ÜBUNGEN zu PHYSIK IV (SS 2003) **Blatt 6**

H. Kohl & S.J. Linz 21.05.03

Besprechung der Übungsaufgaben: 30.05.03/17.06.03

schriftlich: E18,E19,T13 ; Alle anderen Aufgaben/-teile mündlich

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Dienstagsübung am 27.05.03

Aufgabe E17: Bestimmung der Elementarladung nach MILLIKAN (3 Punkte)

Beim MILLIKAN-Versuch wird im ungeladenen Kondensator für ein Öltröpfchen eine Sinkgeschwindigkeit $v_1 = 0,052$mm/s festgestellt. Bei Anlegen einer Spannung $U = 430$V steigt das Tröpfchen mit einer Geschwindigkeit von $v_2 = 0,18$mm/s. Der Abstand d_k der Kondensatorplatten beträgt 5mm, die Dichte ρ des verwendeten Öls ist 890kg/m^3, die Viskosität η der Luft ist $1,83 \cdot 10^{-5}$Poise, (1Poise = 1kg/ms). Wie viele Elementarladungen trägt das Öltröpfchen?

Aufgabe E18: Streuung an einer harten Kugel (2 Punkte)

Wie groß ist der differentielle Wirkungsquerschnitt

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\Omega} = \frac{2\pi b}{2\pi \sin\theta} \frac{\mathrm{d}b}{\mathrm{d}\theta}$$

für die (klassische) Streuung eines Punktteilchens an einer harten Kugel mit Radius R?

Aufgabe E19: Erzeugung von Röntgenstrahlung (3 Punkte)

An einer Röntgenröhre liegt eine Anodenspannung von $U_\mathrm{A} = 300$keV an. Wie groß sind die Geschwindigkeit v, der Impuls p und die de Broglie-Wellenlänge λ_e der Elektronen beim Auftreffen auf die Anode? Wie groß ist die Grenzwellenlänge λ_Gr des emittierten Röntgen-Bremsspektrums? Berechnen Sie das Verhältnis $\lambda_\mathrm{Gr}/\lambda_\mathrm{e}$ als Funktion von $E_\mathrm{kin} = eU_\mathrm{A}$. Was ergibt sich für $E_\mathrm{kin} >> m_0c^2$?

(Hinweis: Sie müssen durchwegs relativistisch rechnen)

Aufgabe E20: Moseley'sches Gesetz (2 Punkte)

Zur Untersuchung der chemischen Zusammensetzung einer Probe wird diese mit Elektronen bestrahlt und die Lage der emittierten Röntgenlinien gemessen. Welche Elemente enthält eine Probe, bei der K_α-Röntgenlinien bei 3,69keV, 4,51keV, 5,41keV, 6,40keV und 8,05keV nachgewiesen werden?

Aufgabe E21: Atomschalen (2 Punkte)

Wie viele Elektronen besitzen die Atome, bei denen im Grundzustand folgende Schalen gefüllt sind:

a) die K- und L-Schale, die 3s-Unterschale und die Hälfte der 3p-Unterschale.

b) die K-, L- und M-Schale und die 4s, 4p und 4d-Unterschale.

Um welche Atome handelt es sich dabei?

Aufgabe T12: Wellenfunktion und de Broglie-Relation (6 Punkte)

a) Ausgehend von der Wahrscheinlichkeitsinterpretation der Zustandsfunktion/Wellenfunktion $\psi(\vec{x}, t)$ bestimme man die Dimension von $\psi(\vec{x}, t)$. (1 P)

b) nach de Broglie kann einem massiven Teilchen (Ruhemasse $m_0 \neq 0$) eine Materiewelle mit Wellenlänge λ via

