Übungsblatt 6
für 30.5/2.6

**Übungen zu Physik II: Mo. 8-10 Uhr und Do. 8-10 Uhr**

*H. F. Arlinghaus, R. Friedrich*, Veranstaltung Nr. 110927, SS 2005

$http://pauli.uni-muenster.de/menu/Arbeitsgebiete/friedrich.html$

*=Aufgaben aus der Experimentalphysik

SCHRIFTLICH:

**Aufgabe 1: Längenausdehnung und Spannung*** (2 P)

Eine Stahlschiene wird um 25 K abgekühlt.

a) Wie groß ist ihre relative Längenänderung?

b) Bei Eisenbahnschienen wird ihre Länge konstant gehalten. Welche Spannung tritt dabei auf (Thermischer Längenausdehnungskoeffizient $\alpha = 1{,}2 \times 10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$, Elastizitätsmodul $E = 1{,}95 \times 10^{11}\,\mathrm{Nm}^{-2}$)?

**Aufgabe 2: Unterdruck durch Abkühlung eines Gases*** (3 P)

Luft von Normaldruck ($p = 1{,}013 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$), die als ideales Gas betrachtet werden kann, wird in einem Kühlschrank, der hermetisch schließt, von 20 °C auf 8 °C abgekühlt.

a) Welche Druckdifferenz stellt sich zwischen Innen- und Außenraum ein?

b) Die Tür des Kühlschranks sei $h = 1\,\mathrm{m}$ hoch und $b = 0{,}5\,\mathrm{m}$ breit. Welches Drehmoment ist zum Öffnen der Tür erforderlich?

c) Der Griff befinde sich 5 cm vom Rand entfernt. Mit welcher Kraft muss die Hausfrau bzw. der Hausmann ziehen, um die Tür zu öffnen? Ist es sinnvoll einen hermetisch schließenden Kühlschrank zu konstruieren?

**Aufgabe 3: Differentialgleichungen und Greensfunktion** (4 P)
Gegeben sei die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = F(t) \tag{1}$$

eines angetriebenen Oszillators für $m, K > 0$, $\gamma \geq 0$ und $t \geq 0$. Die allgemeine Lösung $x(t)$ ergibt sich aus der homogenen Lösung $x_h$ und einer partikulären Lösung $x_p$: $x(t) = x_h(t) + x_p(t)$. Die partikuläre Lösung kann mit Hilfe einer Greensfunktion $G(z)$ für beliebige Funktionen $F(t)$ bestimmt werden.

a) Machen Sie sich klar, daß die Ableitung des Integrals

$$I(t) = \int_0^t f(t,z)\,\mathrm{d}z \tag{2}$$

nach der Zeit $t$ das folgende Ergebnis liefert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I(t) = \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} f(t,z)\,\mathrm{d}z + f(t,t) \tag{3}$$

b) Zeigen Sie, daß eine partikuläre Lösung der Gl. (1) gegeben ist durch

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t G(t-t')F(t')\,\mathrm{d}t' \\ G(t-t') &= \frac{\exp\{\lambda_1(t-t')\} - \exp\{\lambda_2(t-t')\}}{m[\lambda_1 - \lambda_2]} \ , \end{aligned} \tag{4}$$

wobei $\lambda_{1,2}$ die Lösungen des charakteristischen Polynoms von Gl. (1) sind,

$$m\lambda^2 + \gamma\lambda + K = 0 \ , \tag{5}$$

und wir annehmen, daß $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt (d.h., wir schließen den aperiodischen Grenzfall aus).

Hinweis: Berechnen Sie $\ddot{x}$ und $\dot{x}$ mit Hilfe von Gl. (4) und setzen Sie das Ergebnis unter Verwendung von Gl. (5) in Gl. (1) ein.

c) Betrachten Sie den Spezialfall $\gamma = 0$. Zeigen Sie, daß sich in diesem Fall die Greensfunktion aus Gl. (4) als

$$G(t-t') = \frac{\sin[\Omega(t-t')]}{m\Omega} \tag{6}$$

schreiben läßt mit $\Omega = \sqrt{K/m}$.

d) Bestimmen Sie nun die allgemeine Lösung $x(t)$ von Gl. (1) für $x(0) = 0$, $\dot{x}(t < 0) = 0$, $\gamma = 0$ und

$$F(t) = \begin{cases} F_0 & : \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases} \tag{7}$$

D.h., betrachten Sie den Fall eines zunächst ruhenden, ungedämpften Oszillators, auf den dann im Zeitintervall $[0, T]$ eine konstante Kraft einwirkt.

**Aufgabe 4: Energie, Dämpfung und Antrieb** (4 P)
Gegeben sei ein gedämpfter Oszillator mit der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = 0 \tag{8}$$

mit $m, \gamma, K > 0$ und der Lösung

$$x(t) = A \exp\{-\frac{\gamma t}{2m}\} \sin(\Omega t + \Phi) \tag{9}$$

für $\Omega = \sqrt{K/m - \gamma^2/(4m^2)}$ und $t \geq 0$ (kein aperiodischer Grenzfall).

a) Berechnen Sie mit Hilfe der Lösung (9) das zeitliche Verhalten der Energie

$$E(t) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{Kx^2}{2} \tag{10}$$

b) Gehen Sie analog zur Herleitung des Energiesatzes von konservativen Systemen vor, und leiten Sie aus Gl. (8) die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = -\gamma\dot{x}^2 \tag{11}$$

her.

c) Setzen Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil a) in die linke Seite von Gl. (11) und die Lösung (9) in die rechte Seite von Gl. (11) ein, und zeigen Sie so explizit, daß Gl. (11) erfüllt ist.

d) Zeigen Sie, daß für

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = F(t) \tag{12}$$

die Beziehung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} E(t) = -\gamma\dot{x}^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} W(t) \tag{13}$$

gilt. Wie lautet der Ausdruck für $W$?

