Äquivariante Gerben und Abstieg

von

Thomas Nikolaus

Diplomarbeit

vorgelegt der

Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften der
Universität Hamburg

im Mai 2009

angefertigt am

Schwerpunkt Algebra und Zahlentheorie
Department Mathematik
Universität Hamburg

Gutachter:
Prof. Dr. Christoph Schweigert
Prof. Dr. Birgit Richter

Eidesstattliche Erklärung
Hiermit erkläre ich, dass ich die vorliegende Arbeit ohne fremde Hilfe selbständig verfasst und nur die angegebenen Hilfsmittel und Quellen verwendet habe.

Thomas Nikolaus

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

Per Definition sind Lie-Gruppen sowohl glatte Mannigfaltigkeiten als auch Gruppen. Diese tragen darüber hinaus noch eine ganze Menge zusätzliche geometrische Strukturen. Auf einer Lie-Gruppe existiert zum Beispiel eine durch die Killing-Form induzierte kanonische Metrik. Mit dieser wird sie zu einer Riemannschen Mannigfaltigkeit. Die Metrik selbst weist eine hohe Symmetrie auf. Sie ist unter der Links- und unter der Rechtsmultiplikation der Lie-Gruppe invariant. Insbesondere folgt daraus natürlich, dass sie auch invariant unter der Konjugationswirkung der Lie-Gruppe auf sich selbst ist.

Zusätzlich tragen kompakte, einfache und einfach zusammenhängende Lie-Gruppen als weitere kanonische Struktur eine Familie von Gerben. Gerben sind Objekte die in der Stringtheorie und in der Lagrange'schen Formulierung von zweidimensionaler konformer Feldtheorie eine wichtige Rolle spielen [GR02, Gaw05, SSW07].

Klassische Eichtheorien punktförmiger Teilchen - wie zum Beispiel die Elektrodynamik - kann man als Theorie von U(1)-Hauptfaserbündeln mit Zusammenhang verstehen. Der Wirkungsterm des Eichfeldes auf ein Teilchen kann dann als Paralleltransport entlang der Weltlinie des Teilchens ausgedrückt werden. Für geschlossene Weltlinien entspricht dieser der Holonomie des Bündels. In der Stringtheorie dagegen beschäftigt man sich mit eindimensionalen Objekten, den Strings. Diese überstreichen also zweidimensionale Weltflächen. Für eine mathematisch Beschreibung der Stringtheorie, analog zur Beschreibung der Elektrodynamik, benötigt man also Objekte, für die man Holonomie um geschlossene Flächen berechnen kann. Diese spielen dann in der Stringtheorie eine vergleichbare Rolle wie die U(1)-Bündel in der Elektrodynamik.

Die gesuchten Objekte sind Gerben mit Zusammenhang. Es existieren mehrere Zugänge zu Gerben, ihnen gemein ist, dass sie durch die dritte ganzzahlige Kohomologie klassifiziert werden können. Ich werde in dieser Arbeit den Begriff der Bündelgerbe als Modell für Gerben verwenden. Bündelgerben wurden in [Mur96] eingeführt. Später wurden noch Isomorphismen, sogenannte stabile Isomorphismen definiert [MS01]. Es stellte sich jedoch heraus, dass man zusätzlich noch Morphismen von diesen stabilen Isomorphismen betrachten muss [Ste00]. Damit bilden Bündelgerben eine Bikategorie.

Wir wollen nun zum Fall einer kompakten, einfachen, einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppe zurückkommen. Aus kohomologische Überlegungen ist es klar, dass in diesem Fall eine ausgezeichnete Bündelgerbe auf dieser Lie-Gruppe existiert, die sogenannte fundamentale Gerbe. Sie ist fundamental in dem Sinne, dass sich jede weitere Gerbe auf der Lie-Gruppe durch Tensorieren und Übergang zum Dualen aus dieser fundamentalen Gerbe erzeugen lässt.

Es zeigt sich, dass diese Gerbe, genau wie die anfangs angesprochene Metrik, eine Symmetrie-Eigenschaft bezüglich der Konjugationswirkung aufweist. Wichtig ist, diese Symmetrieeigenschaft im Detail zu verstehen, da sie unter anderem den physikalischen Wirkungsterm beeinflusst. Der richtige mathematische Formulierung von Symmetrie ist in diesem Kontext, der Begriff der Äquivarianz. Diesen explizit zu verstehen ist Ziel der Arbeit. Damit soll dann schließlich eine transparente Beschreibung der fundamentale Gerbe gegeben werden.

Im Verlaufe der Bearbeitung dieses Themas wurde immer klarer, dass in diesem Zusammenhang das Verkleben von lokal definierten Objekten eine wichtige Rolle spielt. Dies führt auf das Prinzip des Abstiegs. Es ist sogar so, dass die komplette Definition und viele Eigenschaften von Bündelgerben durch systematisches Benutzen von Abstiegsargumenten verstanden werden können. Bei der Formulierung von Abstieg spielen simpliziale Mannigfaltigkeiten eine wichtige Rolle. Diese sind in einem formal eng verwandten Sinne auch bei der Definition von Äquivarianz von Bedeutung. Aus der Verwandtschaft dieser beiden Begriffe können daher auch interessante Resultate gewonnen werden.

In Kapitel 2 werden, anhand des Beispiels der U(1)-Bündel, zentrale Begriffe wie der eines Stacks und der einer Grothendieck Topologie wiedergegeben. Dieses Kapitel enthält nichts Neues, die bekannten Sachverhalte werden aber im Hinblick auf eine spätere Verallgemeinerung dargestellt. Wir werden auch die Klassifikation von Bündeln ansprechen und den bekannten Begriff von Holonomie, der in der Elektrodynamik auftritt, über Abstiegsprinzipien einführen.

In Kapitel 3 wenden wir den Begriff des Abstiegs dann auf 2-kategorielle Strukturen an. Dadurch können wir Bündelgerben, wie sie von Murray definiert wurden, als Abstiegsobjekte identifizieren. In diesem Zusammenhang werden wir auch die Kategorie der Gerben etwas allgemeiner als in [Ste00] und [Wal07] definieren. Unsere Kategorie ist jedoch äquivalent zu der üblichen Kategorie der Gerben, was wir in Satz 4.5.5 zeigen. Am Ende des Kapitels werden wir schließlich die Holonomie, in Analogie zum Vorgehen bei Bündeln, über Abstiegsprinzipien einführen.

Kapitel 4 stellt den technischen Kern der Arbeit dar. Hier werden äquivariante Objekte formal definiert und untersucht. Die dabei erzielten Resultate werde ich sehr allgemein formulieren, so dass sie auch für beliebige Stacks, und nicht nur Bündelgerben gelten. Eine der Hauptaussagen ist der Satz 4.3.5 über äquivarianten Abstieg. Dieser erlaubt es, lokal gegebene äquivariante Objekte zu verkleben. Ein weiterer wichtiger Satz, ist Satz 4.4.18. Dieser gibt eine hinreichende Bedingung dafür, dass zwei Kategorien von Äquivarianten Objekten gleich sind. Im Kontext von Bündelgerben stellt dies ein neues Resultat dar. Daraus folgt dann, dass Gerben Abstieg erfüllen (Satz 4.5.3) und ein Vergleichsresultat von verschiedenen Definitionen äquivarianter Objekte (Bemerkung 4.5.8).

In Kapitel 5 schließlich, werden wir die entwickelten Techniken auf äquivariante Bündelgerben auf Wirkunsgruppoiden anwenden. Zunächst beweisen wir den Satz 5.4.3. Dieser zeigt, dass äquivarianter Gerben lokal um Orbits stets durch zentrale Erweiterungen der Stabilisatoren gegeben sind. Mittels dieser lokalen Beschreibung und dem Satz über äquivarianten Abstieg können wir dann in Kapitel 5.5 eine einfache und transparente Beschreibung der fundamentalen Gerbe auf einer kompakten, einfachen und einfach zusammenhängenden Lie-Gruppe geben.

2 Der Stack der Bündel

Wir wollen in diesem Kapitel, ausgehend von der Theorie von U(1)-Hauptfaserbündeln mit Zusammenhang, den Begriff des Stacks einführen und verstehen. Außerdem wollen wir die Klassifikation von Bündeln geben und die Holonomie in einer Weise einführen, die im nächsten Kapitel ein analoges Vorgehen für Bündelgerben möglich macht.

2.1 U(1)-Hauptfaserbündel

Wir nehmen an, dass der Leser vertraut ist mit dem klassischen Begriff von Hauptfaserbündeln mittels Totalraum und Gruppenwirkung. Genauer betrachten wir hier differenzierbare Bündel auf glatten Mannigfaltigkeiten. Insgesamt werden in dieser Arbeit alle Räume glatt sein und alle Abbildungen differenzierbar, soweit nicht anders gesagt. Spezieller werden wir uns in diesem Kapitel auf U(1)-Hauptfaserbündel beziehen. Diese werden eine zentrale Rolle spielen, daher wollen wir auch oft nur von Bündeln sprechen wenn wir U(1)-Hauptfaserbündel meinen. Wir betrachten zunächst einige charakteristische Eigenschaften von U(1)-Hauptfaserbündeln näher.
Sei also für eine glatte Mannigfaltigkeit M die Kategorie der U(1)-Hauptfaserbündel über M mit $\mathcal{B}un(M)$ bezeichnet.

Pullback Für eine weitere Mannigfaltigkeit N und jede glatte Abbildung $f : M \to N$ haben wir einen Pullbackfunktor

$$f^* : \mathcal{B}un(N) \to \mathcal{B}un(M)$$

der einem Bündel P über N seinen Pullback zuordnet. Dieser ist als Faserprodukt

$$\begin{tikzcd} f^*P \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ M \arrow[r] & N \end{tikzcd}$$

definiert. Der Pullback auf eine Teilmenge $U \subset N$ ist einfach das Einschränken des Bündels und wird deswegen oft auch als $P|_U$ geschrieben. Außerdem ergibt sich aus der Definition als Faserprodukt, dass der Pullback entlang der Verkettung von zwei Morphismen natürlich isomorph zur Verkettung der einzelnen Pullbacks ist. Also existiert für zwei verknüpfbare Abbildungen und ein Bündel ein eindeutiger Isomorphismus $f^*g^*P \xrightarrow{\sim} (g \circ f)^*P$.

