ÜBUNGEN zu PHYSIK IV (SS 2003) **Blatt 10**

H. Kohl & S.J. Linz 02.07.03

Besprechung der Übungsaufgaben: 11.07.03/15.07.03

schriftlich: E30, T22, T23; Alle anderen Aufgaben/-teile mündlich

Abgabe der schriftlichen Aufgaben: In der Dienstagsübung am 08.07.03

Aufgabe E30: Reziprokes Gitter IV (3 Punkte)

Beweisen Sie, daß der reziproke Gittervektor $\vec{g} = m(h\vec{a}^* + k\vec{b}^* + l\vec{c}^*)$ senkrecht auf der Netzebenenschar des zugehörigen Raumgitters mit den Miller'schen Indizes (hkl) steht und daß der Abstand der Netzebenen durch

$$d_{hkl} = \frac{2\pi m}{|\vec{g}|}$$

gegeben ist.

Aufgabe E31: Strukturfaktor (3 Punkte)

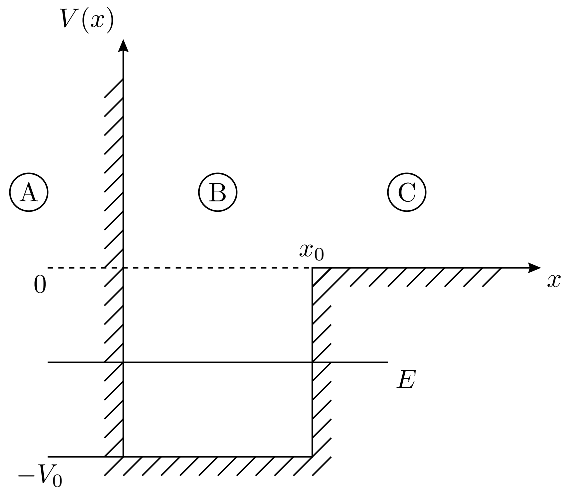
Das kubisch raumzentrierte Gitter läßt sich, wenn man die einfach kubische Elementarzelle zugrunde legt, als einfach kubisches Gitter mit einer Basis aus zwei identischen Atomen bei (000) und $(\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{1}{2})$ auffassen. Berechnen Sie den Strukturfaktor F_{hkl}. Für welche Kombination (hkl) verschwindet der Strukturfaktor? Diskutieren Sie dieses Ergebnis unter Zuhilfenahme der Aufgabe E27.

Aufgabe T22: Potentialmulde in 1 Dimension (6 Punkte)

Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m bewege sich in einem eindimensionalen Potential der Form

$$V(x) = \begin{cases} \infty & x \le 0 \\ -V_0 & 0 < x < x_0 \\ 0 & x \ge x_0 \end{cases}$$

wobei nur gebundene Zustände betrachtet werden sollen.



a) Wie lauten die Lösungsansätze für die stationäre Zustandsfunktion in den verschiedenen Raumbereichen A, B, C und welche Bedingungen müssen an deren Grenzen erfüllt werden. (3 P)

b) Zeigen Sie, daß die Quantisierungsbedingung für die Energieniveaus durch $\sin kx_0 = \sqrt{\hbar^2/2mx_0^2 V_0}\, kx_0$ gegeben ist, wobei $k^2 = (2m/\hbar^2)(E + V_0)$ ist, und diskutieren Sie diese Bedingung graphisch. (2 P)

c) Welche notwendige Bedingung für das Auftreten von wenigstens einem gebundenen Zustand ist zu erfüllen? (0.5 P)

d) Wie groß muß V_0 mindestens sein, damit ein gebundener Zustand existiert? (0.5 P)

Aufgabe T23: Potentialtopf in 3 Dimensionen (9 Punkte)

a) Ein quantenmechanisches Teilchen der Masse m befinde sich in einem dreidimensionalen Potential

$$V(x, y, z) = V(x) + V(y) + V(z) \ .$$

Geben Sie die Schrödinger-Gleichung für dieses Problem an und benutzen Sie die Methode der Separation der Variablen, um es auf drei unabhängige eindimensionale Probleme zurückzuführen. Welcher Zusammenhang besteht zwischen der Energie des dreidimensionalen Zustands und den effektiven Energien der eindimensionalen Zustände. (3 P)

b) Ein Teilchen befinde sich in einem Potentialtopf der Form

$$V(x, y, z) = \begin{cases} 0 & |x|, |y|, |z| \le a/2 \\ \infty & \text{sonst} \end{cases}$$

