Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 11

Aufgabe 38: 2-Teilchen-Zustand im unendlich hohen Potenzialtopf (4 Punkte)

Betrachten Sie zwei nicht wechselwirkende Teilchen der Masse m in einem unendlich hohen Potenzialtopf in einer Dimension. Eines der Teilchen sei im Zustand ψ_l und das andere im Zustand ψ_n, wobei $l, n = 1, 2, 3, ...$ die diskreten Energie-Eigenzustände nummerieren. Es sei weiterhin $l \neq n$. Berechnen Sie das mittlere Abstandsquadrat der Teilchen $\langle (x_1 - x_2)^2 \rangle$ für

a) unterscheidbare Teilchen, wobei das erste Teilchen im Zustand l sein soll,

b) Bosonen,

c) Fermionen.

Hinweise: Zwei der zur Berechnung benötigten Integralformeln können Sie den Übungen zu Physik IV, Aufgabe 10 entnehmen. Desweiteren kann das Additionstheorem $\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$ nützlich sein.

Aufgabe 39: Ladungsverteilung des Wasserstoff-Moleküls (5 Punkte)

Stellen Sie die Ladungsverteilungen des Wasserstoff-Moleküls für den Fall der symmetrischen und der antisymmetrischen 2-Teilchen-Ortswellenfunktion graphisch dar. Gehen Sie hierzu von dem Heitler-London-Ansatz für die Ortswellenfunktion aus und wählen Sie das Koordinatensystem so, dass die Wasserstoff-Atome, welche sich im Grundzustand befinden sollen, an den Stellen $\vec{R}_a = (-\frac{R}{2}, 0, 0)$ und $\vec{R}_b = (\frac{R}{2}, 0, 0)$ lokalisiert sind. Setzen Sie zur Vereinfachung die y- und z-Koordinaten zu Null. Bestimmen Sie die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte $|\psi_\pm(x_1, x_2)|^2$. Stellen Sie $|\psi_\pm(x, 0)|^2$ für $R = 1,5a$ mit a als Bohrschem Radius und ohne Berücksichtigung der Normierungskonstanten graphisch dar. Berechnen Sie weiterhin die 1-Teilchen-Dichteverteilung

$$\rho_1(x_1) = \int |\psi_\pm(x_1, x_2)|^2 dx_2$$

des Wasserstoff-Moleküls und stellen Sie sie ebenfalls für $R = 1,5a$ und ohne Berücksichtigung der Normierungskonstanten graphisch dar.

Aufgabe 40: HO in zeitabhängiger Störungsrechnung (3 Punkte)

Gegeben sei ein eindimensionaler harmonischer Oszillator mit der Frequenz ω und der elektrischen Ladung q. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befinde sich der Oszillator im Grundzustand. Ein elektrisches Feld werde für einen Zeitraum τ hinzugeschaltet, so dass die Störung die Form

$$H_1(t) = \begin{cases} -qEx & 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

mit E als elektrische Feldstärke hat. Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten p_{01} und p_{02} für die Übergänge vom Grundzustand in den ersten bzw. zweiten angeregten Zustand in der ersten Ordung der zeitabhängigen Störungstheorie.