Lokale Trivialität Über jeder Mannigfaltigkeit M haben wir das triviale Bündel $1_M := M \times \mathrm{U}(1) \to M$. Die Endomorphismengruppe dieses trivialen Bündels ist die Gruppe $C^\infty(M, \mathrm{U}(1))$ von differenzierbaren Abbildungen $M \to \mathrm{U}(1)$. Wir haben somit für jede Mannigfaltigkeit M die volle Unterkategorie

$$\mathcal{B}untriv(M) \subset \mathcal{B}un(M).$$

Wichtig ist jetzt, dass wir für jedes Bündel $P \to M$ eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M haben, sodass $P|_{U_i}$ trivialisierbar ist. Wir können die Familie von Inklusionen $U_i \hookrightarrow M$ mithilfe der disjunkten Vereinigung zu einer Abbildung

$$\pi : \bigsqcup_{i\in I} U_i \to M$$

zusammenfassen. Dann ist der Pullback π^*P als Bündel isomorph zu dem trivialen Bündel über $\bigsqcup_{i\in I} U_i$.

Verkleben Eine zentrale Eigenschaft von Bündeln ist die Möglichkeit lokal gegebene Bündel mit geeigneten lokal gegebenen Isomorphismen zu einem globalen Bündel zu verkleben. Technisch formulieren wir dies, wie folgt: Gegeben sei eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M und über jedem (U_i) ein Bündel P_i. Außerdem seien Isomorphismen

$$\varphi_{ij} : P_i|_{U_i\cap U_j} \to P_j|_{U_i\cap U_j}$$

auf doppelten Durchschnitten gegeben, die die *Kozykelbedingung* $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$ auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ erfüllen. Wir setzen nun

$$P := \bigsqcup_i P_i \ / \sim$$

mit der Relation $\sim$, die ein Element $p \in P_i$ identifiziert mit $\varphi_{ij}(p) \in P_j$. Wie man sich leicht überlegt, ist P dann der Totalraum eines Bündels über M, dessen Einschränkung auf die U_i den Bündeln P_i entspricht.

Die genannten drei Prinzipien sind fundamental für die Theorie von Hauptfaserbündeln. Wir werden später sogar sehen, dass die Kategorie von Bündel durch diese Prinzipien eindeutig bestimmt ist. Außerdem lassen sich diese Prinzipien sehr allgemein anwenden, um andere geometrische, bündelartige Strukturen zu untersuchen. Im Folgenden werden wir also diese zentralen Prinzipien genauer formulieren und untersuchen.

2.2 Prägarben in Kategorien

Zunächst betrachten wir die Pullback-Struktur, die wir bei Bündeln gegeben haben. Für jede Mannigfaltigkeit haben wir eine Kategorie und für jede Abbildung erhalten wir einen Pullbackfunktor entlang der Abbildung. Diese Pullbackfunktoren erfüllen weiterhin Kohärenzbedingungen für die Verkettung von Morphismen. Um dies in einer abstrakteren Weise beschreiben zu können, sei nun $\mathcal{M}an$ die Kategorie der Mannigfaltigkeit mit glatten Abbildungen und $\mathcal{C}at$ die 2-Kategorie der Kategorien. Für 2-Kategorien und speziell die 2-Kategorie $\mathcal{C}at$, siehe [ML98] und für schwache Funktoren siehe [Lei98]. Für die nun folgende Definition fassen wir $\mathcal{M}an$ ebenfalls als 2-Kategorie auf, indem wir für jeden 1-Morphismus den Identitäts-2-Morphismus auf diesem 1-Morphismus einführen.

Definition 2.2.1. Eine Prägarbe in Kategorien auf $\mathcal{M}an$ ist ein schwacher 2-Funktor $\mathfrak{X} : \mathcal{M}an^{op} \to \mathcal{C}at$.

Ein solcher 2-Funktor besteht aus Daten die Axiomen genügen. Welche das explizit sind, wollen wir nun genau hinschreiben: Eine Prägarbe in Kategorien $\mathfrak{X}$ besteht aus einer Kategorie $\mathfrak{X}(M)$ für jede Mannigfaltigkeit M, einem Funktor $f^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ für jede glatte Abbildung $f : M \to N$ und natürlichen Isomorphismen

$$g^* \circ f^* \Rightarrow (f \circ g)^* \qquad Id_{\mathfrak{X}(M)} \Rightarrow (id_M)^* \tag{1}$$

für verknüpfbare Abbildungen f, g und eine Mannigfaltigkeit M. Zusätzlich folgt aus der Definition eines 2-Funktors die Kommutativität der folgenden Kohärenzdiagramme:

$$\begin{tikzcd}
f^* \circ Id_{\mathfrak{X}(M)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, equal] & f^* \circ id_M^* \arrow[d, Rightarrow] \\
 & f^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
h^* \circ g^* \circ f^* \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & (g \circ h)^* \circ f^* \arrow[d, Rightarrow] \\
h^* \circ (f \circ g)^* \arrow[r, Rightarrow] & (f \circ g \circ h)^*
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
id_N^* \circ f^* \arrow[d, Rightarrow] & Id_{\mathfrak{X}(N)} \circ f^* \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dl, equal] \\
f^* &
\end{tikzcd}$$

Mittels dieser Umformulierung der Definition sehen wir nun, dass U(1)-Bündel eine Prägarbe in Kategorien bilden. Wir haben nämlich, wie bereits im ersten Kapitel beschrieben, über jeder Mannigfaltigkeit M die Kategorie $\mathcal{B}un(M)$ und die Pullbackfunktoren $f^* : \mathcal{B}un(N) \to \mathcal{B}un(M)$ entlang von Abbildungen $f : M \to N$. Die Kohärenzisomorphismen (1) erhalten wir über die universelle Eigenschaft des Pullbacks. Die Kommutativität der geforderten Diagramme folgt ebenfalls aus der universellen Eigenschaft.

Das zweite Beispiel einer Prägarbe in Kategorien bilden die trivialen Bündel $\mathcal{B}untriv$, die wir ebenfalls im ersten Kapitel bereits erwähnt haben. Für jede Mannigfaltigkeit haben wir die Kategorie $\mathcal{B}untriv(M)$, die nur ein Objekt 1_M enthält. Der Pullback des Bündels $1_N = N \times \mathrm{U}(1) \to N$ entlang der Abbildung $f : M \to N$ ist das triviale Bündel $1_M = M \times \mathrm{U}(1) \to M$. Der Pullback eines Morphismus $\varphi \in \mathrm{Hom}(1_N, 1_N) = C^\infty(N, \mathrm{U}(1))$ ist gegeben durch das Zurückziehen $f^*(\varphi) := \varphi \circ f \in C^\infty(M, \mathrm{U}(1)) = \mathrm{Hom}(1_M, 1_M)$. In diesem Fall sind sogar alle Isomorphismen (1) durch Identitäten gegeben.

Wir haben gesehen, dass für jede Mannigfaltigkeit M die Kategorie $\mathcal{B}untriv(M)$ eine volle Unterkategorie von $\mathcal{B}un(M)$ ist. Die Inklusionsfunktoren $i_M : \mathcal{B}untriv(M) \hookrightarrow \mathcal{B}un(M)$ kommutieren weiterhin bis auf einen kanonischen Isomorphismus mit den Pullbackfunktoren.

Allgemein wollen wir für zwei Prägarben in Kategorien $\mathfrak{X}$ und $\mathfrak{Y}$ Morphismen einführen. Ein solcher Morphismus besteht aus einer Familie von Funktoren $\Phi_M : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{Y}(M)$ für jede Mannigfaltigkeit M. Diese Funktoren sollen mit den Pullbacks entlang von Abbildungen $f : M \to N$ kommutieren, in dem Sinne, dass es Isomorphismen $\Phi_M \circ f^* \to f^* \circ \Phi_N$ gibt, die Kohärenzbedingungen erfüllen. Um dies zu präzisieren, setzen wir:

Definition 2.2.2. Ein Morphismus $\Phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ zwischen Prägarben in Kategorien $\mathfrak{X}, \mathfrak{Y} : \mathcal{M}an^{op} \to \mathcal{C}at$ ist eine natürliche Transformation der Funktoren.

Wir werden an dieser Stelle nicht explizit darauf eingehen, welche Bedingungen die Isomorphismen $\Phi_M \circ f^* \to f^* \circ \Phi_N$ genau erfüllen müssen, da dies kombinatorisch recht kompliziert wird. Stattdessen stellen wir fest, das wir weiterhin eine kanonische Definition von 2-Morphismen $\Phi \Rightarrow \Psi$ haben:

Definition 2.2.3. Ein 2-Morphismus zwischen Morphismen Φ und Ψ ist eine Modifikation der Transformationen.

Für die Definition von Modifikation siehe ebenfalls [Lei98]. Ein solcher 2-Morphismus zwischen Φ und Ψ ist für jede Mannigfaltigkeit M eine natürliche Transformation der Funktoren Φ_M und Ψ_M.

2.3 Grothendieck-Topologien

Nachdem wir auf die Pullbackstruktur von Bündeln nun detailliert eingegangen sind, bleiben unter den in Kapitel (2.1) genannten Eigenschaften die lokale Trivialität und das lokale Verkleben von Bündeln übrig. Um diese formulieren zu können, brauchen wir einen geeigneten Begriff von Lokalität auf der Kategorie $\mathcal{M}an$. Ein solcher Begriff von Lokalität ist technisch gegeben durch Auszeichnen gewisser Morphismen, die wir Überdeckungen nennen. In (2.1) haben wir dazu Abbildungen der Form $\pi : \bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M$ verwendet, wobei $(U_i)_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von M ist.
Hier wollen wir nun als formalen Rahmen für Überdeckungen den Begriff der Grothendieck-Topologie auf einer Kategorie einführen.

Definition 2.3.1. Eine Grothendieck-Topologie auf einer Kategorie C ist gegeben durch eine Klasse von Morphismen, die wir Überdeckungen nennen und oft $Y \twoheadrightarrow M$ schreiben, so dass gilt:

(i) Isomorphismen sind Überdeckungen

(ii) Für einen Morphismus $f : N \to M$ und eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ existiert der Pullback $f^*Y \twoheadrightarrow N$ und ist eine Überdeckung.