1) Bestimmen Sie die Lösungen der zugehörigen stationären Schrödinger-Gleichung sowie die Energieniveaus der entsprechenden Eigenzustände. (3 P)

2) Untersuchen Sie die auftretenden Energiezustände auf Entartung, d.h. gleicher Energieeigenwert trotz verschiedener Gesamtwellenfunktion des Systems. Schreiben Sie dazu die Energieniveaus in Einheiten von $E^* = (\hbar^2/2ma^2)$ auf, $E_n = nE^*$, und bestimmen Sie, welche n auftreten können und den dazugehörigen Entartungsgrad, d.h. die Zahl der möglichen <u>verschiedenen</u> Gesamtwellenfunktionen, die zu dem jeweiligen E_n gehören. Welche Regel für den Entartungsgrad ergibt sich? Welches Phänomen tritt bei $E = 27E^*$ auf? (3 P)

Aufgabe T24: Delta-Potential (5 Punkte)

Ein Teilchen der Masse m bewege sich in einem lokal stark anziehenden Potential, das durch ein δ-Potential approximiert werden kann,

$$V(x) = -V_0\, \delta(x), \quad V_0 > 0 \ .$$

a) Berechnen Sie das Energie-Eigenwertspektrum, wobei Sie die Impulsdarstellung verwenden. (3 P)

b) Wie lauten die normierten Eigenfunktionen der gebundenen Zustände und wieviele gebundene Zustände gibt es? (1 P)

c) Geben Sie die Wahrscheinlichkeitsdichten für Ort und Impuls des Teilchens an. (1 P)

Aufgabe T25: sech^2**-Potentialtopf** (5 Punkte)

Ein Potentialtopf in einer Dimension sei gegeben durch

$$V(x) = -\frac{U_0}{[\cosh(\alpha x)]^2} \ .$$

Um die gebundenen Zustände in diesem Potential zu bestimmen, können Sie folgendermaßen vorgehen:

a) Führen Sie die Parameter $\epsilon = \sqrt{-2mE}/\hbar\alpha$ und s via $s(s+1) = 2mU_0/(\hbar\alpha)^2$ ein und transformieren Sie auf die neue unabhängige Variable $\xi = \tanh(\alpha x)$, um zunächst die Schrödinger-Gleichung $-(\hbar^2/2m)\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$, mit obigem Potential, in die Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\right]\phi(\xi) + \left[s(s+1) - \frac{\epsilon^2}{1-\xi^2}\right]\phi(\xi) = 0$$

zu bringen (es handelt sich um die Differentialgleichung für verallgemeinerte Legendre-Funktionen)! (1 P)

b) Mit Hilfe der zusätzlichen Transformation $\phi(\xi) = (1-\xi^2)^{\epsilon/2}w(\xi)$ läßt sich diese Differentialgleichung in die Normalform einer hypergeometrischen Gleichung,

$$u(1-u)w'' + (\epsilon+1)(1-2u)w' - (\epsilon-s)(\epsilon+s+1)w = 0,$$

überführen. Sie wird gelöst durch die hypergeometrischen Funktionen $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ (Details dazu finden Sie zum Beispiel in den Anhängen d) und e) des Bandes über Quantenmechanik in der Lehrbuchreihe von Landau und Lifschitz). (2 P)

c) Zeigen Sie, daß

$$\phi(\xi) = (1-\xi^2)^{\epsilon/2}F(\epsilon-s, \epsilon+s+1, \epsilon+1, (1-\xi)/2)$$

die Randbedingung für $x \to \infty$ erfüllt, während die Randbedingung für $x \to -\infty$ erzwingt, daß $\epsilon - s = -n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$! (1 P)

d) Wie lauten die Energieeigenwerte zu den gebundenen Zuständen, insbesondere zum Grundzustand, und wie hängt deren Zahl von dem Parameter s ab? (1 P)