3. Erwartungswerte . . . . .	13
1.2.4. Verbundwahrscheinlichkeit . . . . .	13
1.2.5. Zentraler Grenzwertsatz . . . . .	14
1.3. Stochastische Prozesse . . . . .	14
1.3.1. Langevin-Gleichung . . . . .	14
1.3.2. Fokker-Planck-Gleichung . . . . .	15
1.4. Stochastische Felder . . . . .	17
1.5. Stochastische Hydrodynamik . . . . .	17
1.5.1. Die Notwendigkeit einer stochastischen Beschreibung . . . . .	17
1.5.2. Kohärente Strukturen und turbulente Längenskalen . . . . .	18
1.5.3. Inkremente und Strukturfunktionen . . . . .	19
1.5.4. Selbstähnlichkeit . . . . .	20
1.5.5. Intermittenz und anomale Skalierung . . . . .	20
<b>2. Stochastische Drei-Punktwirbel-Dynamik</b>	<b>22</b>
2.1. Deterministische Punktwirbeldynamik in Relativkoordinaten . . . . .	22
2.2. Stochastische Punktwirbeldynamik . . . . .	22
2.3. Transformation auf Abstandskordinaten . . . . .	24
2.4. Festlegung der Diffusion . . . . .	31
2.4.1. Diffusionsmatrix und Fluktuationen . . . . .	31
2.4.2. Additives Rauschen . . . . .	33
2.4.3. Dynamik im Kraichnan-Feld . . . . .	34
2.5. Koordinatentransformation nach U . . . . .	36
2.5.1. Transformation . . . . .	36
2.5.2. Explizite Transformation . . . . .	38
2.5.3. Fazit . . . . .	39
<b>3. Diskussion der Dynamik</b>	<b>41</b>

3.1. Deterministische Drift . . . . .	41
3.2. Rauschinduzierte Drift . . . . .	45
3.2.1. Rauschinduzierte Drift bei additivem Rauschen . . . . .	45
3.2.2. Rauschinduzierte Drift im Kraichnan-Feld . . . . .	47
3.2.3. Fazit der Betrachtungen der Drift . . . . .	49
3.3. Grenzfall großer Dreiecke . . . . .	50
3.3.1. Fluktuation des Umfangs bei additivem Rauschen . . . . .	50
3.3.2. Fluktuation des Umfangs im Kraichnan-Feld . . . . .	51
3.3.3. Fazit . . . . .	52
<b>4. Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>53</b>
<b>A. Eigenschaften der Deltafunktion</b>	<b>54</b>
A.1. Definition . . . . .	54
A.2. Eigenschaften . . . . .	54
A.3. Ableitung . . . . .	55
A.3.1. Ableitung der Deltafunktion . . . . .	55
A.3.2. Ableiten nach anderen Argumenten . . . . .	55
<b>B. Zusatzmaterialien</b>	<b>56</b>
B.1. CD . . . . .	56

# 0. Einleitung

Wohin man auch geht, überall begegnet man Turbulenz. Das liegt nicht nur daran, dass die Umgebungsluft beim Durchschreiten aufgewirbelt wird. Es gibt zahlreiche andere Beispiele für die Allgegenwärtigkeit von Turbulenz. Die Druckschwankungen, die das Flugzeug erschüttern, sind wohl das bekannteste Beispiel. Ein weiteres schönes Beispiel ist die Bewegung in der Kaffeetasse, die besonders gut zu beobachten ist, nachdem man eine Portion Sahne hinzugegeben hat. Hier wird der Effekt der turbulenten Diffusion deutlich: Durch die Advektion ist das Durchmischungsverhalten im Vergleich zur molekularen Diffusion wesentlich gesteigert. Dieser Effekt ist beispielsweise in Verbrennungsmotoren erwünscht, wo ein möglichst homogenes Gemisch aus Luft und Treibstoff das günstigste Resultat liefert: eine Verbrennung mit möglichst wenigen Rückständen. Von dieser Warte aus gesehen wäre es äußerst wünschenswert, auf eine Theorie der Turbulenz Zugriff zu haben, um im Hinblick auf eine Idealisierung von solchen Durchmischungsvorgängen nicht bei jeder Änderung der beteiligten Größen - wie etwa die Form der Verbrennungskammer oder die spezifischen Eigenschaften des Treibstoffs - auf Simulationen zurückgreifen zu müssen. Eine weitere Eigenschaft turbulenter Systeme wird ersichtlich, wenn man sich Abbildung 0.1 anschaut. Es verdeutlicht die Komplexität, die den

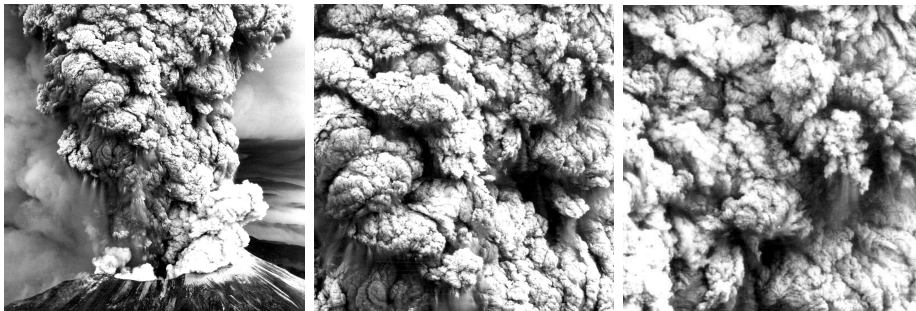


Abbildung 0.1.: Der Vulkan Mount St. Helens bei seinem Ausbruch am 18.Mai 1980. Das Foto stammt von [vulcan.wr.usgs.gov/Volcanoes/MSH/Images/may18\\_images.html](http://vulcan.wr.usgs.gov/Volcanoes/MSH/Images/may18_images.html)

räumlichen Strukturen innewohnt. Zweifelsohne lässt sich die Struktur nicht anhand weniger Größen beschreiben. Wenn wir in das Bild hereinzoomen (in der Abbildung von links nach rechts um den Faktor 2), fällt sofort die Ähnlichkeit, die die Strukturen verschiedener Größe besitzen, ins Auge. Dieses Phänomen wird Selbstähnlichkeit genannt und ist eine allgemeine Eigenschaft turbulenter Systeme.

Die ersten bekannten Aufzeichnungen der Studien turbulenter Systeme stammen aus einem Skizzenbuch des Leonardo Da Vinci. Er verglich die Strömung eines Wasserlaufs mit der Struktur lockiger Haare: Die Strömung setze sich zusammen aus dem Hauptstrom und den wirbelartigen Einflüssen von reflektierten Bewegungen. Man könnte also behaupten, dass sich die Menschheit seit mindestens 500 Jahren wissenschaftlich mit Turbulenz beschäftigt. Dennoch gibt es keine eindeutige Definition, was Turbulenz eigentlich ist. Häufig versucht man den Begriff zu definieren, indem seine wichtigsten Eigenschaften beschrieben werden. Das wollen wir an dieser Stelle auch tun.

Turbulenz ist der Zustand eines Fluids fern vom thermodynamischen Gleichgewicht, welcher folgende Eigenschaften zeigt:

- Es bilden sich selbstähnliche Strukturen (Wirbel) über einen großen Bereich räumlicher Skalen aus.
- Das Durchmischungsverhalten von Energie, Impuls und Masse ist im Vergleich zur molekularen Diffusion sehr hoch.
- Das Verhalten ist in Raum und Zeit komplex, so dass genaue Vorhersagen unmöglich werden.
- Es können trotzdem statistische Aussagen getroffen werden.

Vor nunmehr fast zweihundert Jahren veröffentlichten C.L.M.H. Navier [Nav22] und G.G. Stokes [Sto44] unabhängig voneinander die nach ihnen benannte Navier-Stokes-Gleichung, die seither als Grundstein der Fluidodynamik angesehen wird. Bis heute ist es nicht gelungen, eine geschlossene Theorie der Turbulenz aus dieser Gleichung herzuleiten. Das liegt an ihrer hohen Komplexität. Der nichtlineare Advektionsterm hat zur Folge, dass kleine Einflüsse überproportional große Wirkungen erzeugen können. Des Weiteren ist die Gleichung nichtlokal, so dass das Verhalten eines Bereichs von dem gesamten Raum beeinflusst wird.

Es gibt Theorien, die verschiedenen Eigenschaften von turbulenten Strömungen erklären, jedoch beruhen sie auf phänomenologischen Erkenntnissen und es ist noch nicht gelungen, sie aus der Grundgleichung herzuleiten.

Auf L.F. Richardsons [Ric22] Erkenntnis, dass das turbulente System eine Komposition von Wirbelstrukturen ist, die durch Instabilitäten die Energie in einem Kaskadenprozess von großen zu kleinen Skalen transportieren, baute A.N. Kolmogorov 1941 seine Theorie der Turbulenz auf. Die Ergebnisse Kolmogorovs [Kol41b, Kol41a] Überlegungen werden oft mit K41 abgekürzt. Es gilt heute als gesichert, dass die Skaleninvarianz innerhalb des inertialen Bereichs, die Kolmogorov postulierte, nur näherungsweise erfüllt ist.

Das in Raum und Zeit irreguläre Verhalten des Geschwindigkeitsfeldes, das durch die Nichtlinearität der Navier-Stokes-Gleichung hervorgerufen wird und damit die hohe Zahl an miteinander koppelnden Freiheitsgraden motivieren eine statistische Behandlung des Problems, die bereits Ende des 19. Jahrhunderts von O. Reynolds [Rey83] angegangen wurde. Die Reynoldsgleichung geht aus

---

einer statistischen Mittelung der Navier-Stokes-Gleichung hervor und formuliert die Dynamik anhand von Mittelwerten und Fluktuationen. In die Evolution der Einpunktkorrelationen gehen dabei die Zweipunktkorrelationen ein, für deren Berechnung die Dreipunktkorrelationen benötigt werden (usw.). Dieses hierarchische, unendliche Gleichungssystem konvergiert nicht (in dem Sinne, dass die höheren Terme sukzessive kleinere Beiträge liefern) und die Suche nach geeigneten Abbruchbedingungen wird als Schließungsproblem der Turbulenz bezeichnet.

Man beobachtet auch eine Reduktion der Freiheitsgrade durch die Emergenz von Wirbelstrukturen. Damit ist Turbulenz eine Hybris aus Chaos und Ordnung.

Wir beschäftigen uns in dieser Diplomarbeit mit zweidimensionaler Turbulenz. Diese kommt in der Natur nicht exakt vor, dennoch gibt es Systeme, in denen eine Dimension so stark eingeschränkt ist, dass sie als annähernd zweidimensional betrachtet werden kann. Die Atmosphäre ist wohl das prominenteste Beispiel. Man erhofft sich durch die Beschäftigung mit zweidimensionalen Problemen einen Einblick in das höherdimensionale Gebiet, in dem es eingebettet ist, zu erlangen, geht Ersteres doch als Spezialfall aus Letzterem hervor. Zweidimensionale Turbulenz enthält, wie es oft bei dimensionsreduzierten Systemen vorkommt, auch völlig neue Eigenschaften. Insbesondere ist hier die inverse Energiekaskade zu nennen. Im Gegensatz zum dreidimensionalen Fall wird die Energie hier nicht zu kleineren Skalen, sondern zu größeren Skalen transportiert. Weil der Wirbelstreckungsterm, der in drei Dimensionen für die Elongation der Wirbelfilamente verantwortlich ist, verschwindet, zerfallen die Strukturen nicht, sondern wachsen an. Das erklärt, warum sich Wirbelstrukturen überhaupt bilden und auch, warum seit dreihundert Jahren ein gigantischer Wirbelsturm über den Jupiter fegen kann (siehe Abbildung 0.2).



Abbildung 0.2.: Der rote Fleck. Das Foto stammt von [pds.jpl.nasa.gov/planets/captions/jupiter/febgrs.htm](http://pds.jpl.nasa.gov/planets/captions/jupiter/febgrs.htm)

In dieser Arbeit verwenden wir eine Methode, die erstmals von Chorin (siehe [Kev05]) verwendet wurde. Der Einfluss der Viskosität des turbulenten Feldes wird mittels stochastischer Kräfte erzeugt. Es ist bekannt, dass Punktwirbel

Lösungen der Eulergleichung, dem nichtviskosen Pendant der Navier-Stokes-Gleichung, sind. Eine Ansammlung von interagierenden Punktwirbeln ist ein konservatives System. Die Trajektorien im Phasenraum sind durch konstante Werte der Hamiltonfunktion festgelegt. Die durch stochastische Kräfte simulierte Viskosität stört die Hamiltonische Dynamik und “stubst” das System von den festgelegten Trajektorien. Argullo und Verga [AV97],[AV01] haben die Verschmelzung zweier Wirbel untersucht und eine analytische Lösung der probabilistischen Repräsentation der viskosen Navier-Stokes-Gleichung zweier Wirbel erhalten. Zhu [ZC10] hat das Drei-Punktwirbel-System unter dem Einfluss stochastischer Kräfte mit besonderem Augenmerk auf den selbstähnlichen Kollaps der Wirbel untersucht. Alle diese Arbeiten behandelten das System unter dem Einfluss von additivem Rauschen. M. Rath [Rat10] hat sich mit dem Zwei-Wirbel-System mit modifiziertem Geschwindigkeitsprofil unter dem Einfluss räumlicher Korellationen beschäftigt. Wir untersuchen in dieser Arbeit das System von drei Punktwirbeln mit räumlichen Korellationen, welche den Spezialfall des Brownschen Rauschens enthält.

Die Arbeit ist in drei Teile gegliedert. Zunächst stellen wir in Kapitel 1 die Grundlagen bereit, auf die im Späteren zurückgegriffen wird. Das folgende Kapitel ist der Herleitung der Fokker-Planck-Gleichung für das System dreier Punktwirbel im turbulenten Feld gewidmet, welche anschließend in Kapitel 3 diskutiert wird.



# 1. Theoretische Grundlagen

## 1.1. Hydrodynamik

In diesem Abschnitt werden einige mathematische Aspekte der Hydrodynamik beleuchtet. Dabei beschränken wir uns auf den Teil, der für diese Diplomarbeit relevant ist und orientieren uns stark an J. H. Argyris, G. Faust, M. Haase und R. Friedrich [AFHF10].

### 1.1.1. Grundgleichungen

Das Verhalten des Geschwindigkeitsfeldes eines Fluids wird durch die **Navier-Stokes-Gleichung**<sup>1</sup> (NSG) beschrieben. Sie ist eine Bilanzgleichung für die Impulsdichte und ergibt sich, wenn man Newtons *lex secunda* auf ein infinitesimales Volumenelement anwendet. Für ein inkompressibles Fluid der Dichte Eins lautet sie

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.1)$$

Dabei ist  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  das von Ort und Zeit abhängige Geschwindigkeitsfeld. Auf der linken Handseite der Gleichung steht die substantielle Ableitung der Geschwindigkeit, auf der rechten Handseite stehen die Kräfte, die die Bewegungsänderung verursachen.  $p$  ist der Druck,  $\nu$  die kinematische Viskosität und externe Kräfte werden als  $\mathbf{f}_{\text{ext}}$  bezeichnet. Sie sind im Falle der voll entwickelten Turbulenz erforderlich, um die durch die Viskosität verloren gegangene Energie auszugleichen. In drei Dimensionen wird dem System auf großen Skalen Energie zugeführt und zu kleineren Skalen transportiert, wo es schließlich durch die Viskosität auf intermolekularer Skala in Wärme umgewandelt wird und das System verlässt.

Aus der Massenerhaltung bei homogener Dichte folgt die Inkompressibilitätsbedingung

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.2)$$

Damit haben wir vier Gleichungen (1.1) und (1.2) für die vier unbekanntenen Variablen  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  und  $p(\mathbf{x}, t)$ . Das heißt aber nicht, dass eine Lösung existiert oder eindeutig ist<sup>2</sup>.

Bildet man die Rotation der Geschwindigkeit

$$\nabla \times \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t), \quad (1.3)$$

---

<sup>1</sup>Man sollte eigentlich von Navier-Stokes-Gleichungen sprechen, insbesondere weil die Inkompressibilitätsbedingung (1.2) das Gleichungssystem (1.1) erst komplettiert.

<sup>2</sup>“Die Analyse von Existenz und Regularität von Lösungen der dreidimensionalen inkompressiblen Navier-Stokes-Gleichungen” ist eines der “Millenniumprobleme” des Clay Mathematics Institute. (<http://www.claymath.org/millennium/>)

so erhält man die Größe  $\boldsymbol{\omega}$ , die als **Vortizität** oder Wirbelstärke bekannt ist.

Die Gleichungen (1.2) und (1.3) erinnern an die Grundgleichungen der Magnetostatik, wobei  $\mathbf{u}$  die magnetische Induktion und  $\boldsymbol{\omega}$  die Stromdichte repräsentieren. Demnach ist das Geschwindigkeitsfeld durch das Biot-Savart-Gesetz

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}', t) \times \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (1.4)$$

bis auf eine Potentialströmung eindeutig festgelegt, wobei  $\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \nabla G(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  ist.  $G$  bezeichnet die Greensche Funktion des Laplace-Operators und erfüllt per Definition  $\Delta G(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$ .

Nach Anwendung der Rotation auf Gleichung (1.1) ergibt sich die **Wirbeltransportgleichung** als Evolutionsgleichung für die Wirbelstärke

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \right) \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) = \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) + \nabla \times \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t). \quad (1.5)$$

### 1.1.2. Reynolds-Zahl

Wenn wir die NSG (1.1) auf charakteristische Längen-, Geschwindigkeits- und Zeitskalen  $L$ ,  $U$  und  $T = \frac{L}{U}$  transformieren, erhalten wir eine dimensionslose Gleichung, die es uns ermöglicht, das Verhalten verschiendenskaliger Strömungen zu vergleichen. Die Gleichung in den dimensionslosen Größen lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\nabla p(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) + \mathbf{f}_{\text{ext}}(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

mit der Reynolds-Zahl

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (1.7)$$

Strömungen mit gleicher Reynolds-Zahl verhalten sich gleich. Das ist der Grund dafür, dass z.B. Simulationen zum Strömungsverhalten von Schiffen im Labor durchgeführt werden und auf reale Schiffe durch Skalierung der entsprechenden Größen übertragen werden können. Man spricht in diesem Zusammenhang vom Ähnlichkeitsprinzip.

Die Reynolds-Zahl kann auch als das Verhältnis vom nichtlinearen konvektiven  $\sim U/T = U^2/L$  zum glättenden dissipativem Teil  $\sim \nu U/L^2$  der NSG aufgefasst werden und ist daher ein Maß für die Stärke der Turbulenz. Bei großer Reynolds-Zahl dominiert der nichtlineare Term und die Strömung verhält sich turbulent, bei kleiner Reynolds-Zahl dominiert der glättende Part und die Strömung ist laminar.

### 1.1.3. Zweidimensionale Wirbeldynamik

Streng genommen kann man zweidimensionale Turbulenz in der Natur oder im Labor nicht beobachten. Sie kann nur in Computersimulationen erzeugt werden. Nichtsdestoweniger ist es interessant, sich mit ihr zu beschäftigen; ist sie doch der Grenzfall von Systemen, in denen eine Dimension stark eingeschränkt

ist. Weiterhin treten qualitativ neue Effekte zutage. Insbesondere zu erwähnen ist hier die **inverse Kaskade**, welche die Energie im Gegensatz zur direkten Kaskade in drei Dimensionen von kleinen hin zu größeren Skalen transportiert. Das heißt also, dass sich in zwei Dimensionen die Tendenz beobachten lässt, dass sich großskalige Strukturen bilden; ein Beispiel für Selbstorganisation.

In zwei Dimensionen besitzt die Vortizität nur eine Komponente senkrecht zur Ebene (hier in  $z$ -Richtung), so dass der sog. Wirbelstreckungsterm

$$\boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \omega_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{u}(x, y, t) = 0$$

verschwindet.

Im nichtviskosen Fall ( $\nu = 0$ ) und unter der weiteren Annahme rotationsfreier externer Kräfte<sup>3</sup> reduziert sich (1.5) auf

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla \omega(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (1.8)$$

Der nichtlineare und nichtlokale Charakter dieser Wirbeltransportgleichung befindet sich in dem Geschwindigkeitsfeld  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , das durch Integration über das gesamte Volumen gemäß (1.4) ermittelt werden muss.

#### 1.1.4. Punktwirbeldynamik

An Gleichung (1.8) sieht man, dass die Wirbelstärke eines mitbewegten Fluid-elements zeitlich konstant ist. Betrachten wir nun wenige kleine Bereiche mit nichtverschwindender Viskosität (Wirbel), die weit voneinander entfernt sind und einen vergleichsweise geringen Durchmesser besitzen, so spielt die Gestalt der Wirbel eine vernachlässigbar kleine Rolle. Die Bereiche zwischen den Wirbeln bleiben wirbelfrei. Lassen wir die Wirbeldurchmesser immer kleiner werden, erhalten wir im Grenzfall ein Feld mit wenigen deltaförmigen Wirbeln, den sogenannten **Punktwirbeln**. Die Selbstwechselwirkung spielt in der Punktwirbeldynamik keine Rolle und die Dynamik eines Wirbels wird allein durch die Wirkung der anderen Wirbel verursacht. Die Stärke eines Wirbels wird durch die Zirkulation  $\Gamma$  quantifiziert.