(iii) Die Komposition von Überdeckungen ist eine Überdeckung.

Bemerkung 2.3.2. *In der ursprünglichen Definition von Grothendieck ist das was wir hier definieren nur eine Prätopologie. Weil dies für unsere Zwecke aber ausreichend ist, werden wir diese Unterscheidung nicht vornehmen und fortan nur von Grothendieck-Topologien sprechen.*

Als erstes Beispiel einer Grothendieck-Topologie auf der glatten Kategorie $\mathcal{M}an$ betrachten wir die *Grothendieck-Topologie der offenen Überdeckungen*. Die Überdeckungen sind hierbei die bereits erwähnten Abbildungen der Form $\pi : \bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M$ mit einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M. Dies ist die Topologie auf $\mathcal{M}an$, die bei den meisten geometrischen Begriffsbildungen zugrunde liegt.
Technisch muss man dabei beachten, dass die Wahl von Abbildungen $\pi : \bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M$ genau genommen gar keine Topologie liefert, da das erste Axiom nicht erfüllt ist. Daher müssen wir noch das Vorschalten eines Diffeomorphismus zulassen, also Abbildungen der Form $Y \xrightarrow{\sim} \bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M$ betrachten. Diesen Aspekt können wir im Folgenden aber vernachlässigen, da man, falls das erste Axiom nicht erfüllt ist, stets durch einen solchen Saturierunsprozess eine Grothendieck-Topologie im Sinne der Definition bekommen kann.
Axiom (ii) ist aber erfüllt, denn der Pullback einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ entlang einer glatten Abbildung $f : N \to M$ ist die offene Überdeckung $(f^{-1}(U_i))_{i\in I}$. Weil offene Teilmengen einer offenen Menge ebenfalls offen im ganzen Raum sind, ist Axiom (iii) ebenfalls erfüllt.

Weitere extreme Beispiele von Grothendieck-Topologien auf einer Kategorie C sind die indiskrete Topologie, bei der die Überdeckungen genau durch die Isomorphismen gegeben sind, und die diskrete Topologie, bei der jeder Morphismus eine Überdeckung ist. Letzteres Beispiel ist allerdings nur eine Grothendieck-Topologie, falls alle Pullbacks in C existieren. Dies ist zum Beispiel für $\mathcal{M}an$ nicht der Fall.

Um verschiedene Überdeckungen eines Raumes vergleichen zu können, brauchen wir nun den Begriff der Verfeinerung.

Definition 2.3.3. Eine Überdeckung $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ heißt Verfeinerung einer Überdeckung $\pi' : Y' \twoheadrightarrow M$ falls π über π' faktorisiert, es also eine Abbildung $s : Y \to Y'$ gibt, so dass

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[rr, "s"] \arrow[dr, "\pi"'] & & Y' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Im Fall der offenen Überdeckungen liefert dieser Begriff nun offenbar genau den klassischen Begriff der Verfeinerung einer offenen Überdeckung. Mithilfe des Begriffs der Verfeinerung können wir nun verschiedene Grothendieck-Topologien auf einer Kategorie miteinander vergleichen.

Definition 2.3.4. Eine Grothendieck-Topologie τ_1 heißt feiner als eine Grothendieck-Topologie τ_2, falls für jede Überdeckung in τ_2 eine Verfeinerung in τ_1 existiert. Zwei Grothendieck-Topologien heißen äquivalent, falls jede feiner als die andere ist.

Diese Definition von Äquivalenz ist fundamental für unser weiteres Vorgehen. Es wird wichtig sein sich bei allen Begriffen, die von der Grothendieck-Topologie abhängen, zu vergewissern, dass sie sich beim Übergang zu einer äquivalenten Topologie nicht ändern, also nur von der Äquivalenzklasse der Topologie abhängen.

Im Fall der offenen Topologie auf der Kategorie $\mathcal{M}an$ wollen wir nun zu einer äquivalenten Topologie übergehen, die aber mehr Überdeckungen umfasst. Dadurch werden wir eine größere Flexibilität erhalten.
Die Überdeckungen in dieser äquivalenten Topologie müssen also insbesondere durch offene Überdeckungen verfeinert werden können. Weiterhin müssen sie stabil unter Pullbacks sein. Dies führt uns darauf surjektive Submersionen als Überdeckungen zu betrachten. Denn eine surjektive Submersion $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ hat nach dem Satz über implizite Funktionen lokale Schnitte $s_i : U_i \to Y$. Diese lassen sich zu einer Verfeinerung $s : \bigsqcup U_i \twoheadrightarrow Y$ über M zusammenfassen. Weiterhin folgt mit differentialgeometrischen Methoden, dass die nötigen Pullbacks existieren und es sich um eine Grothendieck-Topologie auf $\mathcal{M}an$ handelt. Wir nennen sie die *Grothendieck-Topologie der surjektiven Submersionen*
Wie bereits geschrieben wird die Benutzung dieser Topologie gegenüber den offenen Mengen diverse Vorteile bieten, zum Beispiel bei der Konstruktion von Gerben auf kompakten Lie-Gruppen in Kapitel 5. An dieser Stelle können wir aber bereits sehen, wie sich dies auf das Prinzip der lokalen Trivialität eines Bündels $P \to M$ auswirkt. Denn die Existenz einer trivialisierenden offenen Überdeckung $\bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M$ wird zwar in der üblichen Definition eines Bündels gefordert, eine solchen Überdeckung für ein Bündel ist aber nicht kanonisch gegeben, sondern muss willkürlich gewählt werden. Außerdem kann es in konkreten Fällen sehr schwierig sein, eine solche anzugeben. Da die Bündelprojektion $\pi : P \to M$ aber eine surjektive Submersion ist, können wir diese als Überdeckung in der Topologie der surjektiven Submersionen auffassen. Wir sehen, dass für das zurückgezogene Bündel

$$\begin{tikzcd} \pi^*P = P \times_M P \arrow[r] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ P \arrow[r, two heads] & M \end{tikzcd}$$

ein Schnitt existiert, nämlich die Diagonale $P \to P \times_M P$. Also ist das Bündel trivialisierbar. Der Totalraum eines Bündels bietet somit, falls wir den allgemeineren Begriff von Überdeckungen zugrunde legen, die kanonische Wahl einer trivialisierenden Überdeckung.

2.4 Abstieg

In diesem Kapitel werden wir präzisieren, was es bedeutet, dass wir lokal gegebene Objekte zu einem globalen verkleben können. Dazu wählen wir zunächst eine Überdeckung $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ eines Raumes M. Diese liefert uns folgendes Diagramm von Mannigfaltigkeit:

$$\cdots \overset{\partial_0}{\underset{\partial_3}{\rightrightarrows\rightrightarrows}} Y \times_M Y \times_M Y \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\rightrightarrows\rightarrow}} Y \times_M Y \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} Y\,.$$

Man beachte hierbei, dass die Existenz der Faserprodukte $Y^{[n]} := Y \times_M \ldots \times_M Y$ aus den Axiomen der Grothendieck-Topologie folgt. Die Abbildungen ∂_i sind gegeben durch

$$\begin{array}{rccl} \partial_i : & Y^{[n+1]} & \to & Y^{[n]} \\ & (y_0, \ldots, y_n) & \mapsto & (y_0, \ldots, \hat{y}_i, \ldots, y_n). \end{array}$$

Der Hut bedeutet dabei, dass der entsprechende Eintrag weggelassen wird. Wir haben weiterhin die sogenannten Entartungsabbildungen $\sigma_i : Y^{[n]} \to Y^{[n+1]}$, die gegeben sind durch $\sigma_i(y_0, \ldots, y_{n-1}) := (y_0, \ldots, y_i, y_i, \ldots, y_{n-1})$. Diese werden wir jedoch hier nicht notieren, da sie in den folgenden Überlegungen keine Rolle spielen.

Die Abbildungen erfüllen die folgenden *simplizialen Identitäten*:

$$\begin{array}{rcll} \partial_i \partial_j & = & \partial_{j-1}\partial_i & \text{für } i < j \\ \sigma_i \sigma_j & = & \sigma_{j+1}\sigma_i & \text{für } i \leq j \\ \partial_i \sigma_j & = & \begin{cases} \sigma_{j-1}\partial_i & \text{für } i < j \\ id & \text{für } i = j \text{ oder } i = j+1 \\ \sigma_j \partial_{i-1} & \text{für } i > j+1. \end{cases} & \end{array}$$

Allgemein heißt ein solches Diagramm von Mannigfaltigkeit Y_n mit Abbildungen ∂_i und δ_i, die die genanten Identitäten erfüllen, eine *simpliziale Mannigfaltigkeit*. Wir werden eine solche oft als $Y^\bullet$ abkürzen. Eine Einführung über simpliziale Objekte befindet sich zum Beispiel in [Wei95] oder [ML98]. Darin steht auch, wie wir diese Objekte mittels der simplizialen Kategorie Δ der geordneten endlichen Mengen als Funktoren $\Delta^{op} \to \mathcal{M}an$ auffassen können.

Mit der Abbildung $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ zusammen bekommen wir dann das Diagramm

$$\cdots \overset{\partial_0}{\underset{\partial_3}{\rightrightarrows\rightrightarrows}} Y^{[3]} \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\rightrightarrows\rightarrow}} Y^{[2]} \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} Y \xrightarrow{\pi} M\,.$$

mit $\pi \circ \partial_0 = \pi \circ \partial_1$. Ein solches heißt *augmentierte simpliziale Mannigfaltigkeit.*
Gegeben sei nun ein Bündel L über M. Mittels des Pullbackfunktors können wir dieses Bündel nun auf die simpliziale Mannigfaltigkeit $Y^\bullet$ zurückziehen und erhalten die folgenden *Abstiegsdaten*:

(i) Ein Bündel $\pi^* L =: P$ in $\mathcal{B}un(Y)$.

(ii) Einen Morphismus
$$\phi : \partial_1^* P \cong \partial_1^* f^* L \xrightarrow{\sim} \partial_0^* f^* L \cong \partial_0^* P$$
in $\mathcal{B}un(Y^{[2]})$ induziert von der Identität $\pi \circ \partial_0 = \pi \circ \partial_1$.

