



WESTFÄLISCHE WILHELMS-UNIVERSITÄT MÜNSTER

Seminar:  
Theorie der Teilchen und Felder

# *Neutrino-Kosmologie*

von: Babak Alikhani

## Inhaltverzeichnis

1. Boltzmann-Gleichung .....	2
2. Ausfrieren (Freeze out) .....	3
3. Neutrino-Kosmologie .....	5

# 1. Boltzmann-Gleichung

- GG.-Beschreibung eine gute Approximation, denn waren die Bestandteile des Universums im therm. GG.
- Abweichung aus dem GG.  $\Rightarrow$  heutiges Bild des Universum
- Beschreibung der Evolution des Universums durch Boltzmann-Gleichung

$$L[f] = C[f]$$

L: Liouville-Operator  
 C: Kollisionsoperator  
 f: Verteilungsfunktion

- relativ.

$$f(p^\mu, x^\mu)$$

$$L = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\gamma}^\alpha p^\beta p^\gamma \frac{\partial}{\partial p^\alpha}$$

- nichtrelativ.

$$f(\vec{v}, \vec{x})$$

$$L = \frac{d}{dt} + \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{v}}$$

- f räumlich homogen und isotrop:  $L[f(E, t)] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R} |\vec{p}|^2 \frac{\partial f}{\partial E}$

$$\frac{dn}{dt} + 3 \frac{\dot{R}}{R} n = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{C[f]}{E}$$

- Kollision-Term für den Prozess

$$\psi + a + b + \dots \leftrightarrow i + j + \dots$$

mit Verwendung der Maxwell-Boltzmann- Statistik

$$\frac{g}{(2\pi)^3} \int C[f] \frac{d^3p_\psi}{E_\psi} = - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \cdot (2\pi)^4 \delta^4(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j - \dots) \cdot \{ |M|_{\psi+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 \cdot f_a f_b \dots f_\psi - |M|_{i+j+\dots \rightarrow \psi+a+b+\dots}^2 \cdot f_i f_j \dots \}$$

$$d\Pi = \frac{g}{(2\pi)^3} \frac{d^3p}{2E} \quad \text{und} \quad f_i(E_i) = e^{-\frac{E_i - \mu_i}{T}}$$

- mit

$$|M|_{\psi+a+b+\dots \rightarrow i+j+\dots}^2 = |M|_{i+j+\dots \rightarrow \psi+a+b+\dots}^2 \equiv |M|^2$$

folgt:

$$\dot{n}_\psi + 3Hn_\psi = \int C[f] \frac{d^3p_\psi}{E_\psi} = - \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots$$

$$\cdot (2\pi)^4 |M|^2 \delta^4(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j - \dots) \cdot \{ f_a f_b \dots f_\psi - f_i f_j \dots \} \quad (*)$$

- Der  $3Hn_\psi$  -Term verantwortlich für die Verdünnungseffekt des expandierenden Universums
- Die rechte Seite von (\*) verantwortlich für die WW.

- $WW = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{n}_\psi + 3Hn_\psi = 0 \quad \Rightarrow n_\psi \sim \frac{1}{R^3}$

- Es folgt:

$$s\dot{Y} = \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{C[f]}{E} \quad \Rightarrow \quad \dot{Y} = \frac{1}{s} \cdot \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3p \frac{C[f]}{E}$$

$$\frac{dY}{dx} = \frac{x}{H(m)} \cdot \frac{dY}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{x}{H(m)s} \int d\Pi_\psi d\Pi_a d\Pi_b \dots d\Pi_i d\Pi_j \dots \cdot (2\pi)^4 |M|^2 \cdot \delta^4(p_\psi + p_a + p_b + \dots - p_i - p_j - \dots) \cdot \{f_a f_b \dots f_\psi - f_i f_j \dots\}$$

## 2. Ausfrieren (Freeze out)

- Teilchen ist stabil, nur Annihilierung und inverse Annihilierungsprozess  $\psi \bar{\psi} \leftrightarrow X \bar{X}$

- X alle Möglichkeiten, in die  $\psi$  annihiliert wird.