Setzen wir die deltaförmige Verteilung der Wirbel

$$\omega(\mathbf{x}, t) = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i(t)) \quad (1.9)$$

in Gleichung (1.8) ein, ergibt sich

$$0 = \sum_{i=1}^n \Gamma_i \left[ -\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) \right] \nabla_{\mathbf{x}} \delta(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}). \quad (1.10)$$

Um diese Gleichung immer zu erfüllen, muss der Ausdruck in der eckigen Klammer für alle  $i$  verschwinden.

<sup>3</sup>In vollentwickelter Turbulenz (siehe Abschnitt 1.5.2) gelten diese beiden Annahmen.

## 1. Theoretische Grundlagen

---

Unter der Voraussetzung, dass die Punktwirbel nicht kollidieren, was durchaus vorkommen kann (Selbstähnlicher Kollaps), bedeutet das, dass die Punktwirbel dem Geschwindigkeitsfeld wie masselose Teilchen folgen

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t). \quad (1.11)$$

Für unendlich ausgedehnte Felder in zwei Dimensionen besitzt der Kern der Green'schen Funktion folgende Gestalt

$$\mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2}. \quad (1.12)$$

Damit erhalten wir aus dem Biot-Savart-Gesetz (1.4) das Geschwindigkeitsfeld

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2\pi} \int d\mathbf{x}' \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \omega(\mathbf{x}', t). \quad (1.13)$$

Ein Einsetzen des Wirbelfeldes (1.9) führt auf ein System aus Differentialgleichungen, das die Dynamik der Punktwirbel beschreibt

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}_i(t) = \mathbf{u}(\mathbf{x}_i, t) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\Gamma_j}{2\pi} \mathbf{e}_z \times \frac{\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)}{|\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{x}_j(t)|^2}. \quad (1.14)$$

Im Hinblick auf die Dynamik von drei Punktwirbeln ist es sinnvoll, die Änderung der Quadrate der Abstände  $L_{ij} = |\mathbf{r}_{ij}| = |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  zweier Punktwirbel zu betrachten

$$\frac{d}{dt} L_{ij}^2 = 2\dot{\mathbf{r}}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} = \frac{1}{\pi} \sum_{k \neq i, \neq j} \Gamma_k \left[ \mathbf{e}_z \times \left( \frac{\mathbf{r}_{ik}}{L_{ik}^2} - \frac{\mathbf{r}_{jk}}{L_{jk}^2} \right) \right] \cdot \mathbf{r}_{ij}. \quad (1.15)$$

Nach kurzer Umformung erhalten wir

$$\frac{d}{dt} L_{ij}^2 = \sum_{k \neq i, \neq j} \Gamma_k \sigma_{ijk} L_{ij}^2 [L_{ki}^2 - L_{jk}^2], \quad (1.16)$$

wobei  $\sigma_{ijk}$  mit dem orientierten Flächenelement  $A_{ijk} = \frac{1}{2} \mathbf{e}_z \cdot (\mathbf{r}_{ij} \times \mathbf{r}_{ik})$  des Dreiecks, das durch die Wirbel  $i, j$  und  $k$  aufgespannt wird, verknüpft ist.

$$\sigma_{ijk} = \frac{2}{\pi} \frac{A_{ijk}}{L_{ij}^2 L_{jk}^2 L_{ki}^2} \quad (1.17)$$

Die Grundlage der Punktwirbeldynamik ist die Eulergleichung (1.8), daher ist zu erwarten, dass die Energie des Systems konstant ist. In der Tat lässt sich die Hamiltonfunktion des Systems angeben

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{i,j:i \neq j} \Gamma_i \ln |\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j| \Gamma_j. \quad (1.18)$$

Die kanonischen Bewegungsgleichungen lauten

$$\begin{aligned} \Gamma_j \frac{dx_j}{dt} &= \frac{\partial H}{\partial y_j} \\ \Gamma_j \frac{dy_j}{dt} &= -\frac{\partial H}{\partial x_j}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

### 1.1.5. Dynamik von drei Punktwirbeln

Die Dynamik (1.14) dreier Punktwirbel

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{x}_1 &= \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2} + \frac{\Gamma_3}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3|^2} \right] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{x}_2 &= \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_3}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3|^2} + \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|^2} \right] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{x}_3 &= \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_1}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1|^2} + \frac{\Gamma_2}{2\pi} \frac{\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2|^2} \right]\end{aligned}\quad (1.20)$$

kann, wenn man nur an der relativen Position der Wirbel interessiert ist, um zwei Freiheitsgrade vermindert werden. Drei Punktwirbel bilden ein Dreieck, das durch seine Seitenlängen eindeutig charakterisiert werden kann. Die Dynamik kann besonders elegant in Einheiten der Quadrate der Seitenlängen  $L_i = L_{jk}^2$  ausgedrückt werden

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L_1 &= \Gamma_1 \sigma L_1 (L_2 - L_3) \\ \frac{d}{dt}L_2 &= \Gamma_2 \sigma L_2 (L_3 - L_1) \\ \frac{d}{dt}L_3 &= \Gamma_3 \sigma L_3 (L_1 - L_2) .\end{aligned}\quad (1.21)$$

Der verbleibende Freiheitsgrad "versteckt" sich in  $\sigma = \sigma_{123}$ , das mit dem orientierten Flächenelement des Dreiecks verknüpft ist. Dieses ändert sein Vorzeichen, wenn zwei Wirbel die Position tauschen. Daher ist eine vollständige Beschreibung der Dynamik des Dreiecks anhand der Seitenlängen nur möglich, wenn keine kollinearen Übergänge stattfinden, wenn also die Orientierung des Dreiecks eine Konstante der Bewegung ist.

Aufgrund der zyklischen Symmetrie der Gleichungen lassen sich zwei weitere Konstanten der Bewegung finden

$$I = \frac{L_1}{\Gamma_1} + \frac{L_2}{\Gamma_2} + \frac{L_3}{\Gamma_3} \quad (1.22)$$

$$J = \frac{\ln L_1}{\Gamma_1} + \frac{\ln L_2}{\Gamma_2} + \frac{\ln L_3}{\Gamma_3} , \quad (1.23)$$

wobei

$$J = -\frac{4\pi}{\Gamma_1 \Gamma_2 \Gamma_3} H \quad (1.24)$$

mit der Hamiltonfunktion des Systems (1.18) verknüpft ist. Das (eingeschränkte) Drei-Punktwirbel-System ist also im Prinzip integrierbar.

Die Gleichungen (1.21) offenbaren uns die stationäre Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks  $L_1 = L_2 = L_3$ . Die Stationarität gilt unabhängig von den Wirbelstärken.

### Klassifikation der Zustände

Wir betrachten eine Klassifikation der Dynamik des Drei-Punktwirbel-Systems mittels trilinearere Koordinaten von H.Aref [Are79]. Wir definieren

$$b_i = \frac{L_i}{\Gamma_i I} \quad \text{für } i = 1, 2, 3 \quad , \quad (1.25)$$

so dass jeder Punkt in der Ebene eine mögliche Wirbelkonfigurationen gegebenen  $I$ 's (1.22) darstellt. Wählt man o.B.d.A.  $\Gamma_1 \geq \Gamma_2 \geq \Gamma_3$ , wobei mindestens  $\Gamma_1$  und  $\Gamma_2$  positiv sind, liegen die Zustände in den drei Bereichen I bis III von Abbildung 1.1. Die Dreiecksungleichung, die wir hier in Anlehnung an [Are07]

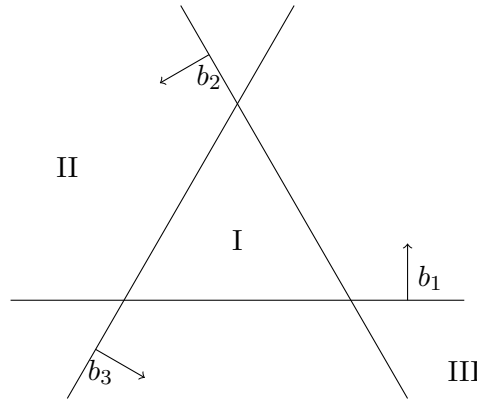


Abbildung 1.1.: Phasenebene mit trilinearen Achsen  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$

durch die Bedingung, dass das Argument unter der Wurzel von der Formel des Heron (vgl. (2.21)) positiv sein muss, ausdrücken wollen, liefert uns die Ungleichung

$$(\Gamma_1 b_1)^2 + (\Gamma_2 b_2)^2 + (\Gamma_3 b_3)^2 \leq 2(\Gamma_1 \Gamma_2 b_1 b_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 b_2 b_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 b_3 b_1), \quad (1.26)$$

die erfüllt werden muss. Das Gleichheitszeichen gilt für die Grenzen der physikalischen Bereiche, die somit durch eine quadratische Gleichung definiert werden. Die Lösungsmengen sind folglich Kegelschnitte. Anhand der Wirbelstärken kann die Begrenzung der physikalischen Region klassifiziert werden.

- i) Ellipse: für  $\Gamma_3 > 0$  in Region I und für  $\Gamma_3 < 0$ ,  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 < 0$  in Region II
- ii) Parabel: für  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 = 0$  in Region II
- iii) Hyperbel: für  $\Gamma_3 < 0$ ,  $\Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 > 0$  mit Armen in Region II und Region III

Die Trajektorien erhalten wir aus der Bedingung, dass die Hamiltonfunktion des Systems konstant ist. Eine einfache Rechnung liefert

$$1/\Theta = |b_1|^{1/\Gamma_1} |b_2|^{1/\Gamma_2} |b_3|^{1/\Gamma_3} = \text{const}, \quad (1.27)$$

wobei  $\Theta$  durch die Wahl der Anfangsbedingungen ( $I$  und  $J$ ) festgelegt ist

$$\Theta(b_1, b_2, b_3) = \Gamma_1^{1/\Gamma_1} \Gamma_2^{1/\Gamma_2} |\Gamma_3|^{1/\Gamma_3} |I/3|^{1/\Gamma_1+1/\Gamma_2+1/\Gamma_3} e^J. \quad (1.28)$$

Einzig die Trajektorien, deren Begrenzung eine Ellipse ist, können als gebundene Zustände bezeichnet werden. Von diesen gebundenen Zuständen besitzen lediglich jene in Bereich I (bei hinreichend geringer Energie) Trajektorien, die keinen Überschlag des Dreiecks aufweisen. Das belegt eine Stabilitätsanalyse der zu äquilateralen Dreiecken korrespondierenden Phasenraumpunkte. Die Konfigurationen, die Hyperbeln oder Parabeln entsprechen, weisen Streuprozesse auf, bei denen sich ein Wirbel im Laufe der Zeit von den anderen beiden entfernt.

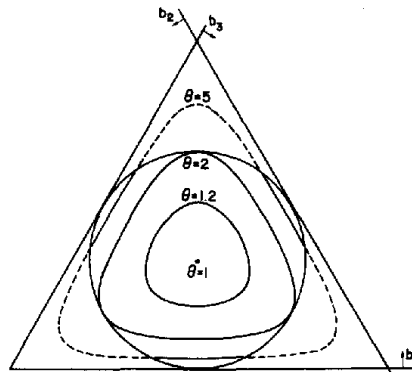


Abbildung 1.2.: Phasendiagramm drei identischer Wirbel für verschiedene Energiewerte (aus [Are79])

In Abbildung 1.2 sind die Trajektorien eines Systems von drei gleichstarken Wirbeln für verschiedene Energien ( $\Theta \propto e^H$ ) gezeigt. Der physikalische Bereich ist durch den Kreis begrenzt. Der singuläre Punkt  $\Theta = 1$  entspricht dem Fall eines äquilateralen Dreiecks. Der Zyklus mit  $\Theta = 1,2$  entspricht einem sich periodisch deformierenden Dreieck. Bei  $\Theta = 2$  tauchen äquilaterale Zustände auf und bei  $\Theta = 5$  findet die Bewegung auf einer der drei durchgezogenen Linien statt und weist kollineare Übergänge auf. Für unterschiedliche Wirbelstärken deformiert sich die Begrenzung der physikalischen Region von der Kreisform zu einer Ellipse.

### Fazit

Wir werden später das System in einem stochastischen Hintergrundfeld betrachten. Daher werden die ersten Integrale nicht mehr konstant sein. Das System

wird nicht mehr durch Phasenraumtrajektorien beschrieben, sondern anhand von Verteilungsfunktionen. In der Evolutionsgleichung dieser Verteilungsfunktion (Fokker-Planck-Gleichung) findet sich ein Driftterm wieder, welcher der in diesem Abschnitt diskutierten Dynamik entspricht. Wir können daher die Interpretation auf die Ergebnisse dieses Abschnitts stützen. Des Weiteren wird an dieser Stelle bereits klar, dass eine analytische Lösung der Fokker-Planck-Gleichung des Systems anhand von drei Parametern nicht möglich ist, da durch die Angabe dreier Größen eine Orientierungsänderung der Wirbel - die im stochastisch gestörten System zwangsläufig stattfinden wird - nicht abgedeckt ist.

## 1.2. Stochastik

Im Hinblick auf das folgende Kapitel werden an dieser Stelle einige grundlegende Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie eingeführt. Ausführliche Darstellungen bezüglich des theoretischen Rüstzeugs für die Turbulenzforschung findet sich in S. Pope [Pop00] oder hinsichtlich stochastischer Prozesse in C. Gardiner [Gar97] und H. Risken [Ris89].

### 1.2.1. Zufallsvariable

Führt man ein Zufallsexperiment durch, so ist das Ergebnis eine

$$\text{Zufallsvariable } \xi. \quad (1.29)$$

Sie kann diskret oder auch kontinuierlich sein. Der Ereignisraum  $\{x\}$  enthält alle Werte, die  $\xi$  annehmen kann. Führt man ein Zufallsexperiment sehr oft hintereinander oder auch ein Ensemble identischer Experimente durch, so kann man sinnvoll den Begriff der Wahrscheinlichkeit verwenden.

### 1.2.2. Verteilungsfunktion

Die Wahrscheinlichkeitsdichteverteilungsfunktion<sup>4</sup>

$$f_{\xi}(x) \quad (1.30)$$

gibt die Wahrscheinlichkeit an, mit der  $\xi$  den Wert  $x$  annimmt. Genauer: die Wahrscheinlichkeit, dass  $\xi$  zwischen  $x$  und  $x + \Delta x$  gemessen wird, beträgt  $\int_x^{x+\Delta x} f_{\xi}(x')dx'$ . Weil ein Zufallsexperiment immer ein Ergebnis liefert, muss die Verteilungsfunktion normiert sein, d.h.  $\int_{\{x\}} f(x)dx = 1$ . Hierbei wird über den gesamten Definitionsbereich der Verteilungsfunktion integriert. Den Index  $\xi$  können wir der Übersicht halber auch weglassen, wenn klar ist, was gemeint ist.

---

<sup>4</sup>Synonym werden die Begriffe Verteilungsfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte verwendet.



### 1.2.3. Erwartungswerte

Kennt man die Verteilungsfunktion, lassen sich *Erwartungswerte* beliebiger Funktionen der Zufallsvariable  $g(\xi)$  berechnen

$$\langle g(\xi) \rangle = \int_{\{x\}} g(x) f(x) dx. \quad (1.31)$$

Die spitzen Klammern deuten an, dass es sich um eine gemittelte Größe handelt. Die bekanntesten Erwartungswerte sind wohl der Mittelwert  $\langle \xi \rangle = \mu$  und die Varianz  $\langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \sigma^2$ .

Mittels dieser beiden Größen lässt sich eine *Normal-* oder *Gaußverteilung* vollständig charakterisieren

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2} \frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} = \mathcal{N}(x, \mu, \sigma). \quad (1.32)$$

Auf die Sonderrolle dieser Verteilung kommen wir später noch zu sprechen. Eine Zufallszahl mit der Verteilungsfunktion  $\mathcal{N}(x, 0, 1)$  nennt man *standardnormalverteilt*.

### 1.2.4. Verbundwahrscheinlichkeit

Misst man in einem Zufallsexperiment mehrere Größen  $\xi_1, \dots, \xi_n$ , führt das zu einer multidimensionalen Verteilungsfunktion

$$f_{\xi_1, \dots, \xi_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (1.33)$$

der *Verbundwahrscheinlichkeitsdichte*. Für Erwartungswerte gilt

$$\langle g(\xi_1, \dots, \xi_n) \rangle = \int_{\{x_1, \dots, x_n\}} dx_1 \dots dx_n g(x_1, \dots, x_n) f^{(n)}(x_1, \dots, x_n), \quad (1.34)$$

wobei wir wieder auf die Angabe der Indizes  $\xi_i$  verzichtet haben. Durch Integration der Verbundwahrscheinlichkeit

$$\int_{\{x_2, \dots, x_n\}} dx_2 \dots dx_n f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \quad (1.35)$$

erhält man erwartungsgemäß die Verteilungsfunktion der Variable  $\xi_1$ .

Die *Kovarianz* ist der Erwartungswert des Produkts der Fluktuationen  $u_i = \xi_i - \mu_i$  zweier Zufallsvariablen

$$\text{Cov}(\xi_1, \xi_2) = \langle u_1 u_2 \rangle \quad (1.36)$$

und wird zur Beschreibung der *Korrelation* dieser Variablen verwendet. Der Korrelationskoeffizient

$$\rho_{1,2} = \frac{\langle u_1 u_2 \rangle}{\sqrt{\langle u_1^2 \rangle \langle u_2^2 \rangle}} \quad (1.37)$$

nimmt Werte zwischen 1 (vollständig korreliert) und -1 (vollständig antikorreliert) an. Im Falle  $\rho_{1,2} = 0$  sind die Variablen statistisch unabhängig.

In diesem Fall faktorisiert ihre Verteilungsfunktion

$$f^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1) \cdot f(x_2) \cdot \dots \cdot f(x_n). \quad (1.38)$$

Eine *multidimensionale Gaußverteilung* der Dimensionalität  $n$  wird durch den Mittelwertvektor  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)$  und die Kovarianzmatrix  $\underline{C} = \langle \mathbf{u} \mathbf{u}^T \rangle$  vollständig charakterisiert

$$f(\mathbf{x}) = ((2\pi)^n \text{Det } \underline{C})^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \cdot \underline{C}^{-1} \cdot (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right]. \quad (1.39)$$

Hierbei ist  $\mathbf{u}$  der Vektor, welcher die Fluktuationen der Zufallsvariablen enthält.

### 1.2.5. Zentraler Grenzwertsatz

Bildet man das Ensemblemittel aus  $N$  unabhängigen, gleichverteilten Zufallszahlen  $\xi_i$  (mit endlicher Varianz)

$$\xi = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i \quad (1.40)$$

wird die Verteilungsfunktion im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  gegen die Normalverteilung streben. Dieses Phänomen ist gemeinhin als *zentraler Grenzwertsatz* bekannt und der Grund dafür, dass stochastische Kräfte, die aus einer Vielzahl von unabhängigen gleichverteilten Kräften resultieren (z.B. Molekülstöße), als annähernd gaußverteilt anzusehen sind.

## 1.3. Stochastische Prozesse

### 1.3.1. Langevin-Gleichung

Betrachtet man die Entwicklung einer zufallsbehafteten Größe  $X(t)$  in der Zeit, spricht man von einem stochastischen Prozess. Ein stochastischer Prozess wird beispielsweise durch eine *Langevin-Gleichung*

$$\dot{X}(t) = g(X, t) + h(X, t)\xi(t) \quad (1.41)$$

beschrieben, wobei die Langevinkraft  $\xi(t)$  eine Zufallszahl ist, die wir als standardnormalverteilt annehmen möchten. Wir wollen in dieser Arbeit von  $\xi(t)$  eine Markov-Eigenschaft fordern, d.h. die Autokovarianzfunktion

$$R(s) = \langle \xi(t)\xi(t+s) \rangle = 0 \quad (1.42)$$

verschwindet. Diese Forderung ist natürlich unphysikalisch und daher die Langevingleichung nur für vergleichsweise große Zeiten als erfüllt anzusehen.

Die multidimensionale Form der Langevingleichung lautet

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{X}, t) + \underline{h}(\mathbf{X}, t) \cdot \boldsymbol{\xi}(t). \quad (1.43)$$

### 1.3.2. Fokker-Planck-Gleichung

Ist man mehr an der Bildung von Erwartungswerten interessiert, kann man sich die Evolutionsgleichung für die Verteilungsfunktion von der Zufallsvariable, die *Fokker-Planck-Gleichung* (FPG), anschauen. Sie kann aus der Langevin-Gleichung berechnet werden [Ris89] und enthält die gleiche Information, nur ist hier die Stochastik nicht in den Zufallskräften, sondern darin manifestiert, dass eine Wahrscheinlichkeitsdichte betrachtet wird.

