

Die Renormierungsgruppe

Jens Langelage

14.12.2005

1 Vorbemerkungen

1.1 Problemstellung

Die Renormierungsgruppe wurde für Probleme mit (unendlich) vielen Freiheitsgraden entwickelt. Dies ist notwendig, da die meisten theoretischen Methoden nur mit wenigen oder nur mit einem Freiheitsgrad funktionieren. Unter normalen Umständen ist es möglich, diese Probleme erheblich zu vereinfachen, und zwar dann, wenn man die Eigenschaften einer makroskopischen Menge von Materie auf eine mikroskopische Teilmenge zurückführen kann.

Es stellt sich die Frage: *Wie weit kann man die Größe eines physikalischen Systems reduzieren, ohne seine Eigenschaften qualitativ zu verändern?* Diese minimale Größe definiert die sogenannte Korrelationslänge ξ , die vom Zustand des Systems abhängt; im Gas z.B. von Druck und Temperatur. Wenn ξ klein ist, existieren einige Näherungsmethoden wie Virialentwicklungen, Störungsentwicklungen, Hartree-Fock-Methoden, und andere. Wenn die Korrelationslänge nicht klein ist, versagen diese Methoden. Kritische Phänomene sind dafür ein typisches Beispiel, da am kritischen Punkt die Korrelationslänge divergiert.

Zusammengefasst bestehen die Probleme, für die wir uns hier interessieren, aus sehr vielen Freiheitsgraden, die sehr stark korreliert sind. Bei der Behandlung dieser Probleme, kommt uns jedoch zugute, dass die Wechselwirkungen in den kritischen Bereichen eine untergeordnete Rolle spielen. Die Eigenschaften von physikal. Systemen in der Nähe von krit. Punkten sind hauptsächlich von der Natur der Freiheitsgrade (Dimensionalität des Ordnungsparameters) und der Dimension des Raumes bestimmt.

1.2 Idee der Renormierungsgruppe

Um die Problemstellung zu vereinfachen, versucht man die Anzahl der Freiheitsgrade pro Längeneinheit - die Dichte - zu verringern. Die ursprünglichen, mikroskopischen Freiheitsgrade werden durch einen kleineren Satz effektiver Freiheitsgrade ersetzt, und zwar in einer solchen Weise, dass die Form des Hamiltonians sich möglichst wenig verändert. Man erhält dadurch sogenannte Flussgleichungen für die Parameter, die in den Hamiltonian eingehen - in der Stat. Mechanik Temperatur und äußere Felder, in der Quantenfeldtheorie Masse und Kopplungskonstanten.

Diese Reduktion der Freiheitsgrade kann man iterieren, bis man in den Bereich der Korrelationslänge ξ kommt. Dabei ist die Transformation, welche den renormierten Hamiltonian mit dem ursprünglichen Hamiltonian verbindet dieselbe für jede Iteration. Falls sich ein Hamiltonian unter der Transformation nicht ändert, nennt man ihn *Fixpunkt*. Die Fixpunkte sind Eigenschaften der Transformation und von den Hamiltonians unabhängig. Dieses Phänomen wird als *Universalität* bezeichnet.

2 Skalenverhalten

2.1 Skalenhypothese

Setzt man voraus, dass sich der bei T_C singuläre Anteil des Thermodynamischen Potentials g_S für alle Temperaturen T in der Nähe von T_C und alle Magnetfelder h nur bis auf einen Faktor ändert, wenn man die Temperatur- und Magnetfeldskala gleichzeitig in bestimmter Weise ändert, so kann man Skalengesetze beweisen, welche die kritischen Exponenten miteinander verknüpfen.

$$g_S(t, h) = b^{-dl} g_S(b^{d\lambda_1} t, b^{d\lambda_2} h) \quad (1)$$

Hierbei ist g_S die freie Enthalpie und t die reduzierte Temperatur. Der Faktor b^d entspricht einer Skalenänderung in d Dimensionen.

Die Skalengesetze lauten

$$\delta = 1 + \frac{\gamma}{\beta} \quad (2)$$

$$\alpha + 2\beta + \gamma = 2 \quad (3)$$

$$\gamma = (2 - \eta)\nu \quad (4)$$

$$\alpha = 2 - d\nu \quad (5)$$

Man sieht, dass von den sechs Krit. Exponenten nur zwei unabhängig sind. Die letzte Beziehung nennt man Hyperskalenrelation, da sie auch die Dimension des Raumes mit einbezieht.

3 1D - Ising-Modell/ Flussgleichungen und Fixpunkte

Zur Veranschaulichung einiger Begriffe der Renormierungsgruppe behandeln wir hier das exakt lösbare eindimensionale Ising-Modell. Das Ising-Modell besteht aus einer Kette von Spins, die die Werte ± 1 annehmen können. In vereinfachter Notation lautet der Hamiltonian des Systems

$$H = K \sum_i S_i S_{i+1} + h \sum_i S_i + C \sum_i 1 \quad (6)$$

Die Zustandssumme ist die Summe über alle Spinkonfigurationen

$$Z_N[H] = Tr(e^H) = \frac{1}{2^N} \sum_{s_1} \dots \sum_{s_N} e^{H(S)} \quad (7)$$

wobei ein Normierungsfaktor hinzugefügt wurde.

