

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Erzeugung von Zufallszahlen

Machen Sie sich mit einem Zufallszahlengenerator vertraut, der auf dem Intervall $[0;1]$ gleichverteilte, unabhängige Zufallszahlen erzeugt. Solche Zufallszahlen nennt man *Standardzufallszahlen*.

- a) Erzeugen Sie damit eine Folge von $n = 100$ Standardzufallszahlen z_i , $i = 1, \dots, n$, und schätzen Sie den Mittelwert μ_z mit Hilfe des Schätzers

$$\hat{\mu}_z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n z_i \quad (1)$$

sowie die Standardabweichung σ_z mit Hilfe des Schätzers

$$\hat{\sigma}_z = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (\hat{\mu}_z - z_i)^2}. \quad (2)$$

Welche Werte erwarten Sie?

- b) Wiederholen Sie Teil a) mit verschiedenen Startwerten des Zufallszahlengenerators und beobachten Sie die Schwankungen von $\hat{\mu}_z$ und $\hat{\sigma}_z$.
c) Wiederholen Sie Teil b) für $n = 10^6$.
d) Berechnen Sie ein Histogramm mit äquidistanten Bins der Breite $h = 0.05$ für die Zufallszahlen aus a) für verschiedene Werte von n .

Aufgabe 2: Zentraler Grenzwertsatz

Schreiben Sie ein Programm, das eine Folge von n Zufallszahlen

$$z_i = \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^m y_{ij}, \quad (3)$$

$i = 1, \dots, n$, erzeugt, wobei y_{ij} unabhängige, auf dem Intervall $[-0.5;0.5]$ gleichverteilte Zufallszahlen sind.

- a) Erzeugen Sie damit Datensätze für $n = 10^5$ und $m = 2, 3, 5, 10$.
b) Berechnen Sie für jeden der Datensätze ein Histogramm mit 20 Bins, wobei Sie die Binbreite an den Wertebereich des Datensatzes anpassen.
c) Vergleichen Sie die Histogramme mit der Normalverteilung

$$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right] \quad (4)$$

für $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1/3 - 1/4$.