(iii) Ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd}
\partial_1^*\partial_1^* P \cong \partial_2^*\partial_1^* P \arrow[r, "\partial_2^*\phi"] \arrow[rr, bend right, "\partial_1^*\phi"'] & \partial_2^*\partial_0^* P \cong \partial_0^*\partial_1^* P \arrow[r, "\partial_0^*\phi"] & \partial_0^*\partial_0^* P \cong \partial_1^*\partial_0^* P
\end{tikzcd}$$
von Morphismen in $\mathcal{B}un(Y^{[3]})$.

Analog erhalten wir für einen Morphismus $f : L \to L'$ von Bündeln über M durch Pullback entlang von π:

(i) Einen Morphismus $\pi^* f =: g : P \to P'$ in $\mathcal{B}un(Y)$.

(ii) Ein kommutatives Diagramm
$$\begin{tikzcd}
\partial_1^* P \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\partial_1^* g"'] & \partial_0^* P \arrow[d, "\partial_0^* g"] \\
\partial_1^* P' \arrow[r, "\phi'"'] & \partial_0^* P'
\end{tikzcd}$$
von Morphismen in $\mathcal{B}un(Y^{[2]})$.

Wir wollen nun sehen, welche Daten wir haben für den Fall, dass die Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ von der Form $\bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M$ mit einer offenen Überdeckung (U_i) ist: Dann ist das Bündel P auf $\bigsqcup U_i$ gegeben durch *lokale* Bündel P_i auf den offenen Mengen U_i. Weiter ist $Y^{[2]} = \bigsqcup U_i \cap U_j$ und der Morphismus ϕ gegeben durch lokale Isomorphismen $\phi_{ij} : P_i \xrightarrow{\sim} P_j$ auf doppelten Schnitten $U_i \cap U_j$. Das kommutative Diagramm auf $Y^{[3]} = \bigsqcup U_i \cap U_j \cap U_k$ wird dann zur Kozykelbedingung $\phi_{ij} \circ \phi_{jk} = \phi_{ik}$. Wir sehen also, dass die Abstiegsdaten schlicht lokal gegebene Bündel sind, die geeignet übereinstimmen auf Schnitten. Daher nennen wir die Abstiegsdaten auch dann lokale Daten, wenn sie nicht von einer offenen Überdeckung kommen.

Wir können uns nun fragen, ob alle solche Abstiegsdaten auf der simplizialen Mannigfaltigkeit $Y^\bullet$ isomorph zum Pullback eines Bündels auf M sind. Mit anderen Worten, ob sich alle lokalen Daten zu globalen Objekten verkleben lassen.
Da es sich bei Bündeln auf M um eine Kategorie handelt, müssen wir aber zunächst einmal die Kategorie dieser Abstiegsdaten exakt definieren, wobei wir im wesentlichen die obigen Punkte wiederholen. Wir werden dies nicht nur für den Prägarbe $\mathcal{B}un$ tun, sondern allgemein für eine beliebige Prägarbe in Kategorien $\mathfrak{X}$.

Definition 2.4.1. Sei $\mathfrak{X}$ eine Prägarbe in Kategorien und $Y \twoheadrightarrow M$ eine Überdeckung:
i) Ein Objekt in der Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc(Y \twoheadrightarrow M)$ besteht aus den folgenden Daten auf der simplizialen Mannigfaltigkeit:
$$\begin{tikzcd}
Y^{[4]} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & Y^{[3]} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & Y^{[2]} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & Y
\end{tikzcd}$$

(O1) Einem Objekt P in $\mathfrak{X}(Y)$.

(O2) Einem Isomorphismus
$$\phi : \partial_1^* P \xrightarrow{\sim} \partial_0^* P$$
in $\mathfrak{X}(Y^{[2]})$.

(O3) Einem kommutatives Diagramm $\partial_2^*\phi \circ \partial_0^*\phi = \partial_1^*\phi$ von Morphismen in $\mathcal{B}un(Y^{[3]})$.

ii) Ein Morphismus zwischen Abstiegsobjekten (P, ϕ) und (P', ϕ') besteht aus den Daten:

(M1) Einem Morphismus $g : P \to P'$ in $\mathfrak{X}(Y)$.

(M2) Einem kommutativen Diagramm
$$\partial_0^* g \circ \phi = \phi' \circ \partial_1^* g$$
von Morphismen in $\mathfrak{X}(Y^{[2]})$.

Man beachte, dass wir für die Kohärenzdiagramme eine abkürzende Schreibweise gewählt haben, indem wir die Kohärenzisomorphismen weglassen.

Die oben beschriebene Zuordnung liefert nun zu einem Bündel ein Objekt in der Abstiegskategorie und für einen Morphismus von Bündeln einen Morphismus in der Abstiegskategorie. Dies ist ein Funktor
$$\kappa_Y : \mathcal{B}un(M) \to \mathcal{D}esc(\pi : Y \twoheadrightarrow M).$$
Dieser existiert offensichtlich nicht nur für die Prägarbe der Bündel, sondern ebenso wie die Abstiegskategorie für eine beliebige Prägarbe $\mathfrak{X}$.
Die oben gestellte Frage, ob alle Abstiegsdaten von Objekten auf M kommen, lässt sich nun präziser formulieren. Es ist nämlich die Frage, ob der Funktor κ_Y eine Äquivalenz von Kategorien ist.

Definition 2.4.2. (i) Eine Prägarbe $\mathfrak{X}$ erfüllt die Abstiegsbedingung für eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$, falls der Funktor $\kappa_Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}esc(Y \twoheadrightarrow M)$ ein Äquivalenz ist.

(ii) Eine Prägarbe in Kategorien heißt Stack, falls sie für jede Überdeckung Abstieg erfüllt.

(iii) Eine Prägarbe in Kategorien heißt Prästack, falls der Funktor κ_Y für jede Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ volltreu ist.

Anschaulich gesprochen kann man bei einem Stack Objekte und Morphismen geeignet verkleben. Falls die κ_Y nur volltreu sind, bedeutet dies offensichtlich, dass wir nur Morphismen verkleben können. Bei einem Prästack kann man also im Gegensatz zu Stacks lediglich Morphismen geeignet mieinander verkleben.

In Kapitel 2.1 hatten wir bereits beschrieben wie wir lokale Bündel auf Überdeckungen $\coprod U_i \twoheadrightarrow M$ zu globalen verkleben. In der Tat ist es ein klassisches Resultat, dass die Prägarbe der Bündel Abstieg bezüglich der offenen Überdeckungen erfüllt, d.h. einen Stack bezüglich der Grothendieck-Topologie der offenen Überdeckungen bildet.
Wir wollen uns nun überzeugen, dass die Eigenschaft einer Prägarbe in Kategorien ein Prästack oder ein Stack zu sein, invariant unter Äquivalenz von Grothendieck-Topologien ist. Insbesondere impliziert dies dann, dass Bündel auch Abstieg für beliebige surjektive Submersionen erfüllen, was nicht ganz so einfach direkt zu zeigen ist.

Satz 2.4.3. *Sei eine Topologie τ_2 feiner als τ_1. Dann ist jeder Stack (Prästack) bezüglich τ_1 auch ein Stack (Prästack) bezüglich τ_2.*

Wir werden diesen Satz nicht an dieser Stelle beweisen, sondern in Kapitel 4.5, Satz 4.5.1. Mit den Methoden aus Kapitel 4 ist dieser Beweis nämlich relativ einfach, und diese Methoden werden wir unabhängig von dem Satz entwickeln. Es wäre jedoch möglich einen Beweis auch an dieser Stelle zu führen. Dies wird in ähnlicher Weise zum Beispiel in [Vis04] getan.

Korollar 2.4.4. *Für zwei äquivalente Topologien τ_1 und τ_2 ist eine Prägarbe in Kategorien genau dann eine Stack (Prästack) bezüglich τ_1, wenn sie eine Stack (Prästack) bezüglich τ_2 ist.*

2.5 Abschließen unter Abstieg

Wir wollen nun beschreiben, wie man von trivialen Objekten, zum Beispiel trivialen Bündel, übergeht zu lokal trivialen Objekten wie beliebigen Bündeln. Mit anderen Worten: Von einem Prästack zu einem Stack. Um dies möglichst allgemein formulieren zu können, machen wir uns zunächst klar, dass wir die folgenden Inklusionen haben:

$$\text{Stacks} \hookrightarrow \text{Prästacks} \hookrightarrow \text{Prägarben in Kategorien}$$

Wir suchen zu diesen Vergissfunktoren wie üblich Linksadjungierte. An dieser Stelle wollen wir uns auf den ersten Funktor beschränken, also für einen Prästack einen assoziierten Stack zu finden. Dies ist für unsere Zwecke ausreichend, da alle auftretenden Prägarben in Kategorien bereits Prästacks sein werden. Wir wollen die Stackifizierung aber nicht über die universelle Eigenschaft eines linksadjungierten Funktors definieren, um technischen Probleme mit adjungierten 2-Funktoren zu vermeiden. Stattdessen behalten wir die lokale Trivialität von Bündeln im Kopf und machen folgende Definition:

Definition 2.5.1. Sei $\mathfrak{X}$ ein Prästack. Ein Stack $\hat{\mathfrak{X}}$ mit einer volltreuen Inklusion $\mathfrak{X} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{X}}$ heißt Stackifizierung von $\mathfrak{X}$ oder assoziierter Stack, falls für jedes Objekt $P \in \hat{\mathfrak{X}}(M)$ eine Überdeckung $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ und ein Isomorphismus $\pi^*P \xrightarrow{\sim} Q$ über Y zu einem Objekt $Q \in \mathfrak{X}(Y) \subset \hat{\mathfrak{X}}(Y)$ existiert.

Die letzte Bedingung bedeutet in Worten, dass die Objekte das Stacks $\hat{\mathfrak{X}}$ lokal in $\mathfrak{X}$ liegen. Nehmen wir die volle Einbettung $\mathcal{B}untriv \hookrightarrow \mathcal{B}un$ von trivialen Bündeln in Bündel. $\mathcal{B}un$ ist ein Stack, wie im letzten Kapitel bereits erwähnt. Die lokale Trivialität aus Abschnitt (2.1) ist dann genau die Aussage, dass $\mathcal{B}un$ die Stackifizierung von $\mathcal{B}untriv$ ist. Genaugenommen ist die lokale Trivialität, wie wir sie in (2.1) formuliert haben, die Aussage bezüglich der Grothendieck-Topologie der offenen Überdeckungen. Da wir aber an der Aussage für surjektive Submersionen interessiert sind, sollten wir uns vergewissern, dass die Definition 2.5.1 invariant unter Äquivalenz von Grothendieck-Topologien ist.