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

zugeordnet werden. Ausgehend von der relativistischen Formel für die Energie $E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4$ bestimme man eine auch relativistisch gültige Formel für λ. (1 P)

c) Ausgehend von Teil b) berechne man die de Broglie-Wellenlänge für i) thermische Neutronen ($E_{\text{kin}} = \frac{3}{2}k_\text{B}T$) bei Zimmertemperatur und ii) Elektronen, die eine Spannungsdifferenz von 1Volt bzw. 10^9Volt durchlaufen haben. (2 P)

d) Ein Staubkorn mit Durchmesser $d = 10^{-8}$m und Masse $m = 10^{-6}$g bewege sich mit der Geschwindigkeit v. Wie groß darf v sein, damit die de Broglie-Wellenlänge in der Größenordnung des Staubkorndurchmessers d ist? (2 P)

Aufgabe T13: Dirac'sche δ-„Funktion“ (16 Punkte)

Für beschränkte Funktionen $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, ist die Dirac'sche δ-„Funktion“ implizit definiert durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) \mathrm{d}x =: f(x_0). \tag{1}$$

a) Zeigen Sie, daß die Normierung $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0)\mathrm{d}x = 1$ gilt. (0.5 P)

b) Die wesentliche Rechenformel für δ-„Funktionen“, aus der fast alle wichtigen Regeln für den Umgang mit der δ-„Funktion“ folgen, ist

$$\delta\left[g(x)\right] = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|} \delta(x - x_n) \tag{2}$$

für beliebige Funktionen $g(x)$, die bei x_n ($n = 1, 2, 3, ...$) nur einfache Nullstellen besitzen, $g(x_n) = 0$ und $g'(x_n) \neq 0$. Weisen Sie diese Formel nach, indem Sie in (1) $\delta(x - x_0)$ durch $\delta[g(x)]$ substituieren, x durch die Umkehrfunktion von $g(x)$ ausdrücken, die Integration ausführen und $f(x_n)$ wieder durch die δ-„Funktion“ ausdrücken. (4.5 P)

Aufbauend auf Formel (2) berechne man

c) $\delta(\lambda x)$ (0.5 P)

d) $\delta(-x)$ (0.5 P)

e) $\delta\left[(x-\alpha)(x-\beta)\right]$ (0.5 P)
$\delta(x^2-\alpha^2)$ (0.5 P)

f) $x\delta(x)$ (0.5 P)

g) $\int_0^\infty f(x)\delta(x)\mathrm{d}x$ (0.5 P)

Die δ-„Funktion“ (die eigentlich keine Funktion, sondern eine Distribution ist) kann formal als Limes geeigneter Funktionen, wie z.B. der Gauß-Kurve $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}} e^{-x^2/\epsilon^2}$ oder der Lorenz-Linie $\delta_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\epsilon}{x^2+\epsilon^2}$ betrachtet werden, wenn man zur konkreten Berechnung folgende Regel einhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0) f(x)\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(x-x_0) f(x)\mathrm{d}x \qquad (3)$$

wobei Grenzwert und Integration nicht vertauscht werden dürfen.

h) Unter der Benutzung von (3) zeige man (4 P)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta'(x)\mathrm{d}x = -\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\delta(x)\mathrm{d}x = -f'(0)$$

und

$$x\delta'(x) = -\delta(x)$$

sowie

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)\mathrm{d}x = (-1)^n f^{(n)}(x_0)$$

wobei der Superscript (n) die n-te Ableitung bedeutet.

Die Heaviside'sche Sprungfunktion $\theta(x) = \begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x<0 \end{cases}$, ($x=0$ nicht definiert) kann als Limes einer harmlosen Funktion

$$\theta(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{x}{\epsilon} + \frac{\pi}{2}\right)$$

dargestellt werden.

i) Zeigen Sie, daß $\theta'(x) = \delta(x)$ gilt. (1 P)

Berechnen Sie folgende Ausdrücke:

j) $\int_{-1}^{+1} \delta(x)\left[f(x)-f(0)\right]\mathrm{d}x$ (1 P)

k) $\int_{-20\pi}^{+20\pi} \delta(\sin x)\mathrm{d}x$ (1 P)

l) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{1+x^2}\delta(x-\frac{\pi}{2})\mathrm{d}x$ (1 P)