#### Eindimensionale FPG

Die eindimensionale FPG lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} f_X(x, t) = \left( -\frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t) \right) f_X(x, t) \quad (1.44)$$

und kann aus der Langevin-Gleichung berechnet werden. Der Ausdruck in den Klammern wird auch als *Fokker-Planck-Operator* bezeichnet. Verwendet man das Itô-Kalkül zur Berechnung des stochastischen Integrals, ergeben sich die Kramers-Moyal-Koeffizienten

$$D^{(1)}(x, t) = g(x, t) \quad (1.45)$$

$$D^{(2)}(x, t) = h(x, t) \quad (1.46)$$

$$D^{(n)}(x, t) = 0 \quad \text{für } n \geq 3. \quad (1.47)$$

Es sei ausdrücklich betont, dass die Differentialoperatoren auf das Produkt aus Kramers-Moyal-Koeffizienten und Verteilungsfunktion wirken.

Die Wirkung der Drift auf die Evolution der Verteilungsfunktion ist also zum Einen durch die Steigung von  $f(x, t)$  über

$$- D^{(1)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \quad (1.48)$$

und zu Anderen durch die Steigung der Drift über

$$- f(x, t) \frac{\partial}{\partial x} D^{(1)}(x, t) \quad (1.49)$$

bestimmt.

Die Diffusion bestimmt die Evolution von  $f(x, t)$  durch die Krümmung der Verteilungsfunktion über

$$D^{(2)}(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, t), \quad (1.50)$$

das Produkt der jeweiligen Steigungen über

$$2 \frac{\partial}{\partial x} D^{(2)}(x, t) \frac{\partial}{\partial x} f(x, t) \quad (1.51)$$

und die Krümmung der Diffusion über

$$f(x, t) \frac{\partial^2}{\partial x^2} D^{(2)}(x, t). \quad (1.52)$$

Die Einflüsse von konstanter Drift und Diffusion sind intuitiv leicht zu erfassen. Im Falle  $D^{(1)}(x, t) = D^{(1)}$  und  $D^{(2)}(x, t) = D^{(2)}$  verschwinden die Terme (1.49), (1.51) und (1.52). Der Driftterm entspricht dann einer Translation der Verteilungsfunktion mit der Geschwindigkeit  $D^{(1)}$  in positive  $x$ -Richtung. Eine positive Diffusion verringert die Verteilungsfunktion in Bereichen negativer Krümmung und erhöht ihren Wert in Bereichen positiver Krümmung, führt also zu einem Zerfließen der Verteilungsfunktion. Umgekehrt führt eine negative Diffusion zu einer Konzentration der Wahrscheinlichkeitsdichte. Wenn die Kramers-Moyal-Koeffizienten Ortsabhängig sind, ist die Evolution der Verteilungsfunktion nicht mehr so leicht zu erfassen. Für den Fall geringer Änderungen im Ort oder sehr stark lokalisierter Verteilungsfunktionen dominieren also die Terme (1.48) und (1.50) die Dynamik.

### Multidimensionale FPG

Die multidimensionale FPG lautet

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t) = \left( -\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \right) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, t), \quad (1.53)$$

mit den Kramers-Moyal-Koeffizienten

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) \\ \underline{D}^{(2)}(\mathbf{x}, t) &= \underline{h}(\mathbf{x}, t) \cdot \underline{h}^T(\mathbf{x}, t), \end{aligned} \quad (1.54)$$

wobei  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$  der Ereignisraum-Vektor der Dimensionalität  $N$  ist.

Analog zur eindimensionalen FPG können wir die Einflüsse der Drift durch den Gradienten der Verteilungsfunktion über

$$- \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t), \quad (1.55)$$

und die Divergenz des Driftvektors über

$$- f(\mathbf{x}, t) \nabla \cdot \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{x}, t) \quad (1.56)$$

ausdrücken.

Die Einflüsse der Diffusion bestimmen die Evolution von  $f(\mathbf{x}, t)$  durch den Krümmungstensor der Verteilungsfunktion über

$$D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} f(\mathbf{x}, t), \quad (1.57)$$

das Produkt der jeweiligen Steigungen von Diffusion und Verteilungsfunktion über

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x_i} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_j} f(\mathbf{x}, t) \\ \text{und} & \frac{\partial}{\partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x_i} f(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (1.58)$$

und die Krümmungen der Elemente der Diffusionsmatrix über

$$f(\mathbf{x}, t) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{x}, t). \quad (1.59)$$

Weil die Fokker-Planck-Gleichung eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung ist, kann man bislang keine allgemeine Lösung angeben. Wir werden in dieser Arbeit einen Eindruck der Dynamik gewinnen, indem wir die Terme (1.55) und (1.57) untersuchen.

## 1.4. Stochastische Felder

Raumzeitliche Verteilungsfunktionen beschreibt man anhand der Verbundwahrscheinlichkeit  $f(\mathbf{u}; \mathbf{x}, t)$ . Dabei soll das Semikolon verdeutlichen, dass  $f$  eine Wahrscheinlichkeitsdichte bezüglich der Geschwindigkeit und eine Funktion bezüglich Ort und Zeit ist. Den einfachsten Zugang zu räumlichen Strukturen von Feldern bietet die ‘‘Zwei-Punkt-Ein-Zeit-Autokovarianz’’

$$\underline{C}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \rangle, \quad (1.60)$$

die häufig auch Zweipunktkorrelation genannt wird. Die Zweipunktkorrelation in longitudinaler Richtung lautet

$$C_{rr}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) = \left\langle \frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right\rangle. \quad (1.61)$$

Wir werden in dieser Arbeit nur turbulente Felder behandeln, die im statistischen Sinne<sup>5</sup> stationär und isotrop sind.

## 1.5. Stochastische Hydrodynamik

In diesem Kapitel werden einige für diese Diplomarbeit wichtige Themen der stochastischen Hydrodynamik angeschnitten. Wir orientieren uns stark an [Pop00] und [AFHF10].

### 1.5.1. Die Notwendigkeit einer stochastischen Beschreibung

Die Navier-Stokes-Gleichung ist nichtlinear. Aus der Theorie Dynamischer Systeme ist bekannt, dass derartige Systeme mit nur kleinen Unterschieden in den Anfangsbedingungen sehr schnell völlig unterschiedliches Verhalten zeigen können. Da sich Anfangsbedingungen im Experiment nur mit begrenzter Genauigkeit präparieren lassen, macht es keinen Sinn, Vorhersagen bezüglich der genauen Strömungskonfiguration eines einzelnen Turbulenzexperimentes zu treffen. Das heißt nicht, dass sich gar keine Aussagen treffen lassen, denn wie sich herausstellt, macht es Sinn, statistische Größen zu betrachten.

<sup>5</sup>Falls im Folgenden also von stationärer, homogener oder isotroper Turbulenz die Rede ist, ist stets gemeint, dass dieses in einem statistischen Sinne zu verstehen ist.

### 1.5.2. Kohärente Strukturen und turbulente Längenskalen

Die im Folgenden skizzierten Ergebnisse der Turbulenzforschung sind phänomenologischen Ursprungs. Die fehlende Begründung der phänomenologischen Theorien auf der NSG ist eine fundamentale Lücke auf dem Gebiet der Turbulenz.

#### Richardsons Energiekaskade

Betrachtet man ein dreidimensionales turbulentes Feld, fällt auf, dass Wirbelstrukturen unterschiedlichster Größen koexistieren. Richardson nutzte diese Beobachtung um die Dynamik eines turbulenten Systems zu charakterisieren. In seiner Arbeit von 1922 [Ric22] schreibt er, dass Turbulenz auf großen Skalen  $L$  angeregt und die Energie der Wirbel aufgrund von Instabilitäten zu Wirbeln immer kleinerer Skalen weitergereicht wird, bis sie schließlich durch molekulare Diffusion als Wärmeenergie das System verlässt. Dieser Prozess des sukzessiven Weiterreichens der Energie wurde als *Energiekaskade* bekannt und ist ein wichtiges Konzept in der Turbulenzforschung. Der Bereich der Skalen, auf denen sich das Wirken der Turbulenzanregung bemerkbar macht, wird aus nahe liegenden Gründen **integraler Bereich** genannt.

#### Kolmogorovs Hypothesen

Kolmogorov [Kol41b, Kol41a] hat in seinen Arbeiten<sup>6</sup> von 1941 dieses Bild aufgegriffen und quantifiziert. Er nahm an, dass im Laufe des Kaskadenprozesses die Anisotropie, die dem System durch die Erregerkraft und die Randbedingungen aufgezwungen wird, verloren geht und sich die Bewegung statistisch isotrop verhält (*Hypothese der statistischen Isotropie*). Das bedeutet, dass jedes turbulente System (mit hinreichend großer Reynoldszahl) eine Grenzskaala besitzt, unterhalb derer es universelle statistische Eigenschaften zeigt.

Des Weiteren postulierte er, dass die einzigen Größen, die diese kleinskaligen Bewegungen beeinflussen, die Rate  $\epsilon$ , mit der die Energiedichte zur nächstkleineren Skala übertragen wird und die Energiedissipationsrate, welche durch die kinematische Viskosität  $\nu$  bestimmt ist, sind (*erste Ähnlichkeitshypothese*). Diese beiden Größen können verwendet werden, um typische Skalen  $\eta$ ,  $u_\eta$  und  $\tau_\eta$  zu definieren, auf denen die Dissipation das Verhalten maßgeblich bestimmt. Das geschieht dann, wenn der dissipative Term  $\nu\Delta\mathbf{u}$  der Navier-Stokes-Gleichung in der gleichen Größenordnung wie der advektive Term<sup>7</sup>  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  ist, also  $\nu u_\eta/\eta^2 \simeq u_\eta^2/\eta$ . Das motiviert die **Kolmogorov-Skalen**

$$\eta \equiv (\nu^3/\epsilon)^{1/4} \quad u_\eta \equiv (\nu\epsilon)^{1/4} \quad \tau_\eta \equiv (\nu/\epsilon)^{1/2} \quad .$$

Der Bereich, in dem weder die Anregung noch die Dissipation zu spüren sind und in dem folglich nur die Trägheitseffekte zum Tragen kommen, wird

---

<sup>6</sup>In der Literatur hat sich für die im Folgenden skizzierte Theorie die Abkürzung K41 eingebürgert.

<sup>7</sup>Alternativ gilt, dass die Reynolds-Zahl dieses Bereiches in der Größenordnung 1 ist.

**inertialer Bereich** genannt. Nach Kolmogorovs *zweiten Ähnlichkeitshypothese* hängt die Statistik in diesem Bereich nur von  $\epsilon$  ab.

Je größer die Reynoldszahl  $Re$  ist, desto weiter wird die Grenze zwischen inertialem und dissipativem Bereich zu kleineren Skalen verschoben. Im Limit  $Re \rightarrow \infty$  befindet sich das System also im inertialen Bereich. Den Zustand eines Systems mit dieser Eigenschaft nennt man **vollentwickelte Turbulenz**.

### 1.5.3. Inkremente und Strukturfunktionen

Die Betrachtung von gemittelten Geschwindigkeitsinkrementen

$$\langle \mathbf{v}(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \rangle = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \rangle \quad (1.62)$$

gibt uns Aufschluss über die Bewegung in Abhängigkeit von der Skala. Im Falle statistischer Stationarität hängt diese Größe nicht mehr von der Zeit  $t$ , im Falle statistischer Homogenität nicht mehr vom Ort  $\mathbf{x}$  ab. Gilt statistische Isotropie<sup>8</sup>, hängt das gemittelte Inkrement nur vom Betrag des Abstandes ab und es lässt sich zeigen<sup>9</sup>, dass die Zweipunktkorrelationen (1.61) einzig durch die longitudinale Strukturfunktion 2. Ordnung

$$S^2(r) = \left\langle \left( [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^2 \right\rangle \quad (1.63)$$

festgelegt sind. Dazu multiplizieren wir (1.63) aus und erhalten, wenn wir abkürzend  $u_r(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r}$  schreiben

$$S^2(r) = \langle u_r^2(\mathbf{x} + \mathbf{r}) \rangle + \langle u_r^2(\mathbf{x}) \rangle - 2 \langle u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_r(\mathbf{x}) \rangle . \quad (1.64)$$

Im Falle stationärer, isotroper Turbulenz sind die ersten beiden Terme auf der rechten Handseite gleich und konstant und der dritte Term ist proportional zur Zweipunktkorrelationsfunktion (1.61)

$$C_{rr}(r) = \langle u_r(\mathbf{x} + \mathbf{r}) u_r(\mathbf{x}) \rangle . \quad (1.65)$$

Damit haben wir den Zusammenhang

$$S^2(r) = A - 2C_{rr}(r) \quad (1.66)$$

zwischen der longitudinalen Strukturfunktion 2. Ordnung und der longitudinalen Zweipunktkorrelation gezeigt, wobei A eine Konstante ist.

Allgemein sind die longitudinalen Strukturfunktionen n-ter Ordnung durch

$$S^n(r) = \left\langle \left( [\mathbf{u}(\mathbf{x} + \mathbf{r}) - \mathbf{u}(\mathbf{x})] \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \right)^n \right\rangle \quad (1.67)$$

definiert.

<sup>8</sup>Darunter wollen wir sowohl Rotations- als auch Reflexionsinvarianz verstehen.

<sup>9</sup>siehe [AFHF10], Anhang von Kapitel 9

#### 1.5.4. Selbstähnlichkeit

Unterhalb der integralen Skala soll die Verteilungsfunktion  $f(v; r, \nu, \varepsilon)$  des Geschwindigkeitsinkrements nach Kolmogorov universell sein, also insbesondere mit der auf die dimensionslosen Größen  $\bar{v} = v/u_\eta$  und  $\bar{r} = r/\eta$  reskalierte Verteilungsfunktion übereinstimmen (multipliziert mit der Funktionaldeterminante)

$$f(v; r, \varepsilon, \nu) = \frac{d\bar{v}}{dv} G(\bar{v}; \bar{r}, \varepsilon, \nu) = \frac{1}{u_\eta} G\left(\frac{v}{u_\eta}; \frac{r}{\eta}\right). \quad (1.68)$$

Im letzten Schritt haben wir ausgenutzt, dass sich aus  $\nu$  und  $\varepsilon$  keine dimensionslose Größe bilden lässt. Im Inertialbereich soll die Verteilungsfunktion nicht von der Viskosität abhängen. Es lässt sich zeigen [Bar03], dass sie daher eine selbstähnliche Gestalt besitzen muss

$$G(\bar{v}; \bar{r}) = \frac{1}{\bar{r}^{1/3}} g\left(\frac{\bar{v}}{\bar{r}^{1/3}}\right) \quad (1.69)$$

deren Momente die Gestalt

$$S^n(r) = c_n r^{\zeta_n} \quad (1.70)$$

haben, wobei

$$\zeta_n = n\zeta' \quad (1.71)$$

linear in  $n$  ist. Über das Kolmogorovsche  $-\frac{4}{5}$ -Gesetz, einer Folgerung aus einer aus der NSG berechneten Energiebilanzgleichung der Geschwindigkeitsinkremente, das in der inertialen Skala den Zusammenhang zwischen der dritten Strukturfunktion und ihrem Argument  $r$

$$S^3(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r \quad (1.72)$$

herstellt, können wir den Exponenten  $\zeta' = 1/3$  identifizieren.

#### 1.5.5. Intermittenz und anomale Skalierung

Es hat sich durch zahlreiche Experimente herausgestellt, dass turbulente Systeme zwar ein Skalierungsverhalten, aber keine perfekte Selbstähnlichkeit zeigen. Wir wollen an dieser Stelle kurz darauf eingehen. Die Beziehung (1.71) stellt für höhere Ordnungen der Strukturfunktion eine immer schlechtere Beschreibung der Experimente dar. Ebenfalls verletzen kleinskaligere Verteilungen das selbstähnliche Verhalten. Reskalierte Verteilungsfunktionen weisen bei kleineren Skalen immer stärkere Abweichungen von der Normalverteilung auf. Die langen Ausläufer und die spitzen Maxima dieser Verteilungsfunktionen entsprechen einem gehäuften Auftreten von "Extremen Ereignissen", also besonders starken und schwachen Geschwindigkeitsinkrementen. Dieses Phänomen wird Intermittenz genannt und man kann es sich durch die Wirkung von größerskaligen Wirbelstrukturen erklären. Abweichungen des Skalierungsverhalten von K41 nennt man auch *anomale Skalierung*. Diesem Bruch der Selbstähnlichkeit begegnete Kolmogorov [Kol62] mit einer Verfeinerung seiner Theorie (K62), indem er die mittlere Energiedissipationsrate  $\epsilon$ , die in K41 als konstant angenommen wurde,



durch eine räumlich schwankende Größe ersetzt. Eine geeignete Wahl der Verteilungsfunktion von  $\epsilon$ , liefert einen realistischeren, nichtlinearen Verlauf des Exponenten  $\zeta_n$ . Parisi und Frisch [PF85] haben mit dem multifraktalen Modell eine andere Erweiterung von K41 geschaffen. Dabei wird eine Vielzahl von lokalen Skalenexponenten berücksichtigt, von denen jeder einen Bruchteil der gesamten Dimension abdeckt.

## 2. Stochastische Drei-Punktwirbel-Dynamik

### 2.1. Deterministische Punktwirbeldynamik in Relativkoordinaten

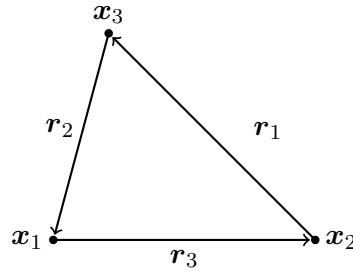


Abbildung 2.1.: Dreieck, zur Orientierung der  $r_i$

Im Hinblick auf die folgenden Abschnitte wollen wir die Punktwirbeldynamik in den Relativkoordinaten (siehe Abbildung 2.1)

$$\begin{aligned}\mathbf{R}_1(t) &= \mathbf{x}_3(t) - \mathbf{x}_2(t) \\ \mathbf{R}_2(t) &= \mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_3(t) \\ \mathbf{R}_3(t) &= \mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)\end{aligned}\tag{2.1}$$

formulieren. Differenzieren der Gleichungen (2.1) und Einsetzen von (1.20) liefert

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{R}_1(t) &= \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{2\pi} \frac{\mathbf{R}_1(t)}{|\mathbf{R}_1^2(t)|} - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{R}_2(t)}{|\mathbf{R}_2^2(t)|} + \frac{\mathbf{R}_3(t)}{|\mathbf{R}_3^2(t)|} \right) \right] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{R}_2(t) &= \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_3 + \Gamma_1}{2\pi} \frac{\mathbf{R}_2(t)}{|\mathbf{R}_2^2(t)|} - \frac{\Gamma_2}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{R}_3(t)}{|\mathbf{R}_3^2(t)|} + \frac{\mathbf{R}_1(t)}{|\mathbf{R}_1^2(t)|} \right) \right] \\ \frac{d}{dt}\mathbf{R}_3(t) &= \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_1 + \Gamma_2}{2\pi} \frac{\mathbf{R}_3(t)}{|\mathbf{R}_3^2(t)|} - \frac{\Gamma_3}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{R}_1(t)}{|\mathbf{R}_1^2(t)|} + \frac{\mathbf{R}_2(t)}{|\mathbf{R}_2^2(t)|} \right) \right].\end{aligned}\tag{2.2}$$

### 2.2. Stochastische Punktwirbeldynamik

Wir wollen die viskosen Effekte über Zufallskräfte in die Dynamik integrieren und gehen davon aus, dass diese Kräfte zeitlich dekorreliert sind (siehe (1.42)).

Damit erhalten wir für die Relativkoordinaten der drei Punktwirbel

$$\underline{\mathbf{R}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{R}_1(t) \\ \mathbf{R}_2(t) \\ \mathbf{R}_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1,x}(t) \\ R_{1,y}(t) \\ R_{2,x}(t) \\ R_{2,y}(t) \\ R_{3,x}(t) \\ R_{3,y}(t) \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

die Fokker-Planck-Gleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f_{\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\mathbf{r}}, t) = \left( -\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \tilde{\underline{\mathbf{D}}}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1 \\ \alpha,\beta \in \{x,y\}}}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha} \partial r_{j,\beta}} \tilde{D}_{ij,\alpha\beta}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) \right) f_{\underline{\mathbf{R}}}(\underline{\mathbf{r}}, t). \quad (2.4)$$

Wir werden im Folgenden wieder auf den Index an der Verteilungsfunktion verzichten. Der Ereignisraum erstreckt sich über die sechs Relativkoordinaten der drei Punktwirbel

$$\underline{\mathbf{r}} = \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \mathbf{r}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{1,x} \\ r_{1,y} \\ r_{2,x} \\ r_{2,y} \\ r_{3,x} \\ r_{3,y} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Wir wählen die etwas ungewöhnliche Schreibweise der Summe im Diffusionsteil, um die Zusammengehörigkeit der beiden Komponenten eines Vektors hervorzuheben und so die Anschaulichkeit nicht zu verlieren.