Seien also zwei äquivalente Grothendieck-Topologien τ_1 und τ_2 gegeben und $\mathfrak{X} \hookrightarrow \hat{\mathfrak{X}}$ eine Stackifizierung bezüglich τ_1. Wegen Korollar 2.4.4 wissen wir, dass $\hat{\mathfrak{X}}$ ein Stack bezüglich τ_2 ist. Außerdem finden wir zu jedem Objekt P aus $\hat{\mathfrak{X}}(M)$ eine τ_1-Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$, so dass P über Y isomorph zu einem Objekt aus $\mathfrak{X}$ ist. Wir können die Überdeckung aber durch eine Überdeckung $Y' \twoheadrightarrow M$ aus τ_2 verfeinern und P auf diese zurückziehen. Der Pullback des Isomorphismus über Y entlang der Verfeinerung $Y' \to Y$ liefert dann die Tatsache, dass P über Y' isomorph zu einem Objekt aus $\mathfrak{X}$ ist. Die umgekehrte Aussage folgt analog. Insgesamt haben wir damit bewiesen:

Satz 2.5.2. *$\mathcal{B}un$ ist die Stackifizierung von $\mathcal{B}untriv$ auf $\mathcal{M}an$ bezüglich der Topologie der surjektiven Submersionen.*

Genau genommen hätten wir bisher nicht von „der“ Stackifizierung sprechen dürfen, da die Eindeutigkeit bisher nicht gezeigt ist. Dies wollen wir nun nachholen, indem wir zeigen, dass die Zuordnung $\mathfrak{X} \mapsto \hat{\mathfrak{X}}$ die jedem Prästack seinen assoziierten Stack zuordnet (falls er existiert, was wir an dieser Stelle noch nicht wissen) die Eigenschaften eines Linksadjungierten zur Inklusion von Prästacks in Stacks hat.

Satz 2.5.3. *Für einen beliebigen Stack $\mathfrak{Y}$ ist der Funktor*

$$i^* : \mathrm{Hom}(\hat{\mathfrak{X}}, \mathfrak{Y}) \to \mathrm{Hom}(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y})$$

eine Äquivalenz von Kategorien.

Beweis. Wir wollen den Beweis hier nicht ausführen, sondern lediglich die Idee angeben, weil die Rechnungen etwas lang und wenig aufschlussreich sind. Für die nötigen technischen Hilfssätze siehe [Vis04].
Der erste Schritt im Beweis ist, zu zeigen dass aus der Tatsache, dass $\mathfrak{X}$ ein Prästack ist und die Inklusion $\mathfrak{X} \to \hat{\mathfrak{X}}$ volltreu ist, folgt dass auch der Funktor i^* volltreu ist. Als zweites bleibt dann zu zeigen, dass der Funktor essentiell surjektiv ist. Dazu müssen wir einen gegebenen Morphismus $\Phi : \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}$ zu einem Morphismus $\hat{\Phi} : \hat{\mathfrak{X}} \to \mathfrak{Y}$ fortsetzen.

Wir nehmen also ein Objekt $P \in \hat{\mathfrak{X}}(M)$. Dies ist lokal trivial, also existiert $Q \in \mathfrak{X}(Y)$ mit $P \cong \pi^* Q$. Wir können, da $\hat{\mathfrak{X}}$ ein Stack ist nun $P \in \mathfrak{X}(M)$ durch $\kappa_Y(Q) \in \mathcal{D}esc_{\hat{\mathfrak{X}}}(Y \twoheadrightarrow M)$ ersetzen. Da $P \cong \pi^* Q$ und die Einbettung $\mathfrak{X} \to \hat{\mathfrak{X}}$ volltreu ist liegt $\kappa_Y(Q)$ essentiell in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$.

Wenden wir auf dieses Objekt nun den Funktor Φ an, so erhalten wir ein Objekt $P' \in \mathcal{D}esc_{\mathfrak{Y}}(Y \twoheadrightarrow M) \cong \mathfrak{Y}(M)$. Daher setzen wir $\hat{\Phi}(P) := P'$. Nun muss man nachprüfen, dass diese Konstruktion die geforderten Eigenschaften hat. □

Korollar 2.5.4. *Die Stackifizierung ist bis auf kanonische Isomorphie eindeutig festgelegt. Dabei bedeutet kanonisch, dass die Isomorphie bis auf eindeutige 2-Isomorphie eindeutig ist.*

Beweis. Folgt mittels des üblichen Argumentes bei universellen Eigenschaften. □

Nun haben wir uns vergewissert, dass die Stackifizierung im geeigneten Sinn eindeutig ist. Im konkreten Fall von Hauptfaserbündeln haben wir die Stackifizierung auch direkt angegeben. Es bleibt allerdings zu zeigen, dass die Stackifizierung im allgemeinen Fall existiert. Um dies zu beweisen geben wir eine konkrete Konstruktion der Stackifizierung $\hat{\mathfrak{X}}$ für einen beliebigen Prästack $\mathfrak{X}$ an. Die Idee der Konstruktion ist, dass man zum Abschließen unter Abstieg einfach alle möglichen Abstiegsdaten zu dem Stack hinzufügt. Dies wird im Fall von Bündeln der wohlbekannten Beschreibung in lokalen Daten entsprechen.

Satz 2.5.5. *Für einen beliebigen Prästack $\mathfrak{X}$ existiert stets die Stackifizierung $\hat{\mathfrak{X}}$.*

Für den Beweis des Satzes definieren wir nun schrittweise die Kategorie $\hat{\mathfrak{X}}(M)$.

Objekte Ein Objekt besteht aus einer surjektiven Submersion $Y \twoheadrightarrow M$ und einem Objekt (P, ϕ) in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$.

Um Morphismen zwischen solchen Objekten mit möglicherweise verschiedenen Überdeckungen $\pi\colon Y \twoheadrightarrow M$ und $\pi'\colon Y' \twoheadrightarrow M$ zu definieren, ziehen wir die Abstiegsdaten zurück auf eine gemeinsame Verfeinerung dieser Überdeckungen und vergleichen sie dort. Wir nennen dazu eine Überdeckung $\zeta\colon Z \twoheadrightarrow M$ eine *gemeinsame Verfeinerung* von π und π' falls Überdeckungen $s\colon Z \twoheadrightarrow Y$ und $s'\colon Z \twoheadrightarrow Y'$ existieren, so dass

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "\pi"'] & Z \arrow[l, two heads, "s"'] \arrow[r, two heads, "s'"] \arrow[d, two heads, "\zeta"'] & Y' \arrow[dl, two heads, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

kommutiert. Ein Beispiel einer solchen gemeinsamen Verfeinerung ist das Faserprodukt $Z := Y \times_M Y' \twoheadrightarrow M$, mit dem Abbildungen $Z \twoheadrightarrow Y$ und $Z \twoheadrightarrow Y'$ gegeben durch die Projektionen. Dies sind Überdeckungen, weil es sich um Pullbacks von Überdeckungen handelt. In der Tat könnten wir uns hier auf diese kanonische Verfeinerung beschränken, da jede weitere gemeinsame Verfeinerung schwach äquivalent dazu ist, was später in Kapitel (4.4) gezeigt wird. Allerdings würden sich daraus technische Probleme beim Komponieren von Morphismen ergeben.

Der entscheidende Punkt an einer gemeinsamen Verfeinerungen $Z \twoheadrightarrow M$ ist, dass die Abbildungen s und s' in offensichtlicher Weise simpliziale Abbildungen

$$Y^\bullet \xleftarrow{s_\bullet} Z^\bullet \xrightarrow{s'_\bullet} Y'^\bullet$$

induzieren. Für Objekte $\mathcal{O} = (Y, P, \phi)$ und $\mathcal{O}' = (Y', P', \phi')$ erhalten wir nun neue Objekte mit surjektiver Submersion Z durch Zurückziehen der Abstiegsdaten entlang der simplizialen Abbildungen s und s'. Explizit $\mathcal{O}_Z := (Z, s_0^* P, s_1^* \phi)$ und $\mathcal{O}_Z{}' := (Z, s_0^* P', s_1^* \phi')$. Wir nennen $\mathcal{O}_Z$ und $\mathcal{O}_Z{}'$ die bezüglich $Z \twoheadrightarrow M$ *verfeinerten Objekte*. Genauso können wir, da der Pullback ein Funktor ist, natürlich auch Morphismen aus den Abstiegskategorien verfeinern. Damit können wir jetzt die Definition der Kategorie $\hat{\mathfrak{X}}$ weiterführen:

Morphismen Ein Morphismus zwischen Objekten $\mathcal{O} = (Y, P, \phi)$ und $\mathcal{O}' = (Y', P', \phi')$ besteht aus einer gemeinsamen Verfeinerung und einem Morphismus g der beiden verfeinerten Abstiegsobjekten $\mathcal{O}_Z$ und $\mathcal{O}'_Z$ in der Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Z \twoheadrightarrow M)$.

Wir müssen nun zwischen den Morphismen noch Relationen hinzufügen, um diese auf verschiedenen Überdeckungen vergleichen zu können:

Relationen Zwei Morphismen (Z, g) und (Z', g') werden identifiziert, wenn es eine weitere gemeinsame Verfeinerung $W \twoheadrightarrow M$ von Z und Z' gibt die kompatibel mit den anderen Projektionen ist, so dass die verfeinerten Morphismen auf W übereinstimmen.

Nachdem wir Objekte und Morphismen definiert haben, müssen wir um die Kategorie $\hat{\mathfrak{X}}$ vollständig zu angeben noch Identitäten und die Kompositionsabbildung angeben. Sei also ein Objekt (Y, P, ϕ) gegeben. Die Überdeckung, die zum Identitätsmorphismus auf (Y, P, ϕ) gehört, ist dann ebenfalls Y, welche per Definition eine gemeinsame Überdeckung von Y mit sich selbst ist. Auf dieser Überdeckung nehmen wir nun schlicht die Identität in der entsprechenden Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$.