**Aufgabe 5: Oszillator und Phasenraum** (1 P)
Stellen Sie Lösungen der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = 0 \tag{14}$$

mit $m, K > 0$ als Trajektorien im Phasenraum $(x, \dot{x})$ dar. Unterscheiden Sie zwischen folgenden Fällen:

a) $\gamma = 0$ (harmonischer Oszillator).
b) $\gamma > 0$ und $K/m \neq \gamma^2/(4m^2)$ (gedämpfter Oszillator).
c) $\gamma > 0$ und $K/m = \gamma^2/(4m^2)$ (gedämpfter Oszillator, aperiod. Grenzfall).
d) $\gamma < 0$ und $K/m \neq \gamma^2/(4m^2)$ (entdämpfter Oszillator).
e) $\gamma < 0$ und $K/m = \gamma^2/(4m^2)$ (entdämpfter Oszillator, aperiod. Grenzfall).

MÜNDLICH:

**Aufgabe 6: Resonanzkurve** (1 P)
Eine partikuläre Lösung der Bewegungsgleichung

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + Kx = F_0 \cos(\omega t) \tag{15}$$

lautet

$$x_p(t) = B(\omega, R) \cos(\omega t + \varphi) \tag{16}$$

mit

$$B(\omega, \gamma) = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega^2 - \Omega_0^2)^2 + \gamma^2\omega^2}} \tag{17}$$

mit $\Omega_0^2 = K/m - \gamma^2/(4m^2)$.

Berechnen Sie $\partial B/\partial\omega$ und zeigen Sie so, daß $B(\omega, \gamma)$ Extrema hat an den Stellen $\omega_{\text{extr}} = 0$ und $\omega_{\text{extr}} = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2/(2m)}$. Was können Sie über diese Extrema aussagen? Wie verschiebt sich das Maximum von $B(\omega, \gamma)$ mit zunehmender Dämpfung?

**Aufgabe 7: Gekoppelte Oszillatoren** (3 P)
Die Bewegungsgleichung für zwei gekoppelte Oszillatoren sei gegeben durch

$$m\ddot{x}_1 + Kx_1 + \kappa(x_1 - x_2) = 0 \; , \tag{18}$$
$$m\ddot{x}_2 + Kx_2 + \kappa(x_2 - x_1) = 0 \tag{19}$$

mit $m, K, \kappa > 0$.

a) Zeigen Sie, daß es zwei spezielle Lösungen gibt, die eine gleichphasige bzw. gegenphasige Schwingung der beiden Oszillatoren beschreiben. Verwenden Sie zu diesem Zweck für die gleichphasige Schwingung den Ansatz

$$x_1(t) = x_2(t) = x_{\text{in}}(t) \tag{20}$$

für die gleichphasige Schwingung den Ansatz

$$x_1(t) = -x_2(t) = x_{\text{anti}}(t) \tag{21}$$

Was erhalten Sie für $x_{\text{in}}(t)$ und $x_{\text{anti}}(t)$?

b) Die allgemeine Lösung erhalten Sie aus einer Überlagerung der speziellen Lösungen. Für $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ erhält man

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_{\text{in}}(t) + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} x_{\text{anti}}(t) \; . \tag{22}$$

Zeichnen Sie den qualitativen Verlauf von $x_1(t)$.

c) Die speziellen Lösungen nennt man Normalschwingungen des gekoppelten Systems. Man kann die Normalschwingungen auch formal herleiten. Zu diesem Zweck setzen Sie den Ansatz

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\cos(\omega t) \tag{23}$$

mit $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ und $\mathbf{A} = (A_1, A_2)$ in Gl. (18) ein. Sie erhalten so ein algebraisches lineares Gleichungssystem für $A_1$ und $A_2$. Um nicht-triviale Lösungen zu erhalten muß die Determinante des Gleichungssystems verschwinden. Bestimmen Sie mit Hilfe dieser Forderung die Normalfrequenzen $\omega$. Die zu den Normalfrequenzen gehörigen Vektoren $\mathbf{A}$ beschreiben dann die Normalschwingungen.

Hinweise:

**Aufgabe 3**
Betrachten Sie zunächst den allgemeinen Fall eines Parameterintegrals mit veränderlicher Integralgrenze

$$I(t) = \int_0^{\psi(t)} f(t,z)\,\mathrm{d}z \ , \tag{24}$$

wobei $\psi(t)$ eine Funktion von $t$ ist. Schreiben Sie das Integral als

$$I(t) = \tilde{I}(\psi(t),t) \ , \quad \tilde{I}(a,t) = \int_0^a f(t,z)\,\mathrm{d}z \ . \tag{25}$$

Der Ausdruck $\tilde{I}(a,t)$ stellt ein gewöhnliches Parameterintegral dar. Verwenden Sie dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} I = \frac{\partial \tilde{I}(\psi,t)}{\partial \psi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\psi(t) + \frac{\partial}{\partial t}\tilde{I}(\psi,t) \ . \tag{26}$$

Schließlich betrachten Sie den Spezialfall $\psi(t) = t$.

**Aufgabe 4 a**
Zur Kontrolle Ihrer Rechnung hier das Ergebnis:

$$E(t) = -\frac{\gamma A^2}{4} \exp\{\frac{-\gamma t}{m}\} \left\{ \frac{\gamma}{2m} \cos(2Y) + \Omega \sin(2Y) \right\} + \frac{K A^2}{2} \exp\{\frac{-\gamma t}{m}\} \tag{27}$$

mit $Y = \Omega t + \Phi$.

**Aufgabe 7**
Abbildungen: System in Ruhe (oben) und bei Auslenkung (unten).