Übungsblatt 2
Übungen zu Physik I: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr

H. F. Arlinghaus, R. Friedrich, Veranstaltung Nr. 110929, WS 2004/05

$http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich/$

SCHRIFTLICH:
Aufgabe 1: Lineare Unabhängigkeit (2 P)
Es gilt die folgende Definition. N Vektoren $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_N$ sind linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \, \mathbf{a}_i = 0 \qquad (1)$$

nur durch $c_1 = c_2 = \cdots = c_N = 0$ erfüllt werden kann. Andernfalls heißen sie linear abhängig. Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ eines linearen Vektorraumes. Man zeige:

a) daß dann auch die drei Vektoren $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}_3$ linear unabhängig sind, wobei die $\mathbf{f}_i$ gegeben sind durch: $\mathbf{f}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$.

b) daß dann die drei Vektoren $\mathbf{f}_1$, $\mathbf{f}_2$ und $\mathbf{f}_3$ linear abhängig sind, wobei die $\mathbf{f}_i$ gegeben sind durch: $\mathbf{f}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b} - 3\mathbf{c}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{a} + 3\mathbf{b} - \mathbf{c}$, $\mathbf{f}_3 = \mathbf{a} + 4\mathbf{b}$.

Aufgabe 2: Spatprodukt (2 P)
Gegeben seien drei Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3)$ und $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$. Der Ausdruck $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ heißt Spatprodukt.

(1) Zeigen Sie durch Einsetzen, dass die folgende Beziehung gilt: die Gleichung

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \qquad (2)$$

(2) Zeigen Sie mit Hilfe der Darstellung

$$[\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_i = \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk} a_j b_k \qquad (3)$$

und der Eigenschaft $\epsilon_{ijk} = \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij}$ des Levi-Civita-Tensors, daß Gl. (2) gilt.

(3) Welche Bedeutung hat das Spatprodukt?

MÜNDLICH:

Aufgabe 1: Vierfaches Vektorprodukt (1 P)

Man berechne das vierfache Vektorprodukt

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \tag{4}$$

mit Hilfe (i) des Enticklungssatzes und (ii) mit Hilfe des ϵ-Tensors (Levi-Civita-Tensor ϵ_{ijk}). Man zeige mit Hilfe dieses Vektorprodukts, daß vier Vektoren im dreidimensionalen Raum stets linear abhängig sind.

Aufgabe 2: Reziproke Vektoren in der Festkörperphysik (3 P)

$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ seien drei nicht in einer Ebene liegende Vektoren. Definieren Sie drei sogenannte reziproke Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ auf folgende Weise. $\mathbf{b}_1$ sei gegeben durch:

$$\mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3}{\mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3]} \ . \tag{5}$$

$\mathbf{b}_2$ und $\mathbf{b}_3$ erhält man in analoger Weise durch zyklisches Vertauschen der Indizes (1,2,3). Man sagt: die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sind die reziproken Vektoren zu den Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$.

(1) Zeigen Sie für $i, j = 1, 2, 3$:

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j = \delta_{ij} \ . \tag{6}$$

Hinweis: δ_{ij} ist das Kronecker-Symbol definiert durch: $\delta_{ii} = 1$ und $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

(2) Verifizieren Sie:

$$\mathbf{b}_1 \cdot [\mathbf{b}_2 \times \mathbf{b}_3] = \frac{1}{\mathbf{a}_1 \cdot [\mathbf{a}_2 \times \mathbf{a}_3]} \ . \tag{7}$$

(3) Oben wurde erläutert, daß man sagt, die Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sind die reziproken Vektoren zu den Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Zeigen Sie nun, daß die Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ die reziproken Vektoren zu den Vektoren $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sind.

(4) Die Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ seien drei orthonormale Basisvektoren. Bestimmen Sie die hierzu reziproken Vektoren.

Aufgabe 3: Vektorgleichung mit Kreuzprodukt (1 P)
Man löse die Gleichung

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{x}) + (\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c} = \mathbf{d} \tag{8}$$

nach $\mathbf{x}$ auf, ohne die Komponentendarstellung der Vektoren zu verwenden.

Aufgabe 4: Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren (3 P)
Gegeben seien drei linear unabhängige Vektoren $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ die einen linearen Vektorraum $\mathcal{A}$ bilden. Alle möglichen Vektoren von $\mathcal{A}$ lassen sich beschreiben durch $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} c_i\, \mathbf{a}_i$, wobei c_i reelle Zahlen sind. Mit Hilfe des Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren kann man drei orthonormierte Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ finden, die denselben Vektorraum aufspannen. D.h., mit Hilfe dieser Vektoren kann man jeden Vektor $\mathbf{x}$ aus $\mathcal{A}$ darstellen als $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{3} c_i' \mathbf{e}_i$, wobei c_i' reelle Zahlen sind. Das Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren liefert für gegebene $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ die gesuchten $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Es funktioniert folgendermaßen.

1. Schritt: $\mathbf{e}_1 = \mathbf{a}_1 / |\mathbf{a}_1|$
2. Schritt: Man zerlege den Vektor $\mathbf{a}_2$ in $\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_2' + \mathbf{a}_2''$, wobei $\mathbf{a}_2'$ parallel zu $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{a}_2''$ orthogonal zu $\mathbf{e}_1$ ist. Dann gilt: $\mathbf{e}_2 = \mathbf{a}_2'' / |\mathbf{a}_2''|$.
3. Schritt: Man zerlege den Vektor $\mathbf{a}_3$ in $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_3' + \mathbf{a}_3''$, wobei $\mathbf{a}_3'$ durch eine Summe $d_1 \mathbf{e}_1 + d_2 \mathbf{e}_2$ dargestellt werden und $\mathbf{a}_3''$ orthogonal zu $\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{e}_2$ ist. Dann gilt: $\mathbf{e}_3 = \mathbf{a}_3'' / |\mathbf{a}_3''|$.

a) Man zeige, daß $\mathbf{e}_2$ und $\mathbf{e}_3$ sich berechnen lassen als

$$\mathbf{e}_2 = \frac{\mathbf{a}_2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\sqrt{|\mathbf{a}_2|^2 - (\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{e}_1)^2}} \tag{9}$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{a}_3 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_2)\mathbf{e}_2 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1}{\sqrt{|\mathbf{a}_3|^2 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_2)^2 - (\mathbf{a}_3 \cdot \mathbf{e}_1)^2}} \,. \tag{10}$$

b) Man zeige, daß die drei Vektoren

$$\mathbf{a}_1 = (1,1,1)\ ,\ \ \mathbf{a}_2 = (0,1,1)\ ,\ \ \mathbf{a}_3 = (0,0,1) \tag{11}$$

linear unabhängig sind.

c) Man bestimme die orthonormierten Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ zu den Vektoren aus Gleichung (11).