Nun zur Komposition. Wir betrachten die Objekte $\mathcal{O}^1 = (Y_1, P_1, \phi_1), \mathcal{O}^2 = (Y_2, P_2, \phi_2)$, $\mathcal{O}^3 = (Y_3, P_3, \phi_3)$ und Morphismen $\mathcal{M} = (Z, g) : \mathcal{O}^1_Z \to \mathcal{O}^2_Z$ und $\mathcal{M}' = (Z', g') : \mathcal{O}^2_{Z'} \to \mathcal{O}^3_{Z'}$. Die Überdeckungen bilden nun folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
 & Z \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & & Z' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
Y_1 \arrow[drr, two heads] & & Y_2 \arrow[d, two heads] & & Y_3 \arrow[dll, two heads] \\
 & & M & &
\end{tikzcd} \tag{2}$$

Um die Abstiegsmorphismen nun komponieren zu können, müssen wir sie auf eine gemeinsame Verfeinerung Z'' von Z und Z' zurückziehen. Damit wir die Morphismen $\mathcal{M}_{Z''}$ und $\mathcal{M}'_{Z''}$ in der Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc(Z'' \twoheadrightarrow M)$ komponieren können muss aber das Target-Objekt $(\mathcal{O}^2_Z)_{Z''}$ von dem ersten Morphismus mit dem Source-Objekt $(\mathcal{O}^2_{Z'})_{Z''}$ vom zweiten übereinstimmen. Dies ist der Fall, wenn das Teildiagramm

$$\begin{tikzcd}
 & Z'' \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\
Z \arrow[dr] & & Z' \arrow[dl] \\
 & Y_2 &
\end{tikzcd}$$

kommutiert. Daher setzen wir nun $Z'' := Z \times_{Y_2} Z'$ und definieren die Komposition durch:

$$\mathcal{M}' \circ \mathcal{M} := (Z \times_{Y_2} Z', \pi'^* g' \circ \pi^* g).$$

Mit dieser Komposition und den Identitäten bildet $\hat{\mathfrak{X}}$ nun eine Kategorie.

Hier noch eine kurze Bemerkung zu der Forderung, dass die Abbildungen s und s' in der Definition einer gemeinsamen Verfeinerung Überdeckungen sein müssen. Dies scheint nicht ganz konsistent mit Definition 2.3.3 zu sein. In der Tat definieren viele Autoren den Begriff der gemeinsamen Verfeinerung anders, siehe zum Beispiel [Vis04]. Wir vermeiden dies an der Stelle, da sonst im Allgemeinen der bei der Komposition verwendete Pullback $Z \times_{Y_2} Z'$ in der Kategorie $\mathcal{M}an$ nicht zu existieren braucht. Da wir aber die Relationen von Morphismen eingeführt haben, ergeben alle möglichen Definitionen von gemeinsamer Verfeinerung die gleiche Kategorie.

Nun haben wir für jede Mannigfaltigkeit M die Kategorie $\hat{\mathfrak{X}}$ definiert. Als nächstes müssen wir um $\hat{\mathfrak{X}}$ zu einer Prägarbe in Kategorien zu machen, die Pullbackfunktoren definieren. Dazu sei ein Objekt (Y, P, ϕ) gegeben. Wir ziehen ein solches entlang einer Abbildung $f : N \to M$ zurück, indem wir zunächst die Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ entlang von f zurückziehen zu einer

Überdeckung $f^*Y \twoheadrightarrow N$. Wir erhalten dann eine Abbildung der simplizialen Mannigfaltigkeiten $f^*Y_\bullet \to Y_\bullet$, entlang derer wir die Objekte zurückziehen. Mit dieser Definition der Pullbackfunktoren bildet $\hat{\mathfrak{X}}$ nun eine Prägarbe in Kategorien.
Es bleibt nun zu zeigen, dass $\hat{\mathfrak{X}}$ wirklich die Stackifizierung von $\mathfrak{X}$ ist. Dafür verweisen wir auf Satz 4.5.1 in Kapitel 4.

2.6 Klassifikation

Wir wollen in diesem Abschnitt eine kohomologische Klassifikation von Bündeln geben. Dazu betrachten wir die Hut-Konstruktion der Stackifizierung aus dem letzten Kapitel genauer für den Prästack der Bündel und die Topologie der offenen Mengen.

Wir wissen aufgrund von Korollar 2.5.4, dass diese Kategorie $\widehat{\mathcal{B}un triv}$ äquivalent zur Kategorie der Bündel über M ist. Konkreter bekommt man zu einem Bündel $P \to M$ ein Objekt in $\widehat{\mathcal{B}un triv}$ wie folgt: Man wählt zunächst eine offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M, so dass die Einschränkung von P auf die U_i trivialisierbar ist. Dies liefert uns dann ein Objekt in $\mathcal{D}esc_{\mathcal{B}untriv}(\bigsqcup U_i \twoheadrightarrow M)$. Ein solches Objekt besteht aus:

- dem trivialen Bündel über den Mengen U_i.
- Isomorphismen von trivialen Bündeln auf $U_i \cap U_j$, das sind Funktionen $g_{ij} : U_i \cap U_j \to \mathrm{U}(1)$.
- Der Kozykelbedingung $g_{ij} \cdot g_{jk} = g_{ik}$ auf dreifachen Schnitten $U_i \cap U_j \cap U_k$.

Wir sehen, dass es sich hierbei um einen U(1)-Čech-Kozykel im Grad 1 bezüglich der offenen Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ handelt. Als Referenz für Čech-Kohomologie empfehlen wir [War83]. Ein solcher Čech-Kozykel ist also nichts anderes als ein Objekt in $\widehat{\mathcal{B}un triv}$.
Ein Morphismus zwischen zwei Kozykel (U_i, g_{ij}) und (V_i, h_{ij}) ist nun gegeben durch eine gemeinsame Verfeinerung $(W_k)_{k\in k}$ der offenen Mengen und einem Morphismus der beiden verfeinerten Kozykel. Wir nehmen der besseren Übersichtlichkeit halber an, dass die beiden Objekte schon in einer auf W_k zurückgezogenen Form gegeben sind, d.h. dass gilt $(U_i)_{i\in I} = (V_j)_{j\in J} = (W_k)_{k\in K}$. Ein Morphismus besteht dann aus:

- Morphismen von trivialen Bündeln über W_i, also U(1)-wertige Funktionen auf $m_k : W_k \to \mathrm{U}(1)$.
- Der Bedingung $m_k|_{W_{kl}} \cdot g_{ij} = h_{kl} \cdot m_l|_{W_{kl}}$ auf $W_k \cap W_j$.

Dies ist ein Čech-Korand zwischen den beiden Kozykeln. Da diese Zuordnung mit dem Tensorprodukt und der Gruppenstruktur auf Čech-Zykeln verträglich ist haben wir folgendes Resultat:

Satz 2.6.1. *Die beschriebene Zuordnung liefert einen Gruppenisomorphismus*

$$\pi_0(\mathcal{B}un(M)) \to \check{H}^1(M, \mathrm{U}(1))$$

von der Gruppe der Isomorphieklassen von U(1)*-Hauptfaserbündeln zur* U(1)*-Čech-Kohomologiegruppe.*

Nun wollen wir die kurze exakte Exponentialsequenz

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow \mathrm{U}(1)$$

von Lie-Gruppen betrachten. Diese ist exakt und liefert daher eine lange exakte Sequenz in Čech-Kohomologie:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^0(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^0(M,\mathbb{R}) \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^0(M,\mathrm{U}(1)) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \check{\mathrm{H}}^1(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^1(M,\mathbb{R}) \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^1(M,\mathrm{U}(1)) \arrow[dll, rounded corners] \\
& \check{\mathrm{H}}^2(M,\mathbb{Z}) \arrow[r] & \check{\mathrm{H}}^2(M,\mathbb{R}) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Weil die Garbe der $\mathbb{R}$-wertigen Funktionen azyklisch ist (siehe [War83, Bry93]) gilt außerdem $\check{\mathrm{H}}^n(M,\mathbb{R}) = 0$ für $n \geq 1$. Deswegen sind die Verbindungshomomorphismen

$$\delta_n : \check{\mathrm{H}}^n(M,\mathrm{U}(1)) \to \check{\mathrm{H}}^{n+1}(M,\mathbb{Z})$$

Isomorphismen für $n \geq 1$. Auf parakompakten Mannigfaltigkeiten, also zum Beispiel endlichdimensionalen Mannigfaltigkeiten, stimmen nun die Čech-Kohomologiegruppen $\check{\mathrm{H}}^{n+1}(M,\mathbb{Z})$ überein mit den singulären Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^{n+1}(M,\mathbb{Z})$ ([Bry93]), also haben wir schließlich für alle $n \geq 1$ einen Gruppenisomorphismus

$$\check{\mathrm{H}}^n(M,\mathrm{U}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+1}(M,\mathbb{Z}) \tag{3}$$

Insbesondere bekommen wir folgendes Resultat:

Korollar 2.6.2. *Für parakompaktes M haben wir einen Gruppenisomorphismus*

$$\begin{array}{rccc} c: & \pi_0(\mathcal{B}un(M)) & \xrightarrow{\sim} & H^2(M,\mathbb{Z}) \\ & [P] & \longmapsto & c(P) \end{array}$$

der Gruppen der Isomorphieklassen von $\mathrm{U}(1)$-Hauptfaserbündeln und der zweiten singulären Kohomologiegruppe. Die Klasse $c(P)$ bezeichnen wir als (erste) Chern-Klasse von P.

2.7 Zusammenhang und Holonomie

Wir wollen in diesem Abschnitt nun Zusammenhänge auf U(1)-Hauptfaserbündeln besprechen. Wir werden dies tun, um Holonomie definieren zu können, und außerdem um diese als Hilfsmittel zur Berechnung der Chern-Klasse von Bündeln bzw. genauer gesagt deren Bild in reeller Kohomologie zu verwenden.

Wir setzen voraus, dass der Leser mit dem Begriff des Zusammenhangs auf U(1)-Hauptfaserbündeln vertraut ist, als Referenz kann [Bry93] oder (fast) jedes Buch über Differentialgeometrie dienen. Die Kategorie der Bündel mit Zusammenhang über M bezeichnen wir mit $\mathcal{B}un^\nabla(M)$. Da der Pullback eines Bündels mit Zusammenhang ebenfalls einen Zusammenhang hat, bilden diese wieder einer Prägarbe in Kategorien. Außerdem können lokal definierte Bündel entlang von zusammenhangserhaltenden Morphismen zu globalen Bündeln verklebt werden, wie man sofort sieht, indem man die Konstruktion zum Verkleben von Bündeln aus

2.1 für Bündel mit Zusammenhängen durchführt.