Es gilt mit der Abkürzung  $\partial_r$  für  $\frac{\partial}{\partial r}$

$$\underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{r}}} = \begin{pmatrix} \underline{\nabla}_{\mathbf{r}_1} \\ \underline{\nabla}_{\mathbf{r}_2} \\ \underline{\nabla}_{\mathbf{r}_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_{r_{1,x}} \\ \partial_{r_{1,y}} \\ \partial_{r_{2,x}} \\ \partial_{r_{2,y}} \\ \partial_{r_{3,x}} \\ \partial_{r_{3,y}} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

und

$$\tilde{\underline{\mathbf{D}}}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) = \begin{pmatrix} \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_1^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_2^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{\underline{\mathbf{D}}}_3^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{1,x}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{D}_{1,y}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{D}_{2,x}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{D}_{2,y}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{D}_{3,x}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \\ \tilde{D}_{3,y}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

mit

$$\tilde{\underline{\mathbf{D}}}_i^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) = \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_j + \Gamma_k}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_i}{r_i^2} - \frac{\Gamma_i}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^2} + \frac{\mathbf{r}_k}{r_k^2} \right) \right], \quad (2.8)$$

der deterministischen Relativgeschwindigkeit aus der Punktwirbeldynamik (vergleiche (2.2)). Die Diffusionsmatrix  $\underline{D}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}})$  ist die Kovarianzmatrix der stochastischen Kräfte. Ihre Form werden wir in Abschnitt 2.4 festlegen.

### 2.3. Transformation auf Abstandskordinaten

Wir haben gesehen, dass sich die Dynamik dreier Punktwirbel anhand von drei Größen beschreiben lässt. Es stellt sich heraus, dass das auch für das stochastische System gilt<sup>1</sup>. Wir wollen die FPG in den Wirbelabständen<sup>2</sup>

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

formulieren. Dazu definieren wir

$$F(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} \underbrace{\delta(r_1 - |\mathbf{r}_1|)\delta(r_2 - |\mathbf{r}_2|)\delta(r_3 - |\mathbf{r}_3|)}_{=\delta^3(\cdot)} f(\underline{\mathbf{r}}, t) \quad (2.10)$$

als die Verteilungsfunktion in den neuen Einheiten und erhalten die zugehörige FPG, indem wir die FPG (2.4) mit  $\delta^3(\cdot)$  multiplizieren und anschließend über den gesamten Relativraum integrieren

$$\begin{aligned} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} \delta^3(\cdot) \partial_t f(\underline{\mathbf{r}}, t)}_1 &= - \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} \delta^3(\cdot) \underline{\nabla}_{\underline{\mathbf{r}}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{(1)}(\underline{\mathbf{r}}) f(\underline{\mathbf{r}}, t)}_2 \\ &+ \underbrace{\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} \delta^3(\cdot) \sum_{\substack{i,j=1 \\ \alpha,\beta \in \{x,y\}}}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha} \partial r_{j,\beta}} \tilde{D}_{ij,\alpha\beta}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) f(\underline{\mathbf{r}}, t)}_3. \end{aligned} \quad (2.11)$$

#### 1 Zeit:

Auf der linken Handseite können wir, weil  $\delta^3(\cdot)$  zeitunabhängig ist, die Zeitdifferentiation aus dem Integral herausziehen und erhalten sofort

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} \delta^3(\cdot) \partial_t f(\underline{\mathbf{r}}, t) = \partial_t F(\mathbf{r}, t). \quad (2.12)$$

---

<sup>1</sup>Die Schlussfolgerung gilt nur bei isotroper Statistik.

<sup>2</sup>Wir werden im Folgenden auch von dem Betragsraum sprechen, der durch  $\mathbf{r}$  aufgespannt wird.

**Anmerkung zu 2 und 3:**

Die Umformung der Terme, welche Ortsableitungen enthalten, werden nach folgendem Schema durchgeführt. Dabei seien  $A_{r_{\text{alt}}}^n$  und  $\tilde{A}_{r_{\text{neu}}}^n$  Differentialoperatoren bezüglich  $\underline{\mathbf{r}}$  resp.  $\mathbf{r}$  der Ordnung  $n$ . Sie wirken auf das Produkt der rechts von ihnen stehenden Ausdrücke.  $B(r_{\text{alt}})$  sind beliebige Terme (Drift bzw. Diffusion) abhängig von  $\underline{\mathbf{r}}$ .  $C_n(r_{\text{alt}})$  seien Terme, die durch nachdifferenzieren (siehe (A.13)) entstehen.

$$\begin{aligned}
 & \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} \delta^3(\cdot) A_{r_{\text{alt}}}^n B(r_{\text{alt}}) f(\underline{\mathbf{r}}, t) \\
 & \stackrel{(A.9)}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} B(r_{\text{alt}}) f(\underline{\mathbf{r}}, t) A_{r_{\text{alt}}}^n \delta^3(\cdot) \\
 & \stackrel{(A.13)}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} B(r_{\text{alt}}) f(\underline{\mathbf{r}}, t) \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_{r_{\text{neu}}}^i C_i(r_{\text{alt}}) \right) \delta^3(\cdot) \\
 & = (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} f(\underline{\mathbf{r}}, t) \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_{r_{\text{neu}}}^i \underbrace{B(r_{\text{alt}}) C_i(r_{\text{alt}})}_{E_i(r_{\text{alt}})} \right) \delta^3(\cdot) \quad (2.13) \\
 & \stackrel{(A.8)}{=} (-1)^n \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} f(\underline{\mathbf{r}}, t) \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_{r_{\text{neu}}}^i \tilde{E}_i(r_{\text{neu}}) \right) \delta^3(\cdot) \\
 & = (-1)^n \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_{r_{\text{neu}}}^i \tilde{E}_i(r_{\text{neu}}) \right) \int_{-\infty}^{\infty} d\underline{\mathbf{r}} f(\underline{\mathbf{r}}, t) \delta^3(\cdot) \\
 & = (-1)^n \left( \sum_{i=1}^n \tilde{A}_{r_{\text{neu}}}^i \tilde{E}_i(r_{\text{neu}}) \right) F(\mathbf{r}, t)
 \end{aligned}$$

Die Summe über die Ordnungen  $i$  ist der Produktregel geschuldet. Wir betrachten hier allerdings nur Ableitungen der maximalen Ordnung 2. Dabei wird uns der Term mit der Ableitung erster Ordnung die rauschinduzierte Drift erzeugen. Es ist bei diesem Formalismus unabdingbar, dass sich die  $E_i(r_{\text{alt}})$  in Einheiten von  $r_{\text{neu}}$  darstellen lassen.

## 2 Drift:

Wegen der zyklischen Symmetrie des Driftterms (2.8) genügt es, sich auf die Betrachtung von

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \delta^3(\cdot) \nabla_{\mathbf{r}_1} \cdot \left( \tilde{\mathbf{D}}_1^{(1)}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) \right)$$

zu beschränken. Nach partieller Integration (A.9) wirken die Ableitungen nur auf  $\delta^3(\cdot)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} f(\mathbf{r}, t) \tilde{\mathbf{D}}_1^{(1)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} \delta^3(\cdot) \quad (2.14)$$

und können wegen

$$\frac{\partial}{\partial r_{1,x}} \delta^3(\cdot) = \frac{r_{1,x}}{|\mathbf{r}_1|} \frac{-\partial}{\partial r_1} \delta^3(\cdot), \quad (2.15)$$

also

$$\nabla_{\mathbf{r}_1} \delta^3(\cdot) = \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} \frac{-\partial}{\partial r_1} \delta^3(\cdot), \quad (2.16)$$

durch Ableitungen nach  $r_1$  ersetzt werden. Mit

$$\tilde{\mathbf{D}}_1^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_z \times \left[ \frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1^2|} - \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2^2|} + \frac{\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_3^2|} \right) \right] \quad (2.17)$$

aus (2.8) erhalten wir

$$\tilde{\mathbf{D}}_1^{(1)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{\mathbf{r}_1} \delta^3(\cdot) = \quad (2.18)$$

$$\mathbf{e}_z \times \left[ -\frac{\Gamma_2 + \Gamma_3}{2\pi} \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1^2|} + \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left( \frac{\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2^2|} + \frac{\mathbf{r}_3}{|\mathbf{r}_3^2|} \right) \right] \cdot \frac{\mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_1|} \frac{\partial}{\partial r_1} \delta^3(\cdot). \quad (2.19)$$

Dieser Term enthält drei Spatprodukte, von denen das erste verschwindet, da es parallele Vektoren enthält. Das Spatprodukt

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{r}_1 = -2A(\mathbf{r}) \quad (2.20)$$

ergibt den orientierten<sup>3</sup> Flächeninhalt des von  $\mathbf{r}_1$  und  $\mathbf{r}_2$  aufgespannten Parallelogramms, den wir durch den doppelten Flächeninhalt des Dreiecks  $A(\mathbf{r})$  ausdrücken. Die Dreiecksfläche kann dabei über den Satz des Heron [Bro06] durch die Beträge der Abstandsvektoren  $\mathbf{r}_i$  ausgedrückt werden.

$$A(\mathbf{r}) = \frac{1}{4} \sqrt{(|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_3|)(|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| - |\mathbf{r}_3|)(|\mathbf{r}_1| - |\mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_3|)(-|\mathbf{r}_1| + |\mathbf{r}_2| + |\mathbf{r}_3|)} \quad (2.21)$$

Analog erhalten wir

$$\mathbf{e}_z \times \mathbf{r}_3 \cdot \mathbf{r}_1 = 2A(\mathbf{r}) \quad (2.22)$$

---

<sup>3</sup>Das Spatprodukt besitzt hier ein negatives Vorzeichen, wenn die Punkte entgegen dem Uhrzeigersinn angeordnet sind. Das Spatprodukt (2.22) besitzt stets das entgegengesetzte Vorzeichen von (2.20).

und (2.19) wird zu

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{D}}_1^{(1)}(\mathbf{r}) \cdot \nabla_{r_1} \delta^3(\cdot) &= \frac{1}{|\mathbf{r}_1|} \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_3^2|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2^2|} \right) 2A(\mathbf{r}) \frac{\partial}{\partial r_1} \delta^3(\cdot) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_1} \Gamma_1 \frac{1}{|\mathbf{r}_1|} \left( \frac{1}{|\mathbf{r}_3^2|} - \frac{1}{|\mathbf{r}_2^2|} \right) \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} A(\mathbf{r}) \delta^3(\cdot) \\
&\stackrel{(A.8)}{=} \frac{\partial}{\partial r_1} \Gamma_1 \frac{1}{r_1} \left( \frac{1}{r_3^2} - \frac{1}{r_2^2} \right) \frac{1}{2} \frac{2}{\pi} A(\mathbf{r}) \delta^3(\cdot) \quad (2.23) \\
&= \frac{\partial}{\partial r_1} \Gamma_1 r_1 (r_2^2 - r_3^2) \underbrace{\frac{1}{2} \frac{2}{\pi} \frac{A(\mathbf{r})}{r_1^2 r_2^2 r_3^2}}_{\sigma(\mathbf{r})} \delta^3(\cdot).
\end{aligned}$$

Dieses Ergebnis setzen wir in (2.14) ein und integrieren erneut partiell. Damit haben wir die Drift der Komponente  $r_1$

$$D_1^{\text{det}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \Gamma_1 \sigma(\mathbf{r}) r_1 (r_2^2 - r_3^2) \quad (2.24)$$

berechnet. Der Index det kennzeichnet diesen als deterministischen Anteil der Drift. Die Behandlung der Diffusion im nächsten Abschnitt wird noch eine rauschinduzierte Drift erzeugen. Durch zyklische Permutation erhalten wir die anderen Beiträge von  $\mathbf{2}$  in (2.11) und der erste Teil der Drift der FPG in  $\mathbf{r}$  lautet

$$- \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \delta^3(\cdot) \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \tilde{\mathbf{D}}^{(1)}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) = - \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}^{\text{det}}(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, t) \quad (2.25)$$

mit

$$\begin{aligned}
D_1^{\text{det}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \Gamma_1 \sigma(\mathbf{r}) r_1 (r_2^2 - r_3^2) \\
D_2^{\text{det}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \Gamma_2 \sigma(\mathbf{r}) r_2 (r_3^2 - r_1^2) \\
D_3^{\text{det}}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \Gamma_3 \sigma(\mathbf{r}) r_3 (r_1^2 - r_2^2).
\end{aligned} \quad (2.26)$$

Dieses Ergebnis ist konsistent zu (1.21). Wir sehen also, dass sich in der stochastischen Punktwirbeldynamik die deterministische Bewegung der Punkt-wirbel in der Drift wiederfindet.

### 3 Diffusion:

Analog zum vorherigen Abschnitt wollen wir den Term **3** in (2.11) umformen. Dazu betrachten wir die zweiten Ableitungen von  $\delta^3(\cdot)$ . Es gilt zwei Fälle zu unterscheiden.

1) *Gemischte Ableitungen* ( $i \neq j$ ):

Die zweite Ableitung bezüglich verschiedener  $r_i$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha} \partial r_{j,\beta}} \delta^3(\cdot) = \frac{r_{j,\alpha} r_{j,\beta}}{|\mathbf{r}_i| |\mathbf{r}_j|} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \delta^3(\cdot) \quad (2.27)$$

geht also über in die Ableitungen der Beträge multipliziert mit den Projektionen der Einheitsvektoren auf die jeweilige Achse.

2) *Reine Ableitungen* ( $i = j$ ):

Bei den zweiten Ableitungen bezüglich gleicher  $r_i$  muss die Produktregel berücksichtigt werden

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha} \partial r_{i,\beta}} \delta^3(\cdot) &= \frac{\partial}{\partial r_{i,\alpha}} \left( \frac{r_{i,\beta}}{|\mathbf{r}_i|} \left( -\frac{\partial}{\partial r_i} \right) \delta^3(\cdot) \right) \\ &= \left( -\frac{\partial}{\partial r_i} \right) \left( \left( \frac{\partial}{\partial r_{i,\alpha}} \frac{r_{i,\beta}}{|\mathbf{r}_i|} \right) \delta^3(\cdot) + \frac{r_{i,\beta}}{|\mathbf{r}_i|} \left( \frac{\partial}{\partial r_{i,\alpha}} \delta^3(\cdot) \right) \right). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Wir rufen uns in Erinnerung, dass  $|\mathbf{r}_i|$  eine Abkürzung von  $|\mathbf{e}_x r_{i,x} + \mathbf{e}_y r_{i,y}|$  ist und  $\left(-\frac{\partial}{\partial r_i}\right)$  nur auf  $\delta^3(\cdot)$  wirkt. Es gibt wieder 2 Fälle

2a)  $\alpha \neq \beta$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha} \partial r_{i,\beta}} \delta^3(\cdot) = \frac{r_{i,\alpha} r_{i,\beta}}{|\mathbf{r}_i|^2} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_i|} \left( -\frac{\partial}{\partial r_i} \right) + \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} \right\} \delta^3(\cdot) \quad (2.29)$$

2b)  $\alpha = \beta$

$$\frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha}^2} \delta^3(\cdot) = \left\{ \frac{1}{|\mathbf{r}_i|} \left( 1 + \frac{r_{i,\alpha}^2}{|\mathbf{r}_i|^2} \right) \left( -\frac{\partial}{\partial r_i} \right) + \frac{r_{i,\alpha}^2}{|\mathbf{r}_i|^2} \frac{\partial^2}{\partial r_i^2} \right\} \delta^3(\cdot) \quad (2.30)$$

Hier treten Ableitungen erster Ordnung auf, die eine rauschinduzierte Drift erzeugen.

#### Rauschinduzierte Drift

Folgen wir wieder dem Schema (2.13), erhalten wir aus **3** in (2.11) folgende Terme, die  $\left(-\frac{\partial}{\partial r_i}\right)$  enthalten

$$\frac{1}{2} \left( -\frac{\partial}{\partial r_i} \right) \frac{1}{r_i} \left( \left( 1 + \frac{r_{i,x}^2(\mathbf{r})}{r_i^2} \right) \tilde{D}_{ii,xx}^{(2)}(\mathbf{r}) + \left( 1 + \frac{r_{i,y}^2(\mathbf{r})}{r_i^2} \right) \tilde{D}_{ii,yy}^{(2)}(\mathbf{r}) + 2 \frac{r_{i,x}(\mathbf{r}) r_{i,y}(\mathbf{r})}{r_i^2} \tilde{D}_{ii,xy}^{(2)}(\mathbf{r}) \right). \quad (2.31)$$



Das entspricht einer rauschinduzierten Drift

$$D_i^{(1),\text{noise}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2r_i} \left( \left( 1 + \frac{r_{i,x}^2(\mathbf{r})}{r_i^2} \right) \tilde{D}_{ii,xx}^{(2)}(\mathbf{r}) + \left( 1 + \frac{r_{i,y}^2(\mathbf{r})}{r_i^2} \right) \tilde{D}_{ii,yy}^{(2)}(\mathbf{r}) + 2 \frac{r_{i,x}(\mathbf{r})r_{i,y}(\mathbf{r})}{r_i^2} \tilde{D}_{ii,xy}^{(2)}(\mathbf{r}) \right), \quad (2.32)$$

wobei  $r_{i,x}$  und  $r_{i,y}$  die Projektionen von  $\mathbf{r}_i$  auf ein mitbewegtes Koordinatensystem sind, welche wir allerdings durch  $\mathbf{r}$  ausdrücken können, nachdem wir das bewegte Koordinatensystem definiert haben (siehe folgende Seite). Ebenfalls dürfen die  $\tilde{D}_{ii,\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{r})$  von diesen Größen abhängen. Wir haben des Weiteren von der Symmetrie der Diffusionsmatrix  $\tilde{D}_{ii,\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{r}) = \tilde{D}_{ii,\beta\alpha}^{(2)}(\mathbf{r})$  Gebrauch gemacht.

### Diffusion

Die Diffusionselemente erhalten wir, wenn wir die Beiträge der Ableitungen zweiter Ordnung sammeln. Für  $D_{ii}^{(2)}(\mathbf{r})$  ergibt sich

$$D_{ii}^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{r_{i,x}^2(\mathbf{r})}{r_i^2} \tilde{D}_{ii,xx}^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{r_{i,y}^2(\mathbf{r})}{r_i^2} \tilde{D}_{ii,yy}^{(2)}(\mathbf{r}) + 2 \frac{r_{i,x}(\mathbf{r})r_{i,y}(\mathbf{r})}{r_i^2} \tilde{D}_{ii,xy}^{(2)}(\mathbf{r}). \quad (2.33)$$

Für  $D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})$  ergibt sich

$$D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) = 2 \left( \frac{r_{i,x}(\mathbf{r})}{r_i} \frac{r_{j,x}(\mathbf{r})}{r_j} \tilde{D}_{ij,xx}^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{r_{i,y}(\mathbf{r})}{r_i} \frac{r_{j,y}(\mathbf{r})}{r_j} \tilde{D}_{ij,yy}^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{r_{i,x}(\mathbf{r})}{r_i} \frac{r_{j,y}(\mathbf{r})}{r_j} \tilde{D}_{ij,xy}^{(2)}(\mathbf{r}) + \frac{r_{i,y}(\mathbf{r})}{r_i} \frac{r_{j,x}(\mathbf{r})}{r_j} \tilde{D}_{ij,yx}^{(2)}(\mathbf{r}) \right), \quad (2.34)$$

wobei wir wieder die Symmetrie  $\tilde{D}_{ij,\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{r}) = \tilde{D}_{ji,\beta\alpha}^{(2)}(\mathbf{r})$  verwendet haben. Wegen der zyklischen Symmetrie, die dem System innewohnt, können wir alle fehlenden Drift- und Diffusionsterme durch Permutation der Indizes erhalten.

Damit haben wir gezeigt, dass der Term **3** in (2.11) im Falle isotropen Rauschens folgendem Term entspricht

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{r} \delta^3(\cdot) \sum_{\substack{i,j=1 \\ \alpha,\beta \in \{x,y\}}}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_{i,\alpha} \partial r_{j,\beta}} \tilde{D}_{ij,\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) = \quad (2.35)$$

$$- \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}^{\text{noise}}(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, t) \quad (2.36)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) F(\mathbf{r}, t), \quad (2.37)$$

mit der rauschinduzierten Drift (2.32) und den Diffusionselementen (2.33) und (2.34). Im folgenden Abschnitt werden wir dafür Sorge tragen, dass die rauschinduzierte Drift und die Diffusionsmatrix Funktionen von  $\mathbf{r}$  sind.

### Mitbewegtes Koordinatensystem

Um die  $r_{i,\alpha}$  durch  $\mathbf{r}$  auszudrücken, betrachten wir Abbildung 2.2.