- Annahme: Es gibt keine Asymmetrie zwischen  $\psi$  und  $\bar{\psi}$

- $X, \bar{X}$  haben therm. Verteilung mit  $\mu_{X, \bar{X}} = 0 \Rightarrow f_{X, \bar{X}} = e^{-\frac{E_{X, \bar{X}}}{T}}$

$$\frac{dY}{dx} = -\frac{x \langle \sigma_{\psi \bar{\psi} \rightarrow X \bar{X}} |v| \rangle s}{H(m)} (Y^2 - Y_{GG}^2)$$

- Definiere

$$\Gamma \equiv n^{GG} \langle \sigma |v| \rangle$$

- Im relativ. Fall:

$$n_{GG} \sim T^3 \quad \Rightarrow \Gamma \uparrow, \text{ wenn } T \uparrow$$

- Im nichtrelativ. Fall:

$$n_{GG} \sim (mT)^2 e^{-\frac{m}{T}} \quad \Rightarrow \Gamma \downarrow, \text{ wenn } T \uparrow$$

- In beiden Fällen:

$$\Gamma \downarrow, \text{ wenn } T \downarrow$$

- Irgendwann  $\Gamma_A \approx H$  bei  $x = x_f$  (freeze out)

- Betrachten wir zwei verschiedene Fälle:

1.  $x_f \ll 1$  (hot relics)

- relativ. Teilchen und für  $x > x_f$ : Y konstant.

$$Y(x \rightarrow \infty) \equiv Y_\infty = Y_{GG}(x_f) = 0.278 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}(x_f)}$$

$$g_{*s} = \underbrace{\sum g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3}_{\text{Bosonen}} + \frac{7}{8} \underbrace{\sum g_i \left(\frac{T_i}{T}\right)^3}_{\text{Fermionen}} \quad \text{und}$$

$$g_{\text{eff}} = \begin{cases} g & \text{für Bosonen} \\ \frac{3}{4}g & \text{für Fermionen} \end{cases}$$

- heutige Teilchenzahldichte:  $n_{\psi^0} = s_0 Y_\infty = 2970 Y_\infty \text{ cm}^{-3} = 825 \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}(x_f)} \text{ cm}^{-3}$

- $\rho_{\psi^0} = s_0 Y_\infty \cdot m \frac{\text{eV}}{\text{cm}^{-3}}$  : Massendichte

- $\Omega_\psi h^2 = 7.83 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}(x_f)} \cdot m$

- aus  $\Omega_0 h^2 \leq 1 \Rightarrow m \leq 12.8 \text{ eV} \cdot \left[ \frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}(x_f)} \right]$

- Für leichtes Neutrino gilt:

$$\frac{g_{\text{eff}}}{g_{*s}(x_f)} = 7.14$$

- Kosmologische Grenze für die Masse des stabilen, leichten Neutrinos

$$\Omega_{\nu} h^2 = \frac{m_\nu}{91.5 \text{ eV}} \Rightarrow m_\nu \leq 91.5 \text{ eV}$$

2.  $X_f \gg 1$  (cold relics)

- nichtrelativ. Teilchen

2 Beispiele:

i) Baryon-symmetrisches Universums (nicht unser Universum)

$$x_f \approx 42$$

$$T_f \approx 22 \text{ MeV}$$

$$Y_\infty \approx 7 \cdot 10^{-20}$$

In unserem Universum:

$$Y_\infty(N) \approx 6 \cdot 10^{-11} \text{ bis } 10 \cdot 10^{-11}$$

$$Y_\infty(\bar{N}) \approx 10^{-18} \cdot e^{-9 \cdot 10^5}$$

ii) Hypothetisches, stabiles, schweres Neutrino

$$x_f \approx 15 + \ln(m_{\text{in GeV}})$$

$$Y_\infty \approx 6 \cdot 10^{-11} \cdot \left( \frac{1}{m_{\text{in GeV}}} \right)^{-3} \cdot \left[ 1 + \frac{3 \ln(m_{\text{in GeV}})}{15} \right]$$

$$\Omega_{\nu\bar{\nu}} h^2 = 3 \cdot \left( \frac{1}{m_{\text{in GeV}}} \right)^{-2} \cdot \left[ 1 + \frac{3 \ln(m_{\text{in GeV}})}{15} \right]$$

- Lee-Weinberg Grenze für die Masse des stabilen, schweren Neutrinos  
 $\Omega_{\nu\bar{\nu}} h^2 \leq 1 \quad \Rightarrow \quad m \geq 2 \text{ GeV}$