Die Bündel mit Zusammenhang bilden also einen Stack. Um die bisher entwickelten Prinzipien anwenden zu können, machen wir uns klar, dass Zusammenhänge auf dem trivialen Bündel 1_M über M gegeben sind durch 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$. Das triviale Bündel mit dem Zusammenhang ω bezeichnen wir mit 1_ω. Ein Morphismus von trivialen Bündeln $1_{\omega_1} \to 1_{\omega_2}$ besteht nun aus einem Morphismus der unterliegenden Bündel, also einer glatten Funktion $f : M \to \mathrm{U}(1)$ die aber zusätzlich noch den Zusammenhang erhalten muss. Das bedeutet, es muss gelten

$$\omega_2 - \omega_1 = -\mathrm{i}\,\mathrm{dlog}\, f.$$

Die Kategorie der trivialen Bündel mit Zusammenhang bezeichnen wir mit $\mathcal{B}untriv^\nabla$. Analog zu Bündeln ohne Zusammenhang ist $\mathcal{B}un^\nabla$ die Stackifizierung des Prästacks $\mathcal{B}untriv^\nabla$.

Wir haben für ein triviales Bündel 1_ω über M die Krümmung $\mathrm{curv}(1_\omega) := d\omega$. Für zwei triviale Bündel 1_{ω_1} und 1_{ω_2} mit einem Isomorphismus $f : 1_{\omega_1} \to 1_{\omega_1}$ gilt:

$$\mathrm{curv}(1_{\omega_1}) = d\omega_1 = d(\omega_2 + \mathrm{idlog}\, f) = d\omega_2 = \mathrm{curv}(1_{\omega_1}).$$

Die Krümmung ist also invariant unter zusammenhangserhaltenden Morphismen. Da 2-Formen eine Garbe bilden, haben wir auch für nichttriviale Bündel eine wohldefinierte Krümmung.

$$\begin{array}{rrcl} \mathrm{curv}: & \mathcal{B}un^\nabla(M) & \to & \Omega^2(M) \\ & P & \mapsto & \mathrm{curv}(P) \end{array}$$

Die Form $\mathrm{curv}(P)$ ist geschlossen und definiert somit eine Klasse in der zweiten de-Rham-Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^2_{dR}(M,\mathbb{R}) = \Omega^2_{cl}(M)/\Omega^1(M)$. Es gilt für das Tensorprodukt $P \otimes P'$ von zwei Bündeln mit Zusammenhang $\mathrm{curv}(P \otimes P') = \mathrm{curv}(P) + \mathrm{curv}(P)$. Wir haben also einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{curv}: \quad \pi_0(\mathcal{B}un^\nabla(M)) \to \mathrm{H}^2_{dR}(M,\mathbb{R})$$

wobei $\pi_0(\mathcal{B}un^\nabla(M))$ wieder die Gruppe der Isomorphieklassen von Bündeln mit Zusammenhang bezeichnet. Auf parakompakten Mannigfaltigkeiten M besagt der Satz von de-Rham, dass die de-Rham Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^n_{dR}(M,\mathbb{R})$ übereinstimmen mit den singulären Kohomologiegruppen $\mathrm{H}^n(M,\mathbb{R})$. Wir erinnern uns nun, dass die in (2.6.2) eingeführte Chern-Klasse $c(P)$ des Bündels P in $\mathrm{H}^2(M,\mathbb{Z})$ liegt. Nun haben wir aber die natürliche, von der Inklusion $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ induzierte Abbildung

$$\iota : \mathrm{H}^2(M,\mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(M,\mathbb{R}) = \mathrm{H}^2(M,\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}.$$

Damit gilt nun folgender Satz, den wir hier nur zitieren wollen:

Satz 2.7.1 (Kostant, [Kos74]). *Für ein Bündel P mit Zusammenhang über M ist die Klasse der Krümmung gleich dem Bild der Chern-Klasse in reeller Kohomologie:*

$$\iota\big(c(P)\big) = \mathrm{curv}(P)$$

Um die Chern-Klasse eines Bündels zu bestimmen, kann man das Bündel also mit einem Zusammenhang versehen und die Krümmung berechnen. Durch diese ist die Chern-Klasse dann bis auf Torsion eindeutig bestimmt. Dies ist immer möglich, da jedes Bündel mit einem Zusammenhang versehen werden kann.

Doch nun wollen wir für Bündel mit Zusammenhang die Holonomie entlang von geschlossenen Kurven betrachten. Dazu definieren wir zunächst die Holonomie des trivialen Bündels 1_ω über dem Kreis S^1 als

$$\mathrm{Hol}_{1_\omega} := \exp\left(2\pi \mathrm{i} \int_{S^1} \omega\right) \in \mathrm{U}(1).$$

Falls 1_ω und $1_{\omega'}$ zwei triviale Bündel sind und f ein Morphismus in $\mathrm{Hom}(1_\omega, 1_{\omega'})$, haben wir die Gleichung $\mathrm{Hol}_{1_\omega} = \mathrm{Hol}_{1_{\omega'}}$ wegen

$$\int_{S^1} \omega' - \int_{S^1} \omega = \int_{S^1} \mathrm{i}\, \mathrm{dlog}\, f \in \mathbb{Z}.$$

Für ein Bündel L mit Zusammenhang über M und eine geschlossene Kurve in M, d.h. eine Abbildung

$$\Phi\colon S^1 \to M$$

ist das zurückgezogene Bündel Φ^*L über S^1 trivial , weil aus Dimensionsgründen $H^2(S^1, \mathbb{Z}) = 0$. Daher haben wir einen Isomorphismus

$$\mathcal{T}\colon \Phi^*L \xrightarrow{\sim} 1_\omega$$

für ein $\omega \in \Omega^1(S^1)$. Damit setzen wir dann

$$\mathrm{Hol}_L(\Phi) := \mathrm{Hol}_{1_\omega}.$$

Dies ist wohldefiniert, weil für eine andere Trivialisierung

$$\mathcal{T}'\colon \Phi^*L \to 1_{\omega'}$$

der Übergangsisomorphismus $\eta := \mathcal{T}' \circ \mathcal{T}^{-1}$ in $\mathrm{Hom}(1_\omega, 1_{\omega'})$ liegt. Wie wir oben gesehen haben, sind die Holonomien von isomorphen, trivialen Bündeln über S^1 aber gleich.

3 Der 2-Stack der Gerben

In Abschnitt 2.7 haben wir für U(1)-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang eine Definition von Holonomie um geschlossene Kurven $\Phi\colon S^1 \to M$ gegeben. Entscheidend bei dieser Art die Holonomie zu definieren war, dass der Stack von U(1)-Bündeln Abstieg erfüllt und dass die Objekte lokal durch 1-Formen gegeben sind. Diese 1-Formen konnten wir dann über den Kreis integrieren. Wir haben sehr präzise gemacht, was „lokal durch 1-Formen gegeben" bedeutet, nämlich dass die Objekte in der Stackifizierung des Prästacks $\mathcal{B}untriv^\nabla$ der trivialen Bündel mit Zusammenhang liegen.

Wir wollen nochmal an die Kategorie $\mathcal{B}untriv^\nabla(M)$ erinnern:

- Objekte sind parametrisiert durch 1-Formen $\omega \in \Omega^1(M)$. Das Objekt das zu einer solchen 1-Form gehört nennen wir 1_ω.

- Morphismen $1_\omega \xrightarrow{f} 1_{\omega'}$ sind gegeben durch Elemente $f \in C^\infty(M, \mathrm{U}(1))$, so dass $\mathrm{dlog}\, f = \mathrm{i}(\omega' - \omega)$

In diesem Kapitel wollen wir nun Objekte einführen, für die wir einen Begriff von Holonomie um geschlossene Flächen in M haben. Geschlossene Flächen in M seien dabei glatte Abbildungen

$$\Phi : \Sigma \to M$$

wobei Σ eine kompakte und orientierte 2-Mannigfaltigkeit sei.

Für eine gegebene Mannigfaltigkeit M wollen wir also lokal Objekte betrachten, die wir über solche Flächen integrieren können. Diese gesuchten Objekte sind 2-Formen. Weiter wollen wir natürlich einen geeigneten Begriff von Eichtransformationen bzw. Morphismen einführen der die Holonomie invariant lässt. Dies sind dann 1-Formen. Es zeigt sich allerdings, dass man zusätzlich zwischen zwei 1-Morphismen noch 2-Morphismen zulassen muss, die durch U(1)-wertige Funktionen gegeben sind. Wir kommen also zu folgender 2-Kategorie:

- Objekte sind parametrisiert durch 2-Formen $\omega \in \Omega^2(M)$. Das Objekt das zu einer solchen 2-Form gehört nennen wir $\mathcal{I}_\omega$.

- 1-Morphismen $\mathcal{I}_\omega \xrightarrow[\eta]{} \mathcal{I}_{\omega'}$ sind gegeben durch Elemente $\eta \in \Omega^1(M)$ so dass $\mathrm{d}\eta = \omega' - \omega$

- 2-Morphismen $\omega \overset{\eta}{\underset{\eta'}{\rightrightarrows}} \omega'$ sind $\phi \in C^\infty(M, U(1))$ so dass $-\mathrm{i}\,\mathrm{dlog}\,\phi = \eta' - \eta$

Diese 2-Kategorie nennen wir die Kategorie der *trivialen Bündelgerben mit Zusammenhang* und bezeichnen sie mit $\mathcal{G}rbtriv^\nabla(M)$.

Wir haben jetzt die Pullbackoperation $\mathcal{G}rbtriv^\nabla(N) \to \mathcal{G}rbtriv^\nabla(M)$ entlang von Abbildungen $f : M \to N$, die durch Zurückziehen von Formen und Funktionen gegeben ist. Diese Operation bildet einen 2-Funktor. Die Gesamtheit der 2-Kategorien $\mathcal{G}rbtriv^\nabla(M)$ zusammen mit den Pullbackfunktoren bildet dann eine *Prägarbe in Bikategorien*. Dies ist eine Struktur ähnlich zu den in Kapitel 2.2 besprochenen Prägarben in Kategorien. Wir werden Prägarben in Bikategorien in Abschnitt 3.1 formal definieren.