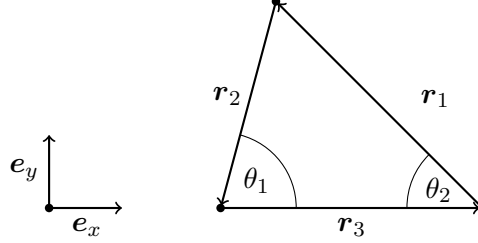


Abbildung 2.2.: zur Nomenklatur des Dreiecks

Links neben dem Dreieck ist die Orientierung unserer Wahl der Basisvektoren dargestellt. Sie sind so gewählt, dass die  $x$ -Richtung immer in Richtung von  $\mathbf{r}_3$  zeigt. Die Winkel zwischen  $\mathbf{e}_x$  und  $\mathbf{r}_i$  (entgegen dem Uhrzeigersinn) nennen wir  $\psi_i$  (siehe Abbildung (2.3)). Offensichtlich gelten  $\psi_3 = 0$  und  $\psi_2 = -\psi'_2$ .

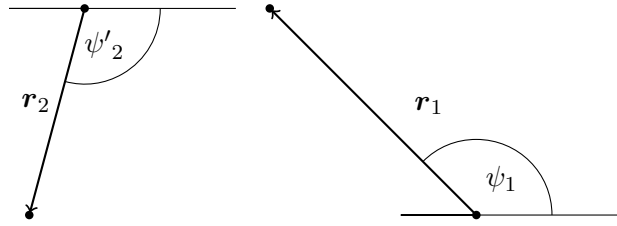


Abbildung 2.3.: Winkel, zur Parametrisierung der  $\mathbf{r}_i$

Wir können nun die Parametrisierung durchführen

$$\begin{aligned}
 r_{1,x} &= r_1 \cos \psi_1 = r_1 \cos(\pi - \theta_2) \\
 r_{1,y} &= r_1 \sin \psi_1 = r_1 \sin(\pi - \theta_2) \\
 r_{2,x} &= r_2 \cos \psi_2 = r_2 \cos(\theta_1 - \pi) \\
 r_{2,y} &= r_2 \sin \psi_2 = r_2 \sin(\theta_1 - \pi) \\
 r_{3,x} &= r_3 \cos \psi_3 = r_3 \\
 r_{3,y} &= r_3 \sin \psi_3 = 0.
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

Hier haben wir im letzten Schritt den Strahlensatz verwendet. Wir können die Innenwinkel eines Dreiecks durch seine Seitenlängen darstellen. Dazu verwenden wir den Kosinussatz [Bro06]

$$\theta_k = \arccos \left( \frac{r_i^2 + r_j^2 - r_k^2}{2r_i r_j} \right). \tag{2.39}$$

Wir haben also gesehen, dass sich die Koordinaten  $r_{i,x}$  und  $r_{i,y}$  der Abstandsvektoren  $\mathbf{r}_i$  der PunktWirbel, nach der Festlegung eines sich mit dem Dreieck

bewegenden Koordinatensystems durch die Seitenlängen des Dreiecks  $\mathbf{r}$  angeben lassen. Im folgenden Abschnitt werden wir sehen, dass, unter bestimmten Voraussetzungen, die Einträge der Diffusionsmatrix nur von  $\mathbf{r}$  und eben diesen Koordinaten  $r_{i,x}$  und  $r_{i,y}$  abhängen und somit auch allein durch  $\mathbf{r}$  dargestellt werden können.

## 2.4. Festlegung der Diffusion

Nachdem wir einen Formalismus entwickelt haben, eine FPG im Relativraum in eine FPG im Betraagsraum zu überführen, wird in diesem Abschnitt die Diffusionsmatrix festgelegt.

### 2.4.1. Diffusionsmatrix und Fluktuationen

Die Diffusionsmatrix von Teilchen im turbulenten Feld, welche die Geschwindigkeitsstatistik nicht stark beeinflussen, entspricht der Zweipunktkorrelation, falls diese zeitlich dekorreliert ist. Eine ausführliche Herleitung findet sich in [Rat10]. Im Ortsraum gilt unter Berücksichtigung der Konventionen von Abbildung 2.1

$$\tilde{D}_{ij}^{(2)}(\underline{\mathbf{x}}) = \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \rangle = \underline{C}(\mathbf{r}_k, \mathbf{x}_i), \quad (2.40)$$

wobei wir hier auf die zeitlichen Argumente verzichtet haben und dies auch im Folgenden tun werden.

Im Relativraum benötigen wir die relativen Zweipunktkorrelationen. Da wir uns auf drei Punktwirbel im Raum beschränken, betrachten wir einerseits die Diagonalblöcke

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ii}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_j))(\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_j)) \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \rangle + \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \rangle - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \rangle - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \rangle \\ &= \underline{C}(0, \mathbf{x}_k) + \underline{C}(0, \mathbf{x}_j) - \underline{C}(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_j) - \underline{C}(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_j) \end{aligned} \quad (2.41)$$

und andererseits die Nichtdiagonalblöcke

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ij}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= \langle (\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_j))(\mathbf{u}(\mathbf{x}_i) - \mathbf{u}(\mathbf{x}_k)) \rangle \\ &= \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \rangle + \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \rangle - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_i) \mathbf{u}(\mathbf{x}_j) \rangle - \langle \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \rangle \\ &= \underline{C}(\mathbf{r}_j, \mathbf{x}_k) + \underline{C}(\mathbf{r}_i, \mathbf{x}_j) - \underline{C}(\mathbf{r}_k, \mathbf{x}_i) - \underline{C}(0, \mathbf{x}_k) \end{aligned} \quad (2.42)$$

der 6x6 Diffusionsmatrix  $\tilde{D}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}})$ , wobei wir Sorge tragen müssen, dass diese durch  $\underline{\mathbf{r}}$  ausgedrückt werden kann.

Das geschieht, indem wir uns auf homogene Turbulenz beschränken. Dann dürfen die Zweipunktkorrelationen<sup>4</sup> nicht vom Ort abhängen und wir erhalten

$$\begin{aligned} \tilde{D}_{ii}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= 2(\underline{C}(0) - \underline{C}(\mathbf{r}_i)) \\ \tilde{D}_{ij}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= \underline{C}(\mathbf{r}_j) + \underline{C}(\mathbf{r}_i) - \underline{C}(\mathbf{r}_k) - \underline{C}(0). \end{aligned} \quad (2.43)$$

<sup>4</sup>Im Folgenden wird die Zweipunktkorrelation Korrelationsfunktion genannt.

Es lässt sich zeigen (siehe z.B. [AFHF10] im Anhang von Kapitel 9), dass isotrope<sup>5</sup> Tensoren zweiter Ordnung im euklidischen Raum folgende Gestalt besitzen

$$C_{\alpha\beta}(\tilde{\mathbf{r}}) = a(\tilde{r})\delta_{\alpha,\beta} + b(\tilde{r})\frac{\tilde{r}_\alpha\tilde{r}_\beta}{\tilde{r}^2}. \quad (2.44)$$

Wir können die Korrelationsfunktion durch den Anteil parallel zu  $\tilde{\mathbf{r}}$  (die longitudinale Korrelationsfunktion  $C_{rr}(\tilde{r})$ ) und einen Anteil senkrecht zu  $\tilde{\mathbf{r}}$  (die transversale Korrelationsfunktion  $C_{tt}(\tilde{r})$ ) darstellen. Es gilt

$$\begin{aligned} a(\tilde{r}) &= C_{tt}(\tilde{r}) \\ b(\tilde{r}) &= C_{rr}(\tilde{r}) - C_{tt}(\tilde{r}). \end{aligned} \quad (2.45)$$

Berücksichtigen wir nun noch die Inkompressibilität des Geschwindigkeitsfeldes, erhalten wir in zwei Dimensionen<sup>6</sup> die Relation zwischen  $C_{rr}(\tilde{r})$  und  $C_{tt}(\tilde{r})$

$$C_{tt}(\tilde{r}) = \frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}C_{rr}(\tilde{r})), \quad (2.46)$$

so dass die Diffusionmatrixelemente durch nur eine Funktion festgelegt werden. Diese sollte das selbstähnliche Verhalten berücksichtigen. Nach (1.70) besitzt die longitudinale Strukturfunktion turbulenter Geschwindigkeitsinkremente im Inertialbereich eine exponentielle Abhängigkeit von  $\tilde{r}$

$$S^2(\tilde{r}) = c_2\tilde{r}^{\zeta_2}. \quad (2.47)$$

Mittels des Zusammenhangs (1.66)

$$S^2(\tilde{r}) = A - 2C_{rr}(\tilde{r}), \quad (2.48)$$

gilt demnach für die longitudinalen Korrelationsfunktionen

$$C_{rr}(\tilde{r}) = \frac{1}{2} \left( A - c_2\tilde{r}^{\zeta_2} \right), \quad (2.49)$$

wobei die Konstante  $A$  wegen des gleichhäufigen Auftretens von Minuenden und Subtrahenden in (2.43) zu Null gesetzt werden kann. Wir lassen den Exponenten variabel<sup>7</sup> und benennen ihn in Anlehnung an die in der Literatur übliche Bezeichnung mit  $\xi$ . Mit  $B = -c_2/2$  erhalten wir

$$C_{rr}(\tilde{r}) = B\tilde{r}^\xi. \quad (2.50)$$

Damit erhalten wir nach (2.46) die transversale Korrelationsfunktion

$$C_{tt}(\tilde{r}) = B(1 + \xi)\tilde{r}^\xi \quad (2.51)$$

und der Korrelationstensor besitzt die explizite Form

$$C_{\alpha\beta}(\tilde{\mathbf{r}}) = B\tilde{r}^\xi \left( (1 + \xi)\delta_{\alpha,\beta} - \xi\frac{\tilde{r}_\alpha\tilde{r}_\beta}{\tilde{r}^2} \right). \quad (2.52)$$

---

<sup>5</sup>In diesem Fall beinhaltet Isotropie auch Reflexionssymmetrie.

<sup>6</sup>In drei Dimensionen erhalten wir  $C_{tt}(\tilde{r}) = \frac{1}{2\tilde{r}}\frac{\partial}{\partial \tilde{r}} (\tilde{r}^2C_{rr}(\tilde{r}))$ , vergleiche [AFHF10].

<sup>7</sup>Zumeist wird für diesen Exponenten in der Literatur  $0 \leq \xi \leq 2$  angenommen. In der Kolmogorovschen Theorie von 1941 ergibt sich  $\xi = 2/3$ .

Dieser Korrelationstensor liegt auch dem Kraichnan-Modell [Kra68] zugrunde. Dort wird das Verhalten eines passiven Skalars im turbulenten Feld untersucht. Wir werden daher im Folgenden auch vom Kraichnan-Feld sprechen, wenn der FPG Korrelationen der Form (2.52) zugrunde liegen. Mit den Konvention aus dem vorhergehenden Abschnitt können wir die Koordinaten  $r_{i,\alpha}$  und  $r_{i,\beta}$  von  $\mathbf{r}_i$  durch die Seitenlängen des Dreiecks  $\mathbf{r}$  ausdrücken.

### Fazit

Wir können nun für beliebige isotrope Korrelationen die FPG in  $\mathbf{r}$  formulieren

$$\partial_t F(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r})F(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r})F(\mathbf{r}, t). \quad (2.53)$$

Dabei besteht die Drift

$$\mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r}) = \mathbf{D}^{(1),\text{det}}(\mathbf{r}) + \mathbf{D}^{(1),\text{noise}}(\mathbf{r}) \quad (2.54)$$

aus zwei Teilen. Der deterministischen Teil (2.25) spiegelt die Wirkung der Punktwirbel untereinander wieder. Der rauschinduzierten Teil (2.36) stammt aus der Tatsache, dass in der Punktwirbeldynamik keine Länge ausgezeichnet ist. Damit besitzt eine kongruente Größenänderung des Dreiecks keine Rückstellkraft und ist anfällig für die stochastischen Kräfte. Es ist bekannt, dass sich Teilchen in einem stochastischen Feld im Laufe der Zeit im Mittel voneinander entfernen. Dieses Verhalten beschreibt die rauschinduzierte Drift. Der Einfluss der Diffusion aus (2.37) sorgt dafür, dass eine Verteilungsfunktion im Laufe der Zeit „verschmiert“. Im folgenden Abschnitt werden wir die rauschinduzierten Drift und die Diffusion explizit berechnen.

### 2.4.2. Additives Rauschen

Der einfachste Fall korrespondiert mit einem Skalierungsindex  $\xi = 0$ . Dann sind die stochastischen Kräfte gaußverteilt und additiv. Das bedeutet, die Diffusionsmatrix im Ortsraum ist proportional zu Einheitsmatrix

$$\tilde{D}_{ij,\alpha\beta}^{(2)}(\mathbf{x}) = B \delta_{\alpha,\beta} \delta_{i,j}. \quad (2.55)$$

Im Relativkoordinatenraum gilt nach (2.41) und (2.42)

$$\tilde{D}^{(2)} = B \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad (2.56)$$

Setzen wir diese in (2.32) ein, erhalten wir wegen  $r_{1,x}^2 + r_{1,y}^2 = r_1^2$  die rauschinduzierte Drift

$$D_i^{(1),\text{noise}} = \frac{3B}{r_i}. \quad (2.57)$$

Für die diagonalen Diffusionselemente erhalten wir, wenn wir (2.56) in (2.33) einsetzen

$$D_{11}^{(2)} = D_{22}^{(2)} = D_{33}^{(2)} = 2B. \quad (2.58)$$

Bei der Berechnung der nichtdiagonalen Diffusionselemente

$$\begin{aligned} D_{12}^{(2)} = D_{21}^{(2)} &= B \frac{r_1^2 + r_2^2 - r_3^2}{r_1 r_2} \\ D_{13}^{(2)} = D_{31}^{(2)} &= B \frac{r_1^2 + r_3^2 - r_2^2}{r_1 r_3} \\ D_{23}^{(2)} = D_{32}^{(2)} &= B \frac{r_2^2 + r_3^2 - r_1^2}{r_2 r_3} \end{aligned} \quad (2.59)$$

begegnet uns nach dem Einsetzen der Diffusionsmatrix (2.56) in (2.34) das Skalarprodukt<sup>8</sup>  $\frac{r_i}{r_i} \cdot \frac{r_j}{r_j} = -\cos \theta_k$ , welches wir durch den Richtungskosinus ausdrücken wollen (siehe Abbildung 2.4). Diesen wiederum formulieren wir über den Kosinussatz [Bro06]

$$\cos \theta_k = \frac{r_i^2 + r_j^2 - r_k^2}{2r_i r_j} \quad (2.60)$$

durch die Seitenlängen des Dreiecks.

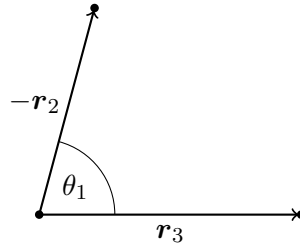


Abbildung 2.4.: zum Richtungskosinus

### 2.4.3. Dynamik im Kraichnan-Feld

Um die rauschinduzierte Drift und die Diffusion im Kraichnan-Feld zu berechnen, benötigen wir die Diffusionsmatrix im Relativraum (2.43). Dazu setzen wir die Korrelationstensoren (2.52) ein und können dann mit den Ergebnissen aus Abschnitt 2.3 oben genannte Größen im Betragsraum berechnen.

<sup>8</sup>Das gleiche Ergebnis liefert natürlich auch die allgemeinere Formel (2.38):

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r_1 r_2} (r_{1,x} r_{2,x} + r_{1,y} r_{2,y}) = \\ &\cos \psi_1 \cos \psi_2 + \sin \psi_1 \sin \psi_2 = \cos(\psi_1 - \psi_2) = \cos(2\pi - \theta_1 - \theta_2) = \cos(3\pi + \theta_3) = -\cos \theta_3 \\ &\text{oder} \\ &\frac{1}{r_i r_3} (r_{i,x} r_{3,x} + r_{i,y} r_{3,y}) = \\ &\cos \psi_i \cos \psi_3 + \sin \psi_i \sin \psi_3 = \cos \psi_i = \cos(\pi - \theta_k) = -\cos(\theta_k) \\ &\text{für } i, k \in \{1, 2\} \text{ und } i \neq k \end{aligned}$$

Die Diagonalelemente der Diffusionsmatrix in Relativkoordinaten lauten

$$\tilde{D}_{ii}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) = -2C(\mathbf{r}_i). \quad (2.61)$$

Für die rauschinduzierte Drift erhalten wir damit nach (2.32)

$$\begin{aligned} D_i^{(1),\text{noise}} &= \frac{1}{2r_i} [(1 + \cos^2 \psi_i)C_{xx}(\mathbf{r}_i) + (1 + \sin^2 \psi_i)C_{yy}(\mathbf{r}_i) + 2 \cos \psi_i \sin \psi_i C_{xy}(\mathbf{r}_i)] \\ &= Br_i^{\xi-1} [(1 + \cos^2 \psi_i + 1 + \sin^2 \psi_i)(\xi + 1) \\ &\quad - \xi((1 + \cos^2 \psi_i) \cos^2 \psi_i + (1 + \sin^2 \psi_i) \sin^2 \psi_i + 2 \cos^2 \psi_i \sin^2 \psi_i)] \\ &= B(\xi + 3)r_i^{\xi-1}. \end{aligned} \quad (2.62)$$

Die einzigen Beiträge der Diagonalelemente der Diffusionsmatrix in Relativkoordinaten stammen ebenfalls aus (2.61). Es gilt nach (2.33)

$$\begin{aligned} C_{ii}(\mathbf{r}) &= 2 (\cos^2 \psi_i C_{xx}(\mathbf{r}_i) + \sin^2 \psi_i C_{yy}(\mathbf{r}_i) + 2 \cos \psi_i \sin \psi_i C_{xy}(\mathbf{r}_i)) \\ &= 2Br_i^{\xi} [(\cos^2 \psi_i + \sin^2 \psi_i)(\xi + 1) \\ &\quad - \xi(\cos^4 \psi_i + \sin^4 \psi_i + 2 \cos^2 \psi_i \sin^2 \psi_i)] \\ &= 2Br_i^{\xi}. \end{aligned} \quad (2.63)$$

Die Nichtdiagonalelemente der Diffusionsmatrix in Relativkoordinaten lauten

$$\tilde{D}_{ij}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) = C(\mathbf{r}_j) + C(\mathbf{r}_i) - C(\mathbf{r}_k). \quad (2.64)$$

Einsetzen in (2.34) liefert uns die Nichtdiagonalelemente der Diffusionsmatrix im Betraumsraum

$$\begin{aligned} D_{ij}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= 2 \left( \cos \psi_i \cos \psi_j (C_{xx}(\mathbf{r}_i) + C_{xx}(\mathbf{r}_j) - C_{xx}(\mathbf{r}_k)) \right. \\ &\quad \left. + \sin \psi_i \sin \psi_j (C_{yy}(\mathbf{r}_i) + C_{yy}(\mathbf{r}_j) - C_{yy}(\mathbf{r}_k)) \right. \\ &\quad \left. + (\cos \psi_i \sin \psi_j + \sin \psi_i \cos \psi_j) (C_{xy}(\mathbf{r}_i) + C_{xy}(\mathbf{r}_j) - C_{xy}(\mathbf{r}_k)) \right) \\ &= -B \left( \left( 2r_i^{\xi} + 2r_j^{\xi} - (2 + \xi)r_k^{\xi} \right) \cos(\psi_i - \psi_j) + \xi r_k^{\xi} \cos(\psi_i + \psi_j - 2\psi_k) \right), \end{aligned} \quad (2.65)$$

wobei wir von einigen trigonometrischen Identitäten [Bro06] Gebrauch gemacht haben und die Winkel  $\psi = \psi(\mathbf{r})$  von den Längen des Dreiecks abhängen. Mit der hier verwendeten Konvention  $\psi_1 = (\pi - \theta_2)$ ,  $\psi_2 = (\theta_2 - \pi)$  und  $\psi_3 = 0$ , sowie der Innenwinkelsumme des Dreiecks  $\pi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$  und der Eigenschaften des Kosinus,  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$  und  $\cos(-\theta) = \cos \theta$ , können wir also schreiben

$$\begin{aligned} D_{12}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= B \left( \left( 2r_1^{\xi} + 2r_2^{\xi} - (2 + \xi)r_3^{\xi} \right) \cos \theta_3 - \xi r_3^{\xi} \cos(\theta_1 - \theta_2) \right) \\ D_{13}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= B \left( \left( 2r_1^{\xi} + 2r_3^{\xi} - (2 + \xi)r_2^{\xi} \right) \cos \theta_2 - \xi r_2^{\xi} \cos(\theta_1 - \theta_3) \right) \\ D_{23}^{(2)}(\underline{\mathbf{r}}) &= B \left( \left( 2r_2^{\xi} + 2r_3^{\xi} - (2 + \xi)r_1^{\xi} \right) \cos \theta_1 - \xi r_1^{\xi} \cos(\theta_2 - \theta_3) \right), \end{aligned} \quad (2.66)$$

wobei die Winkel  $\theta_i$  mittels des Kosinussatzes (2.60) durch  $\mathbf{r}$  ausgedrückt werden können.