### 3. Neutrino-Kosmologie

- Neutrinos entkoppeln sich relativ früh.
- Die Grenze für die Masse des **stabilen**, leichten und schweren Neutrinos bestimmt
- Jetzt: **instabiles** Neutrino, Produkte aus dem Zerfall sind relativistisch, sogar bis heute.
- Beim Zerfall nimmt die  $\nu$ -Anzahl pro Volumen gemäß Zerfall-Gesetz ab:

$$\frac{dN_\nu}{dt} = -\lambda N_\nu \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d(R^3 n_\nu)}{dt} = -\lambda (R^3 n_\nu)$$

$$\Rightarrow \quad \dot{n}_\nu + 3H n_\nu = -\lambda n_\nu \quad \xrightarrow{\lambda = \frac{1}{\tau}}$$

$$\dot{n}_\nu + 3H n_\nu = -\frac{1}{\tau} n_\nu$$

$$\dot{\rho}_\nu + 3H \rho_\nu = -\frac{1}{\tau} \rho_\nu \quad \Rightarrow \quad \rho_\nu = \rho_\nu(R_i) \left( \frac{R_i}{R} \right)^3 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{d}{dt}(\rho_D R^3) = -\frac{d}{dt}(\rho_\nu R^3) - \frac{1}{3} \rho_D \frac{d}{dt}(R^3),$$

- $\rho_D$  sei die Massendichte der Zerfallprodukte.

$$\dot{\rho}_D + 4H \rho_D = \frac{1}{\tau} \rho_\nu$$

$$\rho_D(t) = \rho_\nu^i \cdot \frac{1}{\tau} \left( \frac{R_i}{R} \right)^4 \int_i^t \frac{R(t')}{R_i} e^{-\frac{t'}{\tau}} dt'$$

- bei  $t \sim \tau$  sei  $R \sim t^n$

$$n = \frac{2}{3} \quad \text{strahlungsdominiertes Universum}$$

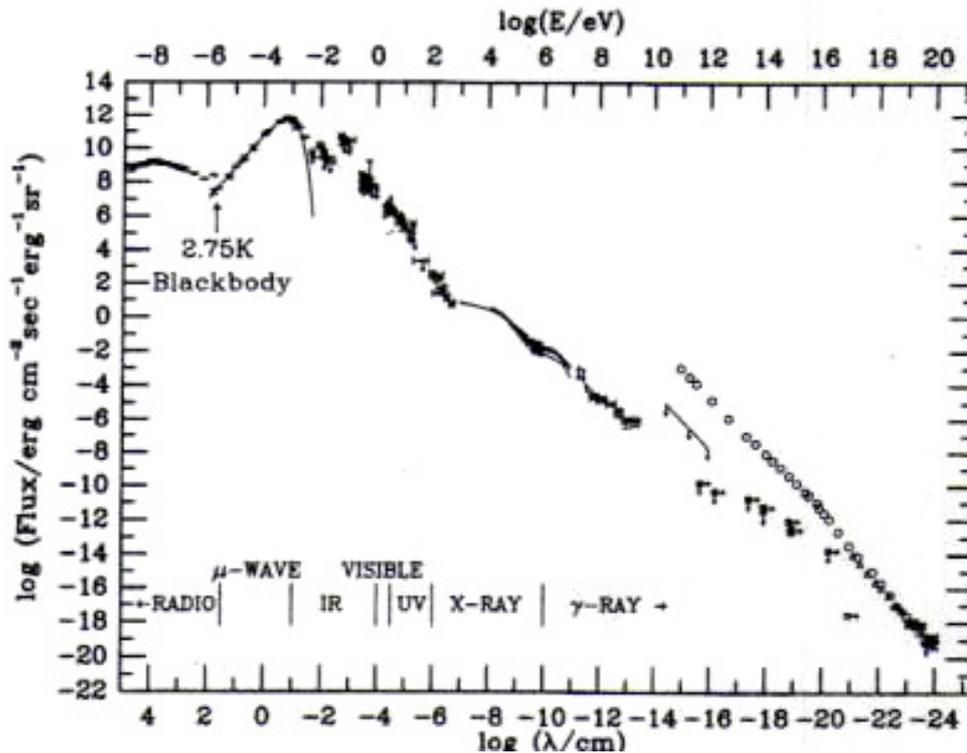
$$n = \frac{1}{2} \quad \text{materiedominiertes Universum}$$

$$\rho_D(t_0) = n! \frac{R(\tau)}{R_0} \rho_\nu(t_0), \quad \rho_\nu(t_0) : \text{heutige Dichte von } \nu\text{'s, falls sie stabil gewesen wären.}$$