Zu den trivialen Bündelgerben wollen wir dann globale, geometrische Objekte zuordnen, die eine lokale Beschreibung durch die Objekte aus $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ haben. Die Idee ist einfach zur Stackifizierung überzugehen, wie wir dies auch beim Schritt von $\mathcal{B}untriv$ zu $\mathcal{B}un$ getan haben. Allerdings müssen wir den Begriff des Stacks und des Abstiegs dazu anpassen für Prägarben in Bikategorien. Dies werden wir in Abschnitt 3.2 tun. Anschließend können wir zu den gesuchten globalen Objekten, nämlich Bündelgerben übergehen. Die Theorie von Bündelgerben, einschließlich der Holonomie werden wir dann in den folgenden Abschnitten besprechen.

3.1 Prägarben in Bikategorien

Um die Definition einer Prägarbe in Bikategorien geben zu können, werden wir eine gewisse Vertrautheit mit dem Begriff der Bikategorie voraussetzen. Für die Definition von Bikategorien siehe [Lei98] oder [ML98]. Wir erinnern daran, dass für zwei Bikategorien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ eine Bikategorie von Funktoren $[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}i\mathcal{C}at}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ definiert ist. Mit Funktoren sollen hier immer schwache 2-Funktoren gemeint sein, das bedeutet, dass die Komposition nur bis auf Isomorphismen erhalten wird. Siehe für eine genaue Definition ebenfalls [Lei98]. In der Quelle werden diese Funktoren als Homomorphismen zwischen Bikategorien bezeichnet. Weiter haben wir zwischen zwei Funktoren schwache 2-Transformationen, das bedeutet wieder dass die Quadrate in der Definition von klassischen natürlichen Transformationen nur bis auf einen 2-Isomorphismus kommutativ sind. Schließlich gibt es zwischen natürlichen Transformationen noch 2-Morphismen, sogenannte Modifikationen.

Die Klasse der Bikategorien zusammen mit diesen Funktor-Bikategorien bilden dann eine dreidimensionale Struktur, eine sogenannte Trikategorie. Diese Trikategorie bezeichnen wir mit $\mathcal{B}i\mathcal{C}at$. Die Definition einer Trikategorie wurde in [GPS95] gegeben, ist aber sehr technisch und kompliziert. Für eine neuere Behandlung von Trikategorien siehe [Gur06]. Wir werden aber allgemeine Trikategorien nicht benötigen, da die einzige Trikategorie die hier auftritt, die Trikategorie der Bikategorien sein wird. Was wir allerdings für die Definition von Prägarben in Bikategorien benötigen sind schwache 3-Funktoren.

Genau wie wir $\mathcal{M}an$ bei der Definition einer Prägarbe in Kategorien in Abschnitt 2.2 als 2-Kategorie aufgefasst haben, fassen wir $\mathcal{M}an$ hier als Trikategorie auf. Diese hat als Objekte Mannigfaltigkeiten, als 1-Morphismen glatten Abbildungen und als 2- und 3-Morphismen nur Identitäten.

Definition 3.1.1. Eine Prägarbe in Bikategorien auf $\mathcal{M}an$ ist ein schwacher 3-Funktor $\mathfrak{X} : \mathcal{M}an^{op} \to \mathcal{B}i\mathcal{C}at$.

Bevor wir nun explizit ausschreiben, was dies im Detail bedeutet, sei darauf hingewiesen, dass wir nicht wirklich die volle Allgemeinheit dieser Definition benötigen werden. So werden die auftretenden Bikategorien bei uns meist (strikte) 2-Kategorien sein. Ohnehin ist wohlbekannt dass jede Bikategorie zu einer 2-Kategorie äquivalent ist. Wir wollen uns später aber nicht stets versichern müssen, dass wir wirklich 2-Kategorien haben. Ebenso verhält es sich mit der Tatsache, dass der Funktor schwach ist. Dies werden wir auch nicht in voller Allgemeinheit benötigen und daher sollte man sich nicht von dem nun folgenden Diagrammen abschrecken lassen.

Die Definition 3.1.1 bedeutet im Detail, dass eine Prägarbe in Bikategorien $\mathfrak{X}$ aus einer Bikategorie $\mathfrak{X}(M)$ für jede Mannigfaltigkeit M besteht, einem 2-Funktor

$$f^* : \mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$$

für jede glatten Abbildung $f : M \to N$ und natürlichen 2-Isomorphismen

$$g^* \circ f^* \Rightarrow (f \circ g)^* \qquad Id_{\mathfrak{X}(M)} \Rightarrow (id_M)^* \tag{4}$$

für verknüpfbare Abbildungen f, g. Zusätzlich haben wir Modifikationen, die für je drei verkettbare, glatte Abbildungen f, g und h die folgenden Diagramme füllen:

$$\begin{tikzcd}
f^* \circ Id_{\mathfrak{X}(M)} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & f^* \circ id_M^* \arrow[d, Rightarrow] \\
\arrow[ur, phantom, "\Nearrow"] & f^*
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
h^* \circ g^* \circ f^* \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & (g \circ h)^* \circ f^* \arrow[d, Rightarrow] \\
h^* \circ (f \circ g)^* \arrow[r, Rightarrow] & (f \circ g \circ h)^*
\end{tikzcd}
\quad
\begin{tikzcd}
id_N^* \circ f^* \arrow[d, Rightarrow] & Id_{\mathfrak{X}(N)} \circ f^* \arrow[l, Rightarrow] \arrow[dl, Rightarrow] \\
f^* & \arrow[ul, phantom, "\Nwarrow"]
\end{tikzcd}
\tag{5}$$

Für diese Modifikationen müssen dann für vier verkettbare Morphismen f, g, h, l aus $\mathcal{M}an$ die folgenden Gleichheiten

$$\begin{tikzcd}
l^*h^*g^*f^* \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & (hl)^*g^*f^* \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
l^*h^*(fg)^* \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (hl)^*(fg)^* \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \arrow[dr, Rightarrow] & (ghl)^*f^* \arrow[l, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \\
& l^*(fgh)^* \arrow[r, Rightarrow] & (fghl)^*
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
l^*h^*g^*f^* \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (hl)^*g^*f^* \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
l^*h^*(fg)^* \arrow[dr, Rightarrow] & l^*(gh)^*f^* \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, phantom, "\Swarrow"] & (ghl)^*f^* \arrow[d, Rightarrow] \\
& l^*(fgh)^* \arrow[r, Rightarrow] & (fghl)^*
\end{tikzcd}$$

und

$$\begin{tikzcd}
& g^*Id_{\mathfrak{X}(M)}h^* \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, phantom, shift left=4, "\Searrow"] \arrow[dr, phantom, shift right=4, "\Swarrow"] & \\
g^*h^* \arrow[dr, Rightarrow] & g^*id_M^*h^* \arrow[l, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & g^*h^* \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (hg)^* &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
& g^*Id_{\mathfrak{X}}(M)h^* \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dd, phantom, "\Downarrow"] & \\
g^*h^* \arrow[dr, Rightarrow] & & g^*h^* \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (hg)^* &
\end{tikzcd}
\tag{6}$$

in $\mathcal{B}i\mathcal{C}at$ gelten.

Bemerkung 3.1.2.

- *Wir können eine gegebene Prägarbe in Kategorien $\mathfrak{X}$ auch als Prägarbe in Bikategorien auffassen.*

  Dazu müssen wir die Kategorien $\mathfrak{X}(M)$ als Bikategorien mit trivialen 2-Morphismen auffassen. Die Pullbackfunktoren $\mathfrak{X}(N) \to \mathfrak{X}(M)$ die zu der Prägarbe in Kategorien gehören, können wir dann auch als 2-Funktoren der eingeführten Bikategorien auffassen. Für diese Pullbackfunktoren kommutieren dann aufgrund der Definition einer

Prägarbe in Kategorien die Diagramme in 5. *Wir haben also die Identifikationsmodifikation, die diese Diagramme füllen. Für diese Identifikationsmodifikation gelten dann trivialerweise die Gleichheiten* 6.

Auf diese Art sind Prägarben in Bikategorien eine Verallgemeinerung von Prägarben in Kategorien und alle Sätze die wir über Prägarben in Bikategorien beweisen auch für Prägarben in Kategorien gültig.

- *Dem eben Gesagten liegt die Inklusion $\mathcal{C}at \to \mathcal{B}i\mathcal{C}at$ zugrunde. Diese Inklusion ordnet einer Kategorie C die Bikategorie $\tilde{C}$ zu, die die gleichen Objekte und 1-Morphismen wie C enthält, aber noch zusätzlich für jeden 1-Morphismen die 2-Identität darauf. Diese Inklusion ist ein Funktor im 3-kategoriellen Kontext. Deswegen können wir das eben Gesagte auch so interpretieren, dass wir den Stack*

$$\mathcal{M}\mathrm{an}^{op} \to \mathcal{C}at$$

mit dieser Inklusion komponieren und so einen 3-Funktor

$$\mathcal{M}\mathrm{an}^{op} \to \mathcal{B}i\mathcal{C}at$$

bekommen.

- *Es wird bei den Beispielen, die wir betrachten, immer der Fall sein, dass die Modifikationen aus den Diagrammen* 5 *durch Identitäten gegeben sind. Dann sind die Gleichheiten der Diagramme 6 natürlich automatisch erfüllt. In diesem Fall bezeichnet man die Funktoren $\mathfrak{X} : \mathcal{M}\mathrm{an}^{op} \to \mathcal{B}i\mathcal{C}at$ als semistrikt. Diese sind nicht strikt, da die Transformationen aus* 4 *noch auftreten können.*

  Falls die Transformationen 4 *ebenfalls Identitäten sind, haben wir eine strikte Prägarbe in Bikategorien. Das Beispiel $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ der trivialen Gerben mit Zusammenhang bildet eine solche strikte Prägarbe in Bikategorien.*

Beispiel 3.1.3. *Das Beispiel $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ haben wir bereits angesprochen. Wir können auch triviale Bündelgerben ohne Zusammenhang betrachten. In diesem Fall haben wir für jede Mannigfaltigkeit M folgende Kategorie $\mathcal{G}rbtriv