## 2.5. Koordinatentransformation nach $U$

### 2.5.1. Transformation

Die rauschinduzierte Drift lässt den Umfang des Dreiecks im Laufe der Zeit anwachsen. Um eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Dreiecks direkt zugänglich zu machen, führen wir neue Koordinaten ein, von denen nur eine, der Umfang  $U$ , mit der Größe des Dreiecks zusammenhängt. Die anderen beiden Koordinaten  $f_1$  und  $f_2$  geben das Verhältnis der Seiten zum Umfang wieder und bestimmen so die Gestalt des Dreiecks. Sinnvolle Seitenverhältnisse  $f_i$  erstrecken sich über den Bereich  $0 < f_i < \frac{1}{2}$ . In Abbildung 2.5 sind einige Punkte im Phasenraum mit den korrespondierenden Dreiecken maßstabsgetreu dargestellt. Die rechte Seite der Beispielkonfigurationen entspricht  $r_1$ , die linke  $r_2$  und die untere  $r_3$ . Wenn im Folgenden von spitzen Dreiecken gesprochen wird, sind die Zustände gemeint, bei denen eine Seite viel kleiner als die anderen beiden ist (zu finden in den Ecken des  $f_1, f_2$ -Phasenraums in Abbildung 2.5), während die Bereiche an den Randregionen, die keine spitzen Dreiecke sind, als kollineare Zustände bezeichnet werden.

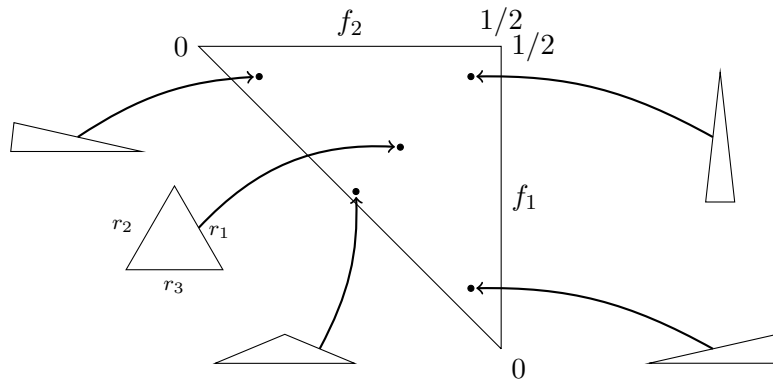


Abbildung 2.5.: Definitionsbereich von  $f$

**Hintransformation:**  $U(\mathbf{r})$

Wir definieren  $U(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U \\ f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  als:

$$\begin{aligned} U &= r_1 + r_2 + r_3 \\ f_1 &= \frac{r_1}{r_1 + r_2 + r_3} \\ f_2 &= \frac{r_2}{r_1 + r_2 + r_3} \end{aligned} \tag{2.67}$$



**Rücktransformation:**  $\mathbf{r}(\mathbf{U})$

$\mathbf{r}$  lässt sich durch  $\mathbf{U}$  ausdrücken:

$$\begin{aligned} r_1 &= U f_1 \\ r_2 &= U f_2 \\ r_3 &= U(1 - f_1 - f_2). \end{aligned} \quad (2.68)$$

Da wir hier eine reine Koordinatentransformation durchführen wollen, können wir die allgemeine Formel zur Variablentransformation der FPG heranziehen [Ris89].

Bei einer Koordinatentransformation der Fokker-Planck-Gleichung von

$$\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}, t) = -\nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}, t) \quad (2.69)$$

nach

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{f}(\mathbf{U}, t) = -\nabla_{\mathbf{U}} \cdot \hat{\mathbf{D}}^{(1)}(\mathbf{U}) \hat{f}(\mathbf{U}, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} \hat{D}_{ij}^{(2)}(\mathbf{U}) \hat{f}(\mathbf{U}, t) \quad (2.70)$$

ändern sich Drift und Diffusionskoeffizienten wie folgt:

$$\begin{aligned} \hat{D}_{\mathbf{k}}^{(1)}(\mathbf{U}) &= \sum_i \left( J_{ki}(\mathbf{r}) D_i^{(1)}(\mathbf{r}) + \sum_j \left( H_{ij}^k(\mathbf{r}) D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \right) \right) \\ \hat{D}_{\mathbf{kr}}^{(2)}(\mathbf{U}) &= \sum_{i,j} \left( J_{ki}(\mathbf{r}) J_{rj}(\mathbf{r}) D_{ij}^{(2)}(\mathbf{r}) \right) \end{aligned} \quad (2.71)$$

wobei  $\mathbf{r}$  durch  $\mathbf{U}$  (2.68) ausgedrückt werden muss. Wir lassen die Hütchen im Folgenden weg.

Es ist

$$J_{ki}(\mathbf{r}) = \frac{\partial U_k}{\partial r_i} \quad (2.72)$$

die Jakobi-Matrix von  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$

und

$$H_{ij}^k(\mathbf{r}) = \frac{\partial^2 U_k}{\partial r_i \partial r_j} \quad (2.73)$$

die Hesse-Matrix von  $U_k(\mathbf{r})$ .

### 2.5.2. Explizite Transformation

Wir verwenden bei der Berechnung der Transformation Mathematica<sup>TM</sup>, Version 8. Der Quelltext befindet sich auf der beigelegten CD. Im folgenden Kapitel 3 sind die mit Mathematica<sup>TM</sup> berechneten Terme von Drift und Diffusion durch algebraische Umformungen in eine ansehnlichere Form gebracht worden. Dazu haben wir einige Beziehungen benutzt, die bereits in den vorherigen Kapiteln erwähnt wurden. In den beiden folgenden Abschnitten geben wir nur die Abhängigkeit von  $U$  an und begründen diese.

#### Additives Rauschen

Nach dieser Koordinatentransformation erhalten wir für die FPG in  $\mathbf{U}$ , wenn wir die Tilden wieder weglassen und abkürzend  $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$  verwenden:

**Drift:**

$$\begin{aligned} D_1^{(1)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U} d_1^{(1)}(\mathbf{f}) \\ D_2^{(1)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U^2} d_2^{(1)}(\mathbf{f}) \\ D_3^{(1)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U^2} d_3^{(1)}(\mathbf{f}) \end{aligned} \tag{2.74}$$

**Diffusion:**

$$\begin{aligned} D_{11}^{(2)}(\mathbf{U}) &= d_{11}^{(2)}(\mathbf{f}) \\ D_{12}^{(2)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U} d_{12}^{(2)}(\mathbf{f}) \\ D_{13}^{(2)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U} d_{13}^{(2)}(\mathbf{f}) \\ D_{22}^{(2)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U^2} d_{22}^{(2)}(\mathbf{f}) \\ D_{33}^{(2)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U^2} d_{33}^{(2)}(\mathbf{f}) \\ D_{23}^{(2)}(\mathbf{U}) &= \frac{1}{U^2} d_{23}^{(2)}(\mathbf{f}) \end{aligned} \tag{2.75}$$

### Kraichnan-Feld

Für die Größen im Kraichnan-Feld gilt entsprechend:

#### Drift:

$$\begin{aligned}
 D_1^{(1)}(\mathbf{U}, \xi) &= \frac{1}{U} d_1^{(1),\text{det}}(\mathbf{f}) + U^{\xi-1} d_1^{(1),\text{noise}}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_2^{(1)}(\mathbf{U}, \xi) &= \frac{1}{U^2} d_2^{(1),\text{det}}(\mathbf{f}) + U^{\xi-2} d_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_3^{(1)}(\mathbf{U}, \xi) &= \frac{1}{U^2} d_3^{(1),\text{det}}(\mathbf{f}) + U^{\xi-2} d_3^{(1),\text{noise}}(\mathbf{f}, \xi)
 \end{aligned} \tag{2.76}$$

#### Diffusion:

$$\begin{aligned}
 D_{11}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) &= U^\xi d_{11}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_{12}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) &= U^{\xi-1} d_{12}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_{13}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) &= U^{\xi-1} d_{13}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_{22}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) &= U^{\xi-2} d_{22}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_{33}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) &= U^{\xi-2} d_{33}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi) \\
 D_{23}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) &= U^{\xi-2} d_{23}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi)
 \end{aligned} \tag{2.77}$$

### 2.5.3. Fazit

Wir haben in diesem Abschnitt die FPG transformiert, um Effekte, welche die Größe des Dreiecks betreffen, besser greifbar zu machen. Es hat sich gezeigt, dass die Abhängigkeiten der Dynamik von dem Umfang  $U$  relativ einfach im Vergleich zu der Abhängigkeit der formgebenden Faktoren  $\mathbf{f}$  sind. Diese Tatsache lässt sich leicht nachvollziehen, wenn man sich vor Augen führt, wie Drift und Diffusion im Betragsraum, sowie die Jakobi-Matrix und die Hesse-Matrix von dem Umfang des Dreiecks  $U$  abhängen:

#### 1. Drift:

(additives Rauschen:)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^{(1),\text{det}}(\mathbf{r}) &\propto 1/U \\
 \mathbf{D}^{(1),\text{noise}}(\mathbf{r}) &\propto 1/U
 \end{aligned} \tag{2.78}$$

(Kraichnan-Feld:)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}^{(1),\text{det}}(\mathbf{r}, \xi) &\propto 1/U \\
 \mathbf{D}^{(1),\text{noise}}(\mathbf{r}) &\propto U^{\xi-1}
 \end{aligned} \tag{2.79}$$

2. Diffusion:  
(additives Rauschen:)

$$\underline{D}^{(2)}(\mathbf{r}) \text{ unabhängig von } U \quad (2.80)$$

(Kraichnan-Feld:)

$$\underline{D}^{(2)}(\mathbf{r}, \xi) \propto U^\xi \quad (2.81)$$

3. Jakobi-Matrix (2.72):

$$\begin{aligned} J_{1i} &\propto 1 \\ J_{2i} &\propto \frac{1}{U} \\ J_{3i} &\propto \frac{1}{U} \end{aligned} \quad (2.82)$$

4. Hesse-Matrix (2.73):

$$\begin{aligned} H_{ij}^1 &\propto \frac{1}{U} \\ H_{ij}^2 &\propto \frac{1}{U^2} \\ H_{ij}^3 &\propto \frac{1}{U^2} \end{aligned} \quad (2.83)$$

Die genauen Abhängigkeiten von Drift und Diffusion von  $\mathbf{f}$  sind längere Terme, die wir an geeigneter Stelle im folgenden Kapitel und im Anhang angeben. Für die zugrundeliegende FPG

$$\partial_t f(\mathbf{U}, t) = \left( -\nabla_{\mathbf{U}} \cdot \mathbf{D}^{(1)}(\mathbf{U}) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial U_i \partial U_j} D_{ij}^{(2)}(\mathbf{U}) \right) f(\mathbf{U}, t) \quad (2.84)$$

liegt keine elementare Lösung vor. Daher werden wir im Folgenden eine qualitative Analyse von Drift und Diffusion durchführen.

## 3. Diskussion der Dynamik

Eine analytische Lösung ist wegen der hohen Komplexität der FPG (2.84) mit den bisher entwickelten Standardmethoden der Mathematik nicht möglich. Wir können aber, wie in Abschnitt 1.3.2 erwähnt, aus der Form von Drift und Diffusion erste qualitative Eindrücke erhalten. Die Evolution der Verteilungsfunktion wird durch zwei Einflüsse bestimmt. Einerseits durch die Drift, deren Wirkung wir uns stets in dem Sinne veranschaulichen wollen, dass wir uns die Verteilungsfunktion stark lokalisiert vorstellen. Und andererseits durch die Diffusion, die typischerweise ein Zerfließen der Verteilungsfunktion bewirkt<sup>1</sup>. Über die Betrachtung dieser Größen machen wir uns ein Bild von der Dynamik des Systems dreier Punktwirbel im turbulenten Feld. Dabei werden wir uns damit begnügen, Untermannigfaltigkeiten des Phasenraums, in denen  $U$  konstant ist, zu betrachten. Wegen der relativ einfachen Abhängigkeit der Drift und der Diffusion von  $U$  können wir auf das Verhalten im gesamten Phasenraum schließen.

### 3.1. Deterministische Drift

Im Falle verschwindenden Rauschens ( $B = 0$ ) stimmt die durch die PFG festgelegte Dynamik der Verteilungsfunktion (mit deltaförmigen Anfangsbedingungen) mit der deterministische Punktwirbeldynamik überein.

#### Umfang

Wir erhalten nach den Rechnungen im vorhergehenden Abschnitt<sup>2</sup>

$$D_1^{(1),\text{det}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{U} \frac{\sqrt{(2f_1 - 1)(2f_2 - 1)(2f_1 + 2f_2 - 1)}}{4f_1^2 f_2^2 f_3^2 \pi} \cdot (\Gamma_1 f_1 (f_2^2 - f_3^2) + (\Gamma_2 f_2 (f_3^2 - f_1^2) + (\Gamma_3 f_3 (f_1^2 - f_2^2))), \quad (3.1)$$

wobei wir hier der einfachen Darstellung halber den Parameter  $f_3 = 1 - f_1 - f_2$  eingeführt haben. Diesen werden wir auch im weiteren Verlauf dieses Kapitels verwenden. In Abbildung 3.1 ist der Driftterm bei konstantem Umfang  $U$  in  $\mathbf{f}$  dargestellt. Wir erkennen, dass es drei Bereiche gibt, in denen  $U$  anwächst und drei Bereiche, in denen  $U$  abnimmt.

<sup>1</sup>In Abschnitt 3.3.1 führt die Diffusion zu einem lokalen Anwachsen der Verteilungsfunktion.

<sup>2</sup>Das Ergebnis ist natürlich konsistent zur deterministischen Punktwirbeldynamik  $\dot{U} = \sqrt{L_1} + \sqrt{L_2} + \sqrt{L_3}$  (vergleiche (1.21)).

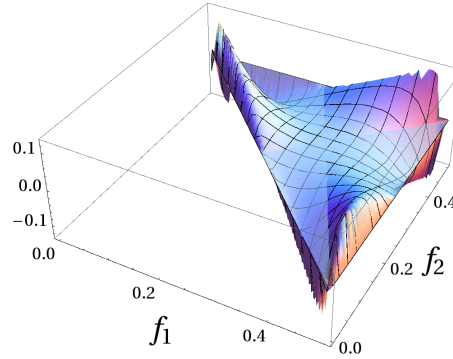


Abbildung 3.1.: Deterministische Drift  $D_1^{(1),\text{det}}(\mathbf{U})$  des Umfangs  
(mit  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$  und  $U = 1$ )

### Form

Um ein Gefühl für die Dynamik zu bekommen, haben wir in Abbildung 3.1 die Driftkomponenten der formgebenden Faktoren dargestellt

$$D_2^{(1),\text{det}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{U^2} \frac{\sqrt{(-1 + 2f_1)(-1 + 2f_2)(-1 + 2f_1 + 2f_2)}}{4f_1 f_2^2 f_3^2 \pi} \cdot (\Gamma_1 (f_2^3 - f_3^3 + f_2^2 f_3 - f_3^2 f_2) + \Gamma_2 f_2 (f_1^2 - f_3^2) + \Gamma_3 f_3 (f_2^2 - f_1^2)). \quad (3.2)$$

$D_3^{(1),\text{det}}(\mathbf{U})$  entspricht  $D_2^{(1),\text{det}}(\mathbf{U})$ , wenn die Indizes 1 und 2 vertauscht werden. Wir sehen, dass im Phasenraumpunkt des äquilateralen Dreiecks  $\mathbf{U} = (U, 1/3, 1/3)^T$  mit der Seitenlänge  $U/3$  sowohl die formgebenden Driftkomponenten, als auch die des Umfangs verschwinden. Dies muss natürlich so sein, denn er entspricht den singulären Phasenraumpunkten, auf die wir in Abschnitt 1.1.5 eingegangen sind. Das lokale Verhalten dieses Fixpunktes können wir mittels einer linearen Stabilitätsanalyse<sup>3</sup> untersuchen. Dazu linearisieren wir das System um den Zustand des gleichseitigen Dreiecks der Seitenlänge  $U^*$ . Die Eigenwerte der Jakobi-Matrix lauten

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0 \\ \lambda_2 &= \frac{3\sqrt{3}i}{2\pi U^*} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1} \\ \lambda_3 &= -\frac{3\sqrt{3}i}{2\pi U^*} \sqrt{\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Das linearisierte System besitzt also einen Eigenvektor mit dem Eigenwert Null. Dieser korrespondiert zu einer reinen Änderung des Umfangs. Die anderen beiden Eigenwerte sind betragsmäßig gleich und besitzen entgegengesetzte Vorzeichen. Sie sind rein imaginär, wenn  $\Gamma_1 \Gamma_2 + \Gamma_2 \Gamma_3 + \Gamma_3 \Gamma_1 > 0$  gilt. Dann ist der

<sup>3</sup>Eine Darstellung der Technik der linearen Stabilitätsanalyse findet sich beispielsweise in [AFHF10].

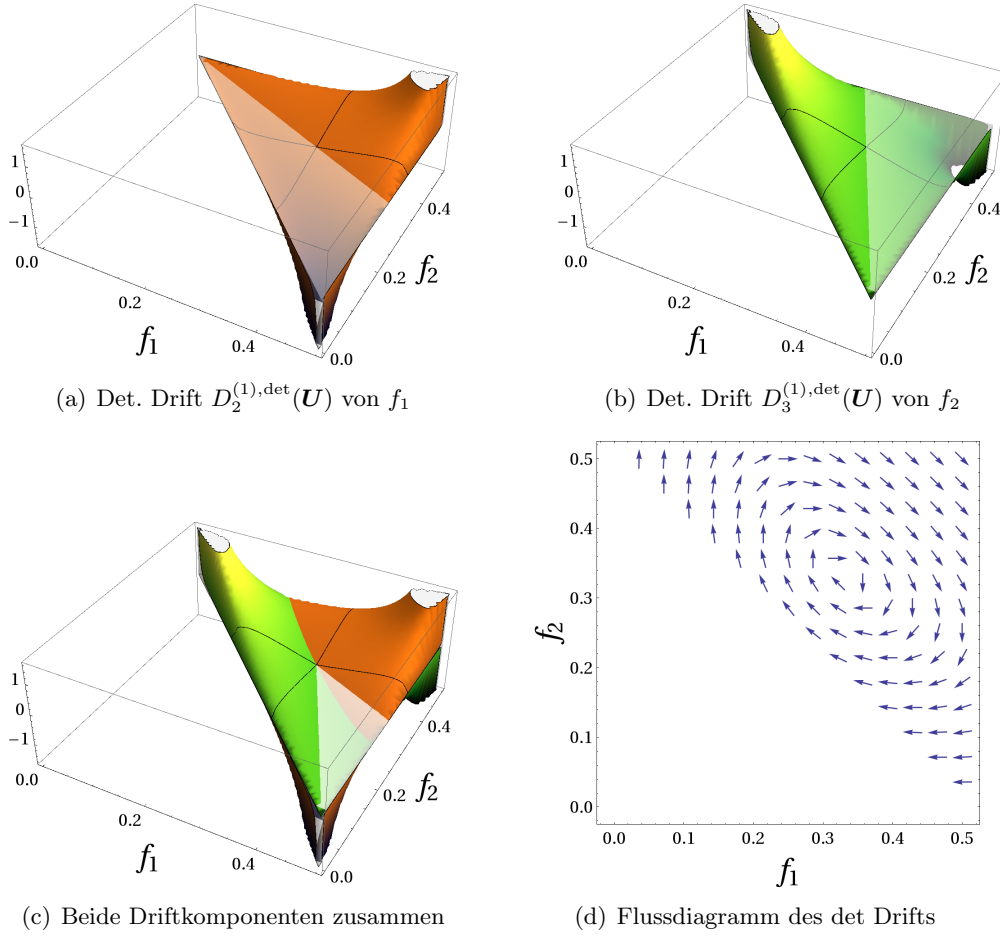


Abbildung 3.2.: Rauschinduzierte Drift der formgebenden Faktoren  $\mathbf{f}$ :  $D_2^{(1),\det}(\mathbf{U})$  und  $D_3^{(1),\det}(\mathbf{U})$  (mit  $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 1$  und  $U = 1$ )  
 Die Linien in den 3D-Plots kennzeichnen  $f_1 = 1/3$  und  $f_2 = 1/3$ .