- **Bisher** wichtig, dass Produkte relativ., aber Natur der Produkte außer Acht
- Falls Produkte sichtbar (Elektronen, Positronen, Photonen, Pionen,...)  $\Rightarrow$  bessere Grenze
- Ab Jetzt Produkte enthalten Photonen  $\gamma$
- Betrachten 5 verschiedene Epochen:

1.  $t_U \approx 3 \cdot 10^{17} \text{ sec} \leq \tau$

- $\nu$  zerfallen auch zur Zeit.
- Zerfallprodukte tragen zum diffusen Photonen-Hintergrund bei.
- Betrachtung des diffusen Photonen-Hintergrundes



- Grobe Näherung

$$\Rightarrow \tau_{\text{sec}} \geq \begin{cases} 10^{23} m_{\text{in eV}} & \text{leichtes } \nu \\ 10^{25} m_{\text{in GeV}}^{-2} & \text{schweres } \nu \end{cases}, \text{ da: } \frac{d\mathcal{F}}{d\Omega dE} = f(\tau, m)$$

2.  $t_{\text{rec}} \approx 6 \cdot 10^{12} \frac{1}{(\Omega_0 h^2)^{1/2}} \text{ sec} \leq \tau \leq t_U$

- Zerfall-Produkte ww. nicht, tauchen heute in diff. Photonen-Hintergrund

$$m_{\text{in eV}} \leq 2 \cdot 10^{11} (\Omega_0 h^2)^{-\frac{1}{3}} \tau_{\text{in sec}}^{-\frac{2}{3}} \quad \text{leichtes } \nu$$

$$m_{\text{in GeV}} \geq 8 \cdot 10^{-3} (\Omega_0 h^2)^{\frac{1}{6}} \tau_{\text{in sec}}^{\frac{1}{3}} \quad \text{schweres } \nu$$

$$3. t_{\text{therm}} \approx 10^6 \text{ sec} \leq \tau \leq t_{\text{rec}}$$

- In diesem Zeitraum Photonen können an Elektronen und an Photonen aus der Hintergrundstrahlung (CMBR) gestreut werden, dadurch ändert sich das Spektrum der Hintergrundstrahlung.
- Die Prozesse, die die Zahl der Photonen im CMBR ändern, z.B. doppelte Compton-Streuung  $\gamma + e \rightarrow \gamma + \gamma + e$ , sind nicht effektiv.

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} = \frac{m Y_\infty s}{\rho_\gamma} \approx \begin{cases} 0.1 \frac{m}{T} & \text{leichtes } \nu \\ (2 \cdot 10^{-8} \frac{1}{m_{\text{in GeV}}^3}) \frac{m}{T} & \text{schweres } \nu \end{cases}$$

$$m_{\text{in eV}} \leq 10^7 \tau_{\text{in sec}}^{-\frac{1}{2}} \quad \text{leichtes } \nu$$

$$m_{\text{in GeV}} \leq 4 \cdot 10^{-3} \tau_{\text{in sec}}^{\frac{1}{4}} \quad \text{schweres } \nu$$

$$4. t_{\text{end nucleo}} \approx 3 \text{ min} \leq \tau \leq t_{\text{therm}}$$

- In dieser Epoche sind Compton- und doppelte Compton-Streuung effektiv.

⇒ Entropie nimmt zu.

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{\text{eV}} \tau_{\text{sec}} \leq 10^9 & \text{leichtes } \nu \\ m_{\text{GeV}}^{-2} \tau_{\text{sec}}^{\frac{1}{2}} \leq 10^9 & \text{schweres } \nu \end{cases}$$

$$5. t_{\text{beginn nucleo}} \approx 1 \text{ sec} \leq \tau \leq t_{\text{end nucleo}}$$

- Schwere Neutrinos tragen zur Massendichte des Universums während der Nukleosynthese bei.

$$m \geq 5 \cdot 10^{-3} \text{ GeV} \quad \text{schweres } \nu$$

$$6. \tau \leq 1 \text{ sec}$$

- Die Neutrinos werden spurlos verschwinden.
- Ihre Zerfall-Produkte werden vor der Nukleosynthese thermalisiert.
- Einzige Effekt: Zunahme der Entropie