Übungen zur Quantentheorie I (WS 2002/2003)

Blatt 1

Aufgabe 1: Symmetrischer Kreisel (3 Punkte)

Ein symmetrischer Kreisel mit den Trägheitsmomenten $I_x = I_y$ und I_z lässt sich durch den Hamiltonoperator

$$H = \frac{1}{2I_x}\,(L_x^2 + L_y^2) + \frac{1}{2I_z}\,L_z^2$$

beschreiben.

a) Berechnen Sie die Energieeigenwerte und die Eigenzustände des Hamiltonoperators.

b) Der Kreisel befinde sich im Zustand $l = 3$ und $m = 0$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ergibt die Messung von L_Z zu einem Zeitpunkt t den Wert $\hbar$?

Aufgabe 2: Energieniveaus eines HF-Moleküls (2 Punkte)

Berechnen Sie das Verhältnis der Energiedifferenz der ersten beiden Rotationsniveaus zur Energiedifferenz der ersten beiden Vibrationsniveaus für das HF-Molekül. Das Trägheitsmoment des Moleküls beträgt $I = 1.35 \cdot 10^{-47}$ kg m^2 und die Vibrationsfrequenz ist durch $\omega_0/2\pi c = 3.87$ m^{-1} gegeben.

Aufgabe 3: Elektrische Dipolstrahlung (2 Punkte)

Die Amplitude für die Ausstrahlung elektrischer Dipolstrahlung beim Übergang zwischen zwei Zuständen mit den Drehimpulsquantenzahlen l, m und l', m' enthält die Matrixelemente $\langle l', m'|\vec{Q}|l, m\rangle$. Zeigen Sie, dass die Auswahlregel $m' - m = +1, 0, -1$ gilt.

Aufgabe 4: Energieniveaus diatomischer Moleküle (8 Punkte)

Das Wechselwirkungspotential diatomischer Moleküle ist näherungsweise von der Form

$$V(\rho) = V_0 \left(\frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\rho} \right)$$

mit $\rho = \frac{r}{a}$. Die Potenzialstärke V_0 und der Atomabstand a sind positive Parameter. Berechnen Sie die exakten Vibrations- und Rotationsniveaus zu diesem Potenzial, deren zugehörige Wellenfunktionen im Ursprung beschränkt sind und im Unendlichen verschwinden.

Hinweise: Betrachten Sie die radiale Schrödingergleichung mit $\lambda^2 = \frac{-2ma^2}{\hbar^2}E$ und $\gamma^2 = \frac{2ma^2}{\hbar^2}V_0$ für $u_l(\rho)$. Verwenden Sie den Lösungsansatz $u_l = \rho^\mu\, e^{-\lambda\rho} v_l$ mit $\mu = \frac{1}{2} + \sqrt{\gamma^2 + (l + \frac{1}{2})^2}$ und substituieren Sie anschliessend $z = 2\lambda\rho$. Sie erhalten die konfluente hypergeometrische Differentialgleichung. Schliessen Sie aus dem Verhalten der Lösungen im Unendlichen auf die möglichen Energieniveaus.