Für die freie Enthalpie pro Spin gilt

$$g[H] = \frac{1}{N} \ln Z_{N'} \quad (8)$$

Summiert man über einen Teil N' der Spins, so erhält man die Definitionsgleichung für einen neuen renormierten Hamiltonian, der dem ursprünglichen so ähnlich wie möglich sein soll

$$e^{H'(S')} = \text{Tr}_{N'} e^{H(S)} \quad (9)$$

Aus dieser Definitionsgleichung erhält man drei Gleichungen für die drei Parameter des Systems K , h und C . Dies ist der Grund, weshalb der scheinbar überflüssige Parameter C eingeführt wurde. Es ist ein allgemeines Prinzip, dass die natürlichen Räume der Renormierungsgruppen-Transformation hochdimensionale Parameterräume sind.

In diesem einfachen Modell bekommt man exakte Renormierungsfluss-Gleichungen. Im Allgemeinen kann man diese nur approximativ angeben. Hier lauten sie

$$e^{4K'} = \frac{\cosh 2K + h \cosh 2K - h}{\cosh^2 h} \quad \rightarrow K' = R_K(K, h) \quad (10)$$

$$e^{2h'} = e^{2h} \frac{\cosh 2K + h}{\cosh 2K - h} \quad \rightarrow h' = R_h(K, h) \quad (11)$$

$$e^{4C'} = e^{8C} \cosh 2K + h \cosh 2K - h \cosh^2 h \quad \rightarrow C' = b^d C + R_C(K, h) \quad (12)$$

Die physikalischen Parameter K und h sind vom irrelevanten Parameter C unabhängig.

Nachdem über einen Teil der Spins summiert wurde, müssen die Längen des Systems reskaliert werden, um das ursprüngliche System wiederherzustellen.

$$x \rightarrow x' = \frac{x}{b} \quad \xi \rightarrow \xi' = \frac{\xi}{b} \quad (13)$$

$$N \rightarrow N' = \frac{N}{b} \quad (14)$$

$$g[H] = b^{-d} g[H'] \quad (15)$$

Eine Renormierungsgruppentransformation besteht also aus drei Schritten

1. Partielle Summation
2. Reskalierung
3. Renormierung

4 Allgemeine Renormierungsgruppe

4.1 Bedingungen an eine Allg. Renormierungsgruppen-Transformation

1. Existenz:
Wohldefiniiertheit und Eindeutigkeit der Transformation im thermodynamischen Limes
2. Lokalität:
Benachbarte Freiheitsgrade sollen nach der Transformation benachbart bleiben
3. Unitarität:
Die Zustandssumme soll invariant unter der RG-Transformation sein, d.h. die thermodynamischen Größen sollen sich unter Renormierung nicht verändern
4. Glattheit:
Die RG-Transformation soll glatt sein, in dem Sinne, dass zumindest die ersten Ableitungen existieren
5. Flexibilität:
Die Transformation soll an die Problemstellung angepasst sein

Da wir uns für Größen in der Nähe eines krit. Punktes interessieren, können wir die Transformation in der Nähe eines krit. Punktes, der ja einen Fixpunkt markiert, linearisieren.

$$H' = R_b[H] = H^* + KL_bQ + O(K^2) \quad (16)$$

Dabei ist L_b der linearisierte RG-Operator, Q ein Operator und K ein Kleinheitsparameter. Da L_b linear ist, existiert ein Eigenwertspektrum und man kann H nach den Eigenvektoren Q_j von L_b entwickeln

$$L_bQ_j = \Lambda_jQ_j \quad (17)$$

$$H = H^* + \sum_i K_iQ_i + O(K^2) \quad (18)$$

Die K_j heißen kritische Felder. Sie verhalten sich unter l-facher Renormierung wie

$$K_j^{(l)} \approx K_j \Lambda_j^l = b^{\lambda_j} K_j \quad (19)$$

Dabei bedeutet das 'ungefähr' soviel wie asymptotisch gleich, da wir Terme der $O(K^2)$ vernachlässigt haben. Der letzte Schritt folgt aus der Gruppeneigenschaft der Transformation. Man kann die Eigenwerte als Potenzen des Skalierungsparameters b schreiben, wobei der Exponent für das jeweilige krit. Feld charakteristisch ist. Man unterscheidet die Felder nach den Vorzeichen der Exponenten:

1. $\lambda > 0$: Relevante Felder
Diese Felder entfernen sich durch Renormierung vom Fixpunkt
2. $\lambda < 0$: Irrelevante Felder
Diese Felder gehen unter Renormierung gegen Null und sind - unter Einschränkungen - vernachlässigbar
3. $\lambda = 0$: Marginale Felder
Diese Felder sind schwach veränderlich, da nur Terme der $O(K^2)$ in die RG-Gleichung eingehen.

5 Renormierungsgruppe im k-Raum; ε -Entwicklung

Um mit der Renormierungsgruppe im k-Raum zu arbeiten, müssen man die Spinvariablen im Ortsraum kontinuierliche Werte annehmen können. Im Impulsraum arbeitet man dann mit den Fouriertransformierten Spinvariablen. Die Gitterstruktur der Spinmodelle im Ortsraum sorgt dabei für einen intrinsischen Impuls-Cutoff.

Der Vorteil an der Renormierungsgruppe im K-Raum liegt nun darin, dass man eine systematische Störungsentwicklung aufziehen kann. Man entwickelt dabei in der Abweichung ε der Raumdimension von vier.

Dazu teilt man die 1. Brillouin-Zone in zwei Teile, einen Hochimpulsbereich und einen Niederimpulsbereich. Dahinter steckt die Erkenntnis, dass Fluktuationen mit hohen Impulsen nur geringe Beiträge zum krit. Verhalten liefern. Eine Integration über die hohen Impulse entspricht nun der Reduktion der Freiheitsgrade. Durch Reskalierung wird die 1. Bz wiederhergestellt.