Fixpunkt ein Fokus und das System durchläuft einen Zyklus innerhalb einer Periodendauer von

$$T = \frac{i2\pi}{\lambda_2} = \frac{4\pi^2 U^*}{3\sqrt{3}\sqrt{\Gamma_1\Gamma_2 + \Gamma_2\Gamma_3 + \Gamma_3\Gamma_1}}. \quad (3.4)$$

Die deterministische PunktWirbeldynamik besitzt eine hamiltonsche Struktur. Diese finden wir in der Darstellung der Dynamik durch die FPG im Falle verschwindenden Rauschens wieder. Wie wir in Abschnitt 1.1.5 gesehen haben, besitzen gebundene Zustände, die sich nahe dem äquilateralen Dreieck befinden, geschlossene Trajektorien. Anhand von Abbildung 3.1 erkennen wir, dass der Umfang des Dreiecks in diesem Fall pulsiert. Wenn wir einen Anfangszustand wählen, bei dem die Gesamtenergie des Systems höher ist, wie es in den Eckregionen dieser Darstellungen der Fall ist, führt die Drift dazu, dass der hier dargestellte Bereich verlassen wird. Das entspricht einem Wechsel der Orientierung der drei PunktWirbel. Wie aus der Gleichung (1.21) ersichtlich wird,

entspricht das einem Vorzeichenwechsel der Dynamik. Der Bereich, in den die Trajektorie eindringt, entspricht also dem hier dargestellten, nur dass die deterministische Drift dort ein umgekehrtes Vorzeichen besitzt. Der Phasenraumpunkt wird also mit derselben Geschwindigkeit, mit der er den einen Bereich verlassen hat, in den anderen Bereich eindringen und eine gespiegelte Version der Dynamik durchlaufen, bis er aus demselben Grund diesen Bereich wieder verlässt und das Dreieck seine ursprüngliche Orientierung einnimmt<sup>4</sup>. Dieses Verhalten entspricht der Trajektorie mit  $\Theta = 5$  in Abbildung 1.2. Dasselbe Verhalten findet sich wieder, wenn sich der Zustand des Dreiecks in Bereich II der in Abschnitt 1.1.5 diskutierten Klassifikation befindet.

Die bislang diskutierten Fälle besitzen alle geschlossene Trajektorien und werden daher als gebundene Zustände bezeichnet. Es ist klar, dass sich die Form des Dreiecks nach einem voll durchlaufenen Zyklus nicht geändert haben wird. Anders ist es bei den in Abschnitt 1.1.5 erwähnten Streuzuständen, bei denen die Trajektorien ins Unendliche gehen. Dort wird insbesondere der Umfang, nachdem er sich - abhängig von den Anfangsbedingungen - zu Beginn eventuell verringert hat, anwachsen.

---

<sup>4</sup>An dieser Stelle ist die Beschreibung der Dynamik anhand von (1.21) nicht vollständig, weil der Flächeninhalt im kollinearen Zustand verschwindet und demnach die Dynamik zum Stillstand kommen müsste. Dass dies nicht der Fall ist, ist bekannt (vergleiche [Are07]).



## 3.2. Rauschinduzierte Drift

Betrachten wir nun den komplementären Fall der stochastisch dominierten Dynamik ( $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$ ).

### 3.2.1. Rauschinduzierte Drift bei additivem Rauschen

#### Umfang

Wir wollen uns zunächst dem Fall additiven Rauschens ( $\xi = 0$ ) zuwenden.

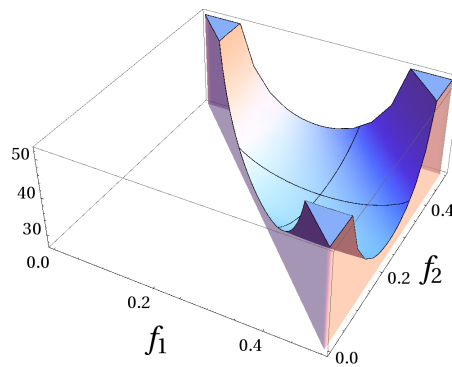


Abbildung 3.3.: Rauschinduzierte Drift  $D_1^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U})$  des Umfangs (mit  $B = 1$  und  $U = 1$ )

Die Driftkomponente des Umfangs

$$D_1^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{U} 3B \left( \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} + \frac{1}{f_3} \right) \quad (3.5)$$

ist eine auf dem gesamten Definitionsbereich positive Funktion (siehe Abbildung 3.3). Das bedeutet zusammen mit den Ergebnissen des vorhergehenden Abschnitts, dass der Umfang des Dreiecks im Laufe der Zeit im Mittel anwachsen wird. Die inverse Proportionalität zu  $U$  wird dabei dafür sorgen, dass der Umfang größerer Dreiecke langsamer wächst. An Abbildung 3.3 ist die Invarianz von (3.5) unter Vertauschung von  $f_1$ ,  $f_2$  und  $f_3 = 1 - f_1 - f_2$  gut zu erkennen, auch wenn diese Tatsache durch die Form der Darstellung leicht verschleiert wird. Stellt man sich aber die Abbildung längs der diagonalen Begrenzungslinie um den Faktor  $\sqrt{2}$  gestaucht vor, offenbart sich die Symmetrie. Wenn eine Seite sehr klein ist, wie es in den Eckregionen der Darstellung der Fall ist, divergiert die rauschinduzierte Drift wegen der inversen Proportionalität zu den Seitenlängen. Das heißt, dass ein spitzes Dreieck sehr schnell anwächst. Das Minimum der rauschinduzierten Drift des Umfangs befindet sich am Punkt des äquilateralen Dreiecks.

**Form**

Die rauschinduzierte Drift der formgebenden Faktoren lautet

$$D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}) = \frac{1}{U^2} B \left[ -4 + 3 \left( \frac{1}{f_1} - \frac{f_1}{f_2} - \frac{f_1}{f_3} \right) + 4(3f_1 + 2f_1(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3) - (\cos \theta_2 + \cos \theta_3)) \right]. \quad (3.6)$$

$D_3^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U})$  ergibt sich wieder aus  $D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U})$  durch vertauschender Indizes 1 und 2. Ihr Einfluss auf die Dynamik wird aus Abbildung 3.4 ersichtlich.

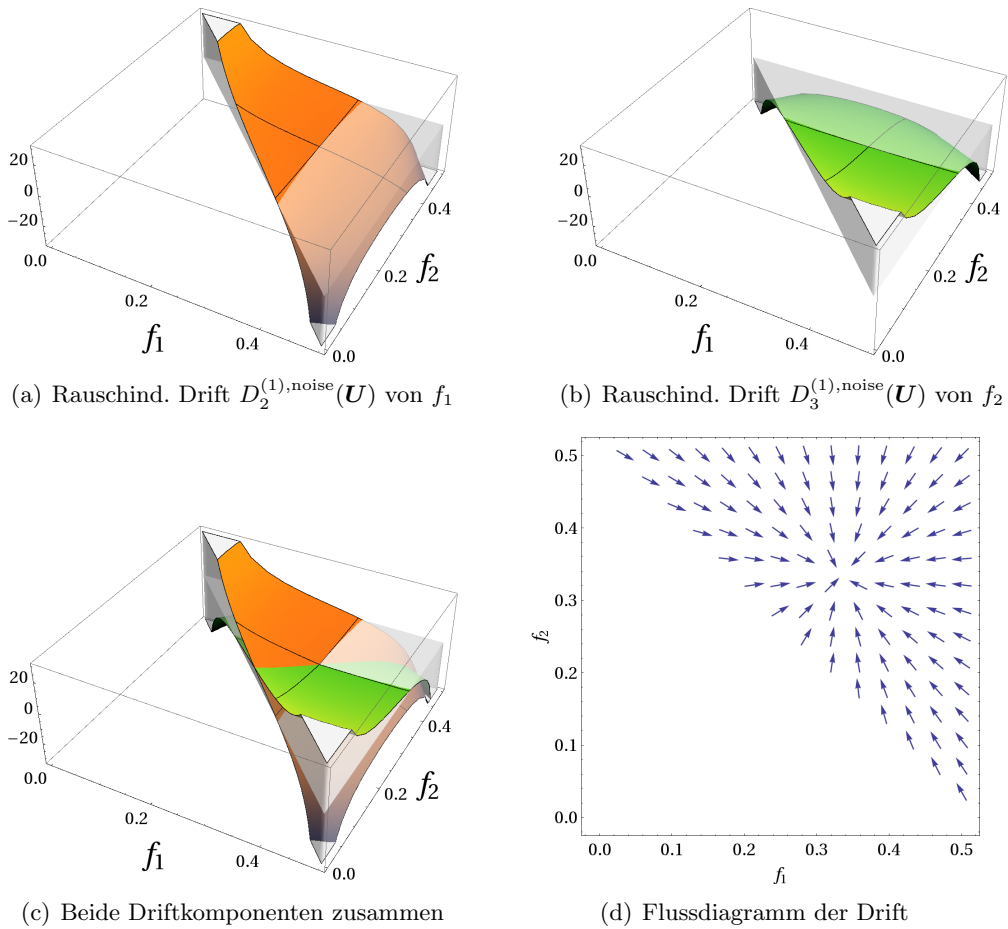


Abbildung 3.4.: Rauschinduzierte Drift der formgebenden Faktoren  $\mathbf{f}$ :  $D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U})$  und  $D_3^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U})$  (mit  $B = 1$  und  $U = 1$ )

Die Pfeile des Flussdiagramms 3.4(d) wurden gleich lang gewählt, um das Verhalten des gesamten Systems qualitativ zu erfassen. Die Drift ist in den Ecken wesentlich stärker, wie auch aus der Abbildung ersichtlich wird. Das bedeutet, dass die kleine Seite eines spitzen Dreiecks sehr schnell anwächst und das Dreieck in eine äquilaterale Form getrieben wird. Die rauschinduzierte Drift sorgt

also dafür, dass der Umfang des Dreiecks zunimmt und es sich gleichzeitig dem äquilateralen Zustand nähert. Zu diesem Ergebnis kommt auch [ZC10].

### 3.2.2. Rauschinduzierte Drift im Kraichnan-Feld

Im Kraichnan-Feld ändert sich das Verhalten der rauschinduzierten Drift in wenigen Punkten.

#### Umfang

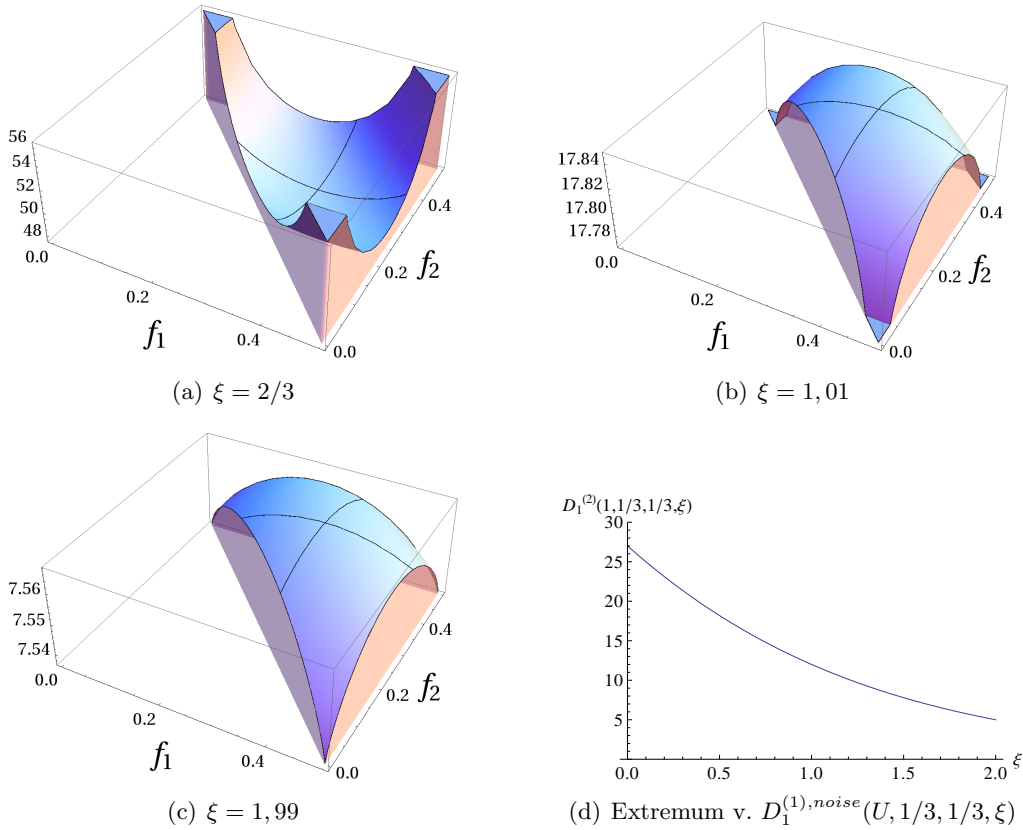


Abbildung 3.5.: Rauschinduzierte Drift der Umfangs  $D_1^{(1),noise}(U, \xi)$  im Kraichnan-Feld (mit  $B = 1$  und  $U = 1$ )

Die Abhängigkeit von dem Exponenten  $\xi$  des Drifts des Umfanges

$$D_1^{(1),noise}(U, \xi) = (3 + \xi)BU^{\xi-1} \left( f_1^{\xi-1} + f_2^{\xi-1} + f_3^{\xi-1} \right), \quad (3.7)$$

führt wegen der Proportionalität zu  $U^{\xi-1}$  dazu, dass die Expansion mit steigendem Umfang  $U$  nicht so schnell abnimmt, wie im Fall additiven Rauschens. Des Weiteren wird die Drift wegen des in Klammern stehenden Teils für größere  $\xi$  schwächer und bei  $\xi = 1$  findet ein Vorzeichenwechsel des Extrempunktes  $\mathbf{f} = (1/3, 1/3)^T$  statt. Die räumlichen Korrelationen sorgen in diesem Skalierungsbereich also dafür, dass der äquilaterale Zustand schneller an Umfang

### 3. Diskussion der Dynamik

---

zunimmt, als der anderer Konfigurationen. Die Abhängigkeit des Extremums bei  $\mathbf{f} = (1/3, 1/3)^T$ ,

$$D_1^{(1),\text{noise}}(U, 1/3, 1/3, \xi) = (3 + \xi)BU^{\xi-1} \left(\frac{1}{3}\right)^{\xi-1}, \quad (3.8)$$

ist in Abbildung 3.5(d) gezeigt. Für  $\xi > 1$  liegt das geringste Wachstum des Umfangs vor, wenn eine Seitenlänge nahe Null ist. Dort hat die Drift den Wert

$$D_1^{(1),\text{noise}}(U, 0, 1/2, \xi) = (3 + \xi)BU^{\xi-1} (1 + 2^{-\xi}) \quad (3.9)$$

Im Falle  $\xi = 1$  ist  $D_1^{(1),\text{noise}}$  unabhängig von  $U$  und führt somit zu einer konstanten Expansion des Umfangs unabhängig von Form und Größe des Dreiecks. Im Falle  $\xi = 2$  verschwindet die Abhängigkeit von den formgebenden Faktoren  $\mathbf{f}$  und  $D_1^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, 2) = D_1^{(1),\text{noise}}(U) =$  ist linear in  $U$ . Hier liegt also exponentielles Wachstum vor.

#### Form

Bei der rauschinduzierten Drift der formgebenden Faktoren

$$\begin{aligned} D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi) &= U^{\xi-2}B \cdot \left[ (4f_1(f_1^\xi + f_2^\xi + f_3^\xi) - 4f_1^\xi \right. \\ &\quad - 3(3 + \xi)(f_1(f_1^{\xi-1} + f_2^{\xi-1} + f_3^{\xi-1}) - f_1^{\xi-1}) \\ &\quad + 4f_1((2f_2^\xi + 2f_3^\xi - f_1^\xi(2 + \xi)) \cos \theta_1 - f_1^\xi \xi \cos(\theta_2 - \theta_3)) \\ &\quad + 2(2f_1 - 1)((2(f_1^\xi - f_2^\xi + f_3^\xi) - f_2^\xi \xi) \cos \theta_2 - f_2^\xi \xi \cos(\theta_1 - \theta_3)) \\ &\quad \left. + 2(2f_1 - 1)((2(f_1^\xi + f_2^\xi - f_3^\xi) - f_3^\xi \xi) \cos \theta_3 - f_3^\xi \xi \cos(\theta_1 - \theta_2)) \right] \end{aligned} \quad (3.10)$$

$(D_3^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi))$  wie oben aus  $D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi)$  durch Vertauschen der Indizes 1 und 2) verhält sich die Dynamik ähnlich, wie im Fall additiven Rauschens. Die räumlichen Korrelationen bewirken natürlich, dass sich sehr spitze Dreiecke langsamer öffnen als im Fall additiven Rauschens. Bei Werten von  $\xi$  nahe 2 lässt sich ein neues Phänomen beobachten. Die Drift von  $f_1$

$$D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi) \quad (3.11)$$

wird bei großen Werten von  $f_1$  positiv<sup>5</sup>. Da die rauschinduzierte Drift unabhängig von der Orientierung des Dreiecks ist, bedeutet das, dass es neben der Tendenz zur Bildung äquilateraler Dreiecke auch noch die zur Bildung kollinearere Zustände gibt. Weil die Drift  $D_3^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi)$  der anderen Koordinate für  $f_1 \simeq 1/2$  negativ ist, entwickeln sich aus diesen Zuständen spitze Dreiecke. Der äquilateralen Zustand ist wie im Fall additiven Rauschens stets ein Fixpunkt. Wir erkennen weiterhin, dass das divergente Verhalten, das im Falle additiven Rauschens dazu führt, dass sich spitze Dreiecke sehr schnell öffnen, durch die räumlichen Korrelationen verhindert wird.

<sup>5</sup>Das gilt natürlich ebenso für den Driftterm von  $f_2$ .

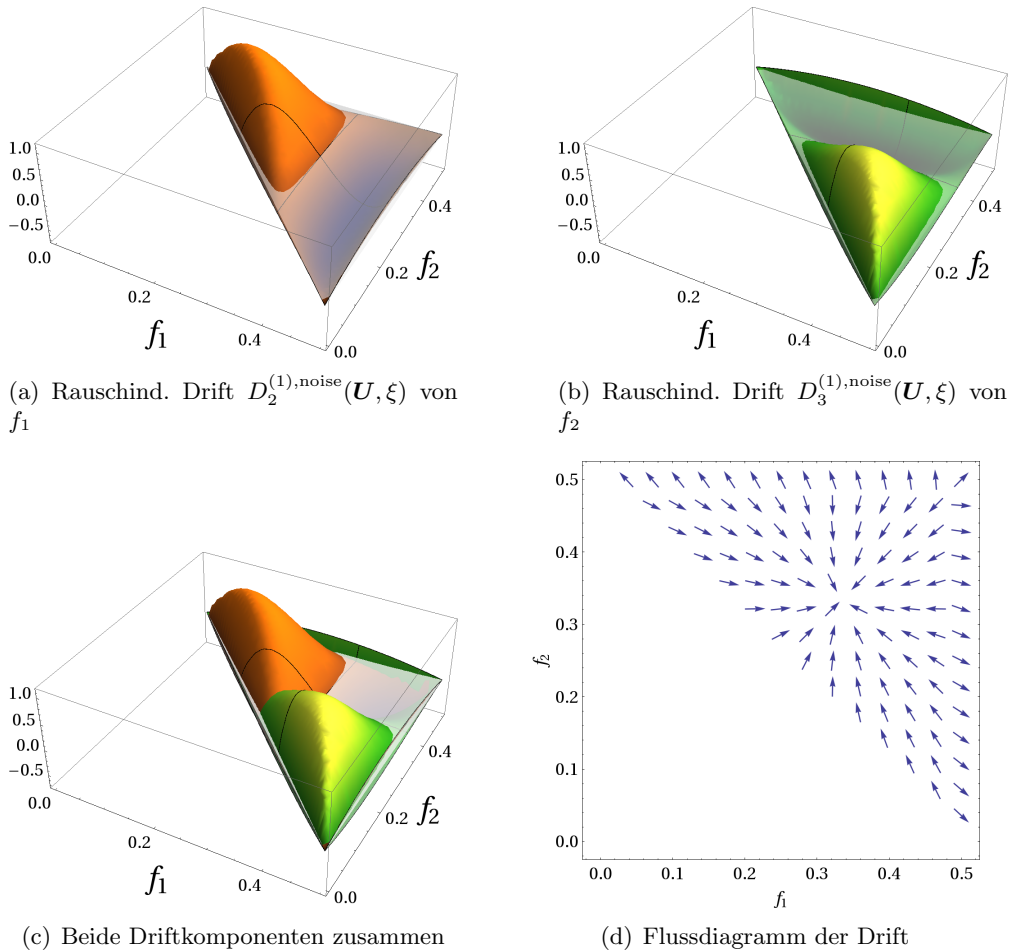


Abbildung 3.6.: Rauschinduzierter Drift der formgebenden Faktoren  $\mathbf{f}$ :  $D_2^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi)$  und  $D_3^{(1),\text{noise}}(\mathbf{U}, \xi)$  (mit  $B = 1$ ,  $U = 1$  und  $\xi = 2$ )

### 3.2.3. Fazit der Betrachtungen der Drift

Aus den bisherigen Erkenntnissen aus Kapitel 3 wird klar, dass die Drift des Umfangs  $D_1^{(1)}(\mathbf{U})$  im Mittel positiv ist und das Dreieck im Laufe der Zeit an Umfang zunehmen wird. In der  $f_1, f_2$ -Ebene bewirkt das Zusammenspiel aus deterministischer und rauschinduzierter Drift, dass sich der Phasenraumpunkt in einer Spiralbewegung dem Zustand des äquilateralen Dreiecks nähert. Der Einfluss räumlicher Korrelationen bewirkt dabei, dass diese beiden Prozesse langsamer ablaufen. Besonders Dreiecke, bei denen eine Seite im Vergleich zu den anderen beiden klein ist, öffnen sich nicht so schnell, wie im unkorrelierten Fall. Die Expansions des Umfangs verlangsamt sich im Fall  $\xi < 1$ . Für  $\xi > 1$  expandiert die Konfiguration immer schneller.

Bislang haben wir die Wirkung der stochastischen Einflüsse nur anhand der rauschinduzierten Drift diskutiert. Wir haben uns bei der Interpretation auf die reine Bewegung konzentriert. Im folgenden Abschnitt betrachten wir Konfigu-

rationen, in denen die Drift sehr klein ist und veranschaulichen uns damit die Einflüsse der Diffusion.

### 3.3. Grenzfall großer Dreiecke

Im vorherigen Abschnitt haben wir gesehen, dass sich die drei Punktwirbel aufgrund der Wirkung der rauschinduzierten Drift voneinander entfernen in eine äquilaterale Konfiguration getrieben werden. Wenn die drei Wirbel weit auseinander sind, wird die deterministische Drift aufgrund der reziproken Proportionalität zum Abstand vernachlässigbar klein. Aus physikalischer Sicht sind die stochastischen Kräfte nahe der integralen Skala unabhängig voneinander, so dass die Korrelationen auf dieser Skala nahezu additiv sind ( $\xi \approx 0$ ). In diesem Fall verschwindet für große Dreiecke auch die rauschinduzierte Drift und wir wollen die Fluktuationen betrachten.

#### 3.3.1. Fluktuation des Umfangs bei additivem Rauschen

Im Grenzfall großer Dreiecke ( $U \gg 1$ ) verschwindet also die Drift (2.74) und lediglich das Diffusionselement

$$D_{11}^{(2)}(\mathbf{U}) = \frac{2}{3}B(3 + 2(\cos \theta_1 + \cos \theta_2 + \cos \theta_3)) \quad (3.12)$$

aus (2.75) ist ungleich Null. Die Fluktuationen von  $U$  besitzen ein Maximum

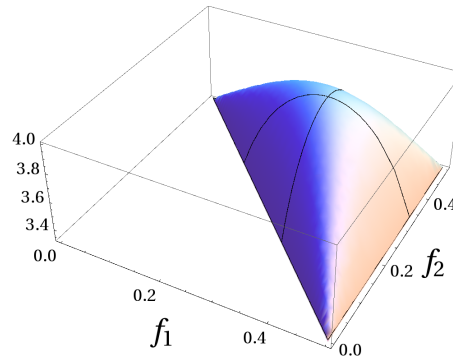


Abbildung 3.7.: Diffusionselement  $d_{11}^{(2)}(\mathbf{f})$  mit  $D=1$

bei  $D_{11}^{(2)}(U, 1/3, 1/3)$  und nehmen zu den Rändern hin ab (siehe Abbildung 3.7). Eine anschauliche Erläuterung dieses Verhaltens ist, dass sich der Umfang eines gleichseitigen Dreiecks vergleichsweise stark ändert, wenn an den Eckpunkten stochastische Kräfte wirken. Im Gegensatz dazu stehen kollineare Zustände an den Randregionen von Abbildung 3.7, bei denen sich kleine Änderungen der Position des mittleren Wirbels beispielsweise kaum auf eine Änderung des Umfangs auswirken.

## 3.3.2. Fluktuation des Umfangs im Kraichnan-Feld

Wir wollen auch die Fluktuationen im Fall großer Dreiecke mit starken räumlichen Korrelationen angeben, auch wenn eine physikalische Realisierung einer solchen Situation in dem hier betrachteten Umfeld nicht gegeben ist.

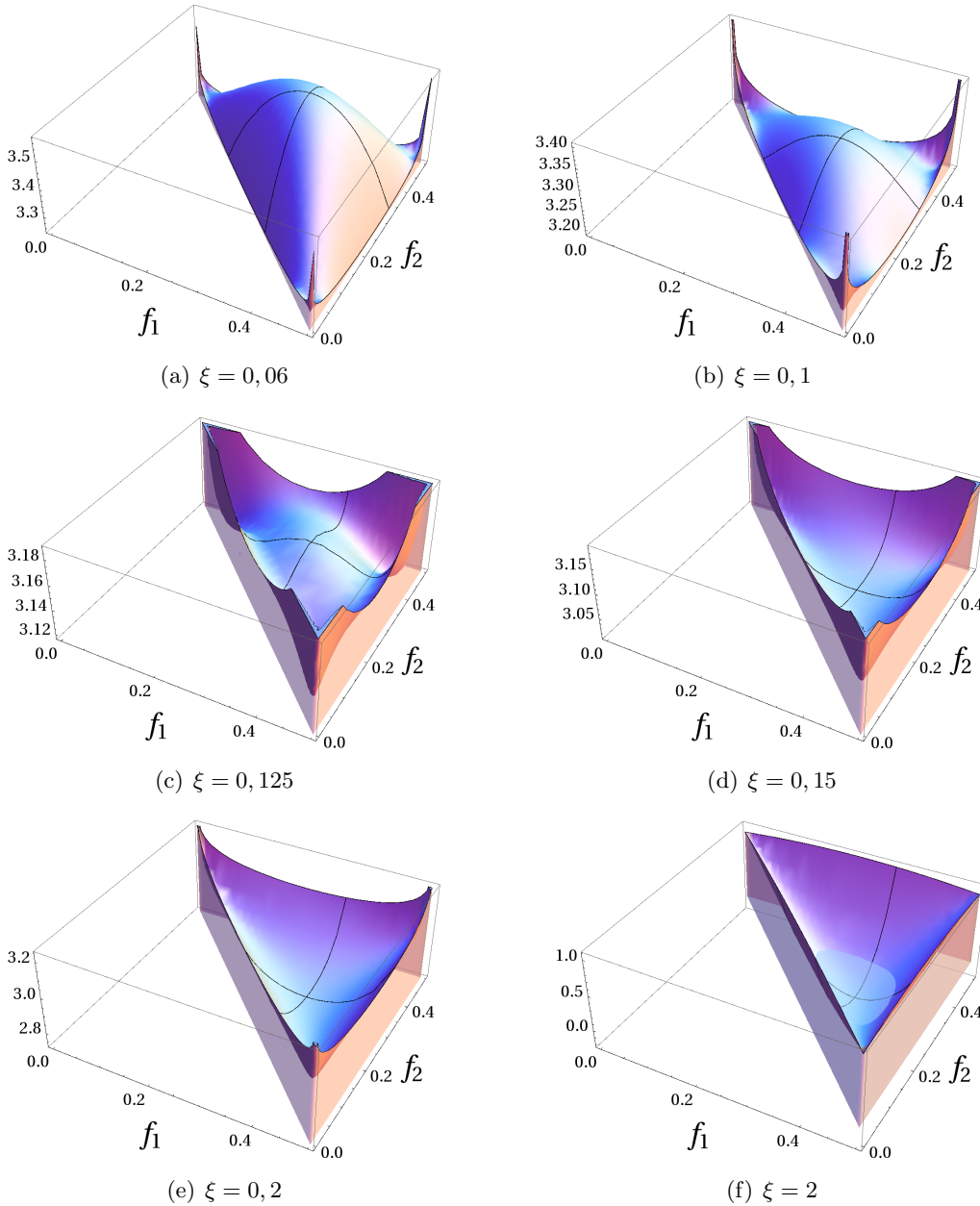


Abbildung 3.8.: Fluktuationen des Umfangs  $d_{11}^{(2)}(\mathbf{f}, \xi)$  im Kraichnan-Feld

Bei einem Skalierungsexponenten  $\xi < 1$  verschwindet die Drift (2.74) für sehr große Dreiecke  $U \gg 1$  und einzig das Diffusionselement  $D_{11}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) \propto U^\xi$  in (2.75) bleibt ungleich Null. Hier ist zu berücksichtigen, dass die Fluktuationen

nicht unabhängig von  $U$  sind. Im Kraichnan-Feld können wir schon bei kleinen Werten von  $\xi$  beobachten, wie sich die Konfiguration des gleichseitigen Dreiecks von einem Maximum der Fluktuationen zu einem Minimum entwickelt (Abbildung 3.8). Die räumlichen Korrelationen machen sich zuerst bei den Konfigurationen mit zwei stark benachbarten Wirbeln, wenn ein Seitenverhältnis nahe bei Null ist, bemerkbar.

$$\begin{aligned}
 D_{11}^{(2)}(\mathbf{U}, \xi) = \frac{2}{3}BU^\xi & \left( (f_1)^\xi + (f_2)^\xi + (f_3)^\xi \right. \\
 & - (2(f_1)^\xi + 2(f_2)^\xi - (f_3)^\xi(2 + \xi)) \cos \theta_3 \\
 & - (2(f_1)^\xi + 2(f_3)^\xi - (f_2)^\xi(2 + \xi)) \cos \theta_2 \\
 & - (2(f_2)^\xi + 2(f_3)^\xi - (f_1)^\xi(2 + \xi)) \cos \theta_1 \\
 & - (f_3)^\xi \xi \cos(\theta_1 - \theta_2) \\
 & - (f_1)^\xi \xi \cos(\theta_2 - \theta_3) \\
 & \left. - (f_2)^\xi \xi \cos(\theta_3 - \theta_1) \right) \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

Interessant ist, dass bei großen Werten von  $\xi$  die Diffusionselemente negativ werden. Eine negatives Diagonalelement der Diffusionsmatrix in der FPG einer Verteilungsfunktion korrespondiert mit dem Anwachsen der Wahrscheinlichkeitsdichte in diesem Bereich.

### 3.3.3. Fazit

Im Falle großer Dreiecke und geringer räumlicher Korrelationen verschwinden bis auf Fluktuationen des Umfangs alle Komponenten von Drift und Diffusion. Diese sind natürlich vergleichsweise klein.



## 4. Zusammenfassung und Ausblick

Wir haben ein System von drei Punktwirbeln in einem zweidimensionalen turbulenten Feld untersucht. Dabei wurde der Einfluss der Viskosität durch ein statistisch stationäres und isotropes Zufallsfeld erzeugt. Das System wurde dadurch probabilistischer Natur und seine Evolution ist durch eine Fokker-Planck-Gleichung bestimmt. Aufgrund der Isotropie des Gesamtsystems waren wir in der Lage, die Beschreibung anhand von drei Parametern durchzuführen. Durch die Wahl eines größenbeschreibenden und zweier formgebender Parameter wurde eine qualitative Interpretation der Ergebnisse vereinfacht. Bei der Wahl der Korrelationsfunktion haben wir den Skalierungsparameter nicht festgelegt, um so dem anomalen Skalierungsverhalten gerecht zu werden und das Verhalten eines großen Bereichs von Skalen zu erfassen.

Der Einfluss des stochastischen Feldes schlägt sich in dem rauschinduzierten Drift nieder. Dieser bewirkt eine Zunahme des Umfangs und ein Streben der Wirbel in den Zustand des äquilateralen Dreiecks. Im Falle räumlicher Korrelationen spielen sich diese Prozesse langsamer ab. Der zweite Effekt des stochastischen Feldes sind die Fluktuationen. Wir haben gezeigt, dass im Falle großer Dreiecke die Fluktuationen des Umfangs dominant sind.

Analytisch konnten wir die Fokker-Planck-Gleichung nicht lösen. Eine numerische Simulation des Systems verspricht tiefere Erkenntnisse. Dabei ermöglicht insbesondere der freie Skalierungsparameter viel Spielraum. Die formale Ähnlichkeit der Fokker-Planck-Gleichung der gestörten Punktwirbeldynamik in den gewöhnlichen Koordinaten des Raumes zur Schrödingergleichung von Anyonen ist ein weiterer Ansatzpunkt zur Lösung des Problems.

# A. Eigenschaften der $\delta$ -Funktion

## A.1. Definition

Die  $\delta$ -Funktion ist streng genommen keine Funktion, sondern eine Distribution. Sie ordnet einer Testfunktion einen Wert zu.

Für ihre Verwendung in dieser Diplomarbeit, reicht die folgende Definition aus [Nol03]. Die Deltafunktion erfüllt die Bedingungen

$$\int_a^b dr \delta(r-x) = \begin{cases} 1 & \text{für } a < x < b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

und

$$\delta(r-x) = 0 \quad \forall r \neq x. \quad (\text{A.2})$$

Oft ist es hilfreich, die Deltafunktion als den Grenzwert einer Funktionenfolge aufzufassen. Beispielsweise mit  $a > 0$

$$\delta(x-r) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi a}} e^{-\frac{(x-r)^2}{a^2}} = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(x-r), \quad (\text{A.3})$$

einer Gaußschen Glockenkurve mit einem Maximum bei  $x-r$ , das bei kleineren  $a$  immer höher wird und dessen Breite gleichzeitig abnimmt, so dass sie stets eine Fläche vom Betrag 1 einschließt.

## A.2. Eigenschaften

Anhand dieser Repräsentation der Deltafunktion lässt sich eine wichtige Eigenschaft, die *Sifting-Property* (dt. Sieb-Eigenschaft), zeigen (siehe [Nol03]).

$$\int dr \delta(r-x) f(r) = f(x) \quad (\text{A.4})$$

Dazu integrieren wir das Produkt von  $\delta_a(x-r)$  und einer Testfunktion  $f(r)$ , wobei  $x$  innerhalb der Integrationsgrenzen liegen soll. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt

$$F_a(x) = \int_{\alpha}^{\beta} dr \delta_a(r-x) f(r) = f(\xi) \int_{\alpha}^{\beta} dr \delta_a(r-x) \quad (\text{A.5})$$

für ein  $\xi \in [\alpha, \beta]$ . Im Grenzfall  $a \rightarrow 0$  wird  $\delta_a(r-x)$  zu einem beliebig scharfen Peak um  $(x-r)$ . Da sich  $F_a(x)$  nicht ändert, wenn man das Integrationsintervall

auf Bereiche beschränkt, in denen die Funktion von 0 verschieden ist, können wir dieses auf den Punkt  $x$  beschränken und erhalten mit

$$\lim_{a \rightarrow 0} F_a(x) = f(x) \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\alpha}^{\beta} dr \delta_a(r-x) = f(x) \quad (\text{A.6})$$

die Eigenschaft (A.4). Dann gilt natürlich auch

$$\int dr \delta(r-x) f(r) = \int dr \delta(r-x) f(x), \quad (\text{A.7})$$

woraus die Identität

$$\delta(r-x) f(r) = \delta(r-x) f(x) \quad (\text{A.8})$$

folgt.

## A.3. Ableitung

### A.3.1. Ableitung der Deltafunktion

Durch partielle Integration weist man folgende Eigenschaften nach, die einer Ableitung der  $\delta$ -Funktion erst Sinn verleihen.

$$f(r) \frac{\partial}{\partial r} \delta(r-x) = -\delta(r-x) \frac{\partial}{\partial r} f(r) \quad (\text{A.9})$$

höhere Ableitungen:

$$f(r) \frac{\partial^n}{\partial r^n} \delta(r-x) = (-1)^n \delta(r-x) \frac{\partial^n}{\partial r^n} f(r) \quad (\text{A.10})$$

### A.3.2. Ableiten nach anderen Argumenten

Wegen

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(\underbrace{r-x}_z) = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} \delta(r-x) = -\frac{\partial}{\partial z} \delta(r-x) = -\frac{\partial z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z} \delta(r-x) = -\frac{\partial}{\partial r} \delta(r-x) \quad (\text{A.11})$$

gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(r-x) = -\frac{\partial}{\partial r} \delta(r-x). \quad (\text{A.12})$$

Allgemeiner gilt

$$\frac{\partial}{\partial x} \delta(r-g(x)) = -\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial r} \delta(r-g(x)). \quad (\text{A.13})$$

## B. Zusatzmaterialien

### B.1. CD

Zur Reproduktion der computergestützten Rechnungen und Grafiken liegt dieser Diplomarbeit eine CD mit Dateien im Mathematica-Notebook-Format bei.

/TrafoRnachU.nb	Transformation der FPG von $\mathbf{r}$ nach $\mathbf{U}$
/GrafikenDrift.nb	Grafiken aus den Abschnitten 3.1 und 3.2
/GrafikenDiffusion.nb	Grafiken aus dem Abschnitten 3.3.1

Des Weiteren liegt eine pdf-Version dieser Arbeit bei.

## Literaturverzeichnis

- [AFHF10] J. H. Argyris, G. Faust, M. Haase, and R. Friedrich. *Die Erforschung des Chaos*. Springer, Berlin, 2010.
- [Are79] H. Aref. Motion of three vortices. *Phys. Fluids*, 22:393–400, 1979.
- [Are07] H. Aref. Point vortex dynamics: A classical mathematics playground. *Journal of mathematical Physics*, 48:065401, 2007.
- [AV97] O. Argullo and A.D. Verga. Exact two vortices solution of navier-stokes-equation. *Phys. Rev. Lett.*, 78:2361–2364, 1997.
- [AV01] O. Argullo and A.D. Verga. Effect of viscosity in the dynamics of two point vortices: Exact results. *Phys. Rev. E*, 63:056304– 1–14, 2001.
- [Bar03] G. I. Barenblatt. *Scaling*. Cambridge University Press, 2003.
- [Bro06] Bronstein. *Taschenbuch der Mathematik*. Harri Deutsch, Frankfurt am Main, 2006.
- [Gar97] C. W. Gardiner. *Handbook of stochastic methods*. Springer, Berlin, 2 edition, 1997.
- [Kev05] N. K.-R. Kevlahan. Stochastic differential equation models of vortex merging and reconnection. *Phys. Fluids*, 17:065107– 1–11, 2005.
- [Kol41a] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 32(1):16–18, 1941.
- [Kol41b] A. N. Kolmogorov. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds numbers. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 30(4):299–303, 1941.
- [Kol62] A. N. Kolmogorov. A refinement of previous hypotheses concerning the local structure of turbulence in a viscous incompressible fluid at high reynolds number. *Journal of Fluid Mechanics*, 13:82–85, 1962.
- [Kra68] Robert H. Kraichnan. Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence. *Phys. Fluids*, 11:945–953, 1968.
- [Nav22] C.L.M.H. Navier. *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*. l'Académie Royale des Sciences, 1822.
- [Nol03] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 3*. Springer, 2003.

- [PF85] G. Parisi and U. Frisch. *On the singularity structure of fully developed turbulence*. In Proceedings of the International School of Physics E. Fermi. North Holland, Amsterdam, 1985.
- [Pop00] Stephen B. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- [Rat10] Michael Rath. Stochastic point vortex dynamics, Diplomarbeit, 2010.
- [Rey83] Osborne Reynolds. An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels. *Phil. Trans. R. Soc.*, 174:935–982, 1883.
- [Ric22] Lewis Fry Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, (reprinted 2007) 1922.
- [Ris89] H. Risken. *The Fokker-Planck equation — Methods of solution and applications*. Springer, Berlin, 1989.
- [Sto44] George Gabriel Stokes. On some cases of fluid motion. *Transactions of the Cambridge Philosophical Society.*, 8:105–137, 1844.
- [ZC10] Hao Zhu and KeMing Cheng. Three vortex motion in the slightly viscous flow. *SCIENCE CHINA Physics, Mechanics & Astronomy*, 53:735–744, 2010.

## Danksagung

Ich möchte Herrn Prof. Dr. Rudolf Friedrich für die Betreuung dieser Arbeit danken. Besonders die Möglichkeit, an dem interessanten und spannenden Thema herumzunknabbern, auch wenn viele Lösungsansätze nicht von Erfolg gekrönt waren, hat mir sehr gefallen. Dadurch habe ich viel gelernt. Die Phase, die ich mit der Recherche und dem Schreiben der Diplomarbeit verbracht habe, ist sicherlich die spannendste und interessanteste Phase des Studiums gewesen. Den Mitgliedern der Arbeitsgruppe Friedrich danke ich für die wunderbare Atmosphäre, die Arbeit und Spaß verbunden hat, so dass ich immer gerne im Büro war. Christoph Honisch möchte ich für die freundliche und fundierte Beantwortung meiner Fragen den Bereich der stochastischen Systeme betreffend danken. Ebenso danke ich Dr. Oliver Kamps, den zwei Wilczeks, Dr. Svetlana Gurevich und Johannes Lülff für die Diskussionen bezüglich des Themenkreises der Turbulenz und für die zahlreichen Ratschläge.

Drei Personen gebührt mein besonderer Dank. Meinen Eltern Anne und Hans-Hermann Strickmann dafür, dass sie mich nach besten Kräften jederzeit unterstützt haben und meiner Freundin Lene dafür, dass ich bei ihr stets neue Kraft schöpfen konnte, ihren unerschütterlichen Glauben an mich und das Verständnis dafür, dass sie auf mich besonders in der Endphase der Diplomarbeit einige Male verzichten musste.

Abschließend möchte ich noch Jan-Patrik Cleve und Vaidas Juknevichus für die alltäglichen physikalischen Diskussionen danken.

## **Erklärung zur Diplomarbeit**

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbstständig angefertigt und außer den angegebenen keine weiteren Hilfsmittel verwendet zu haben.

Münster, den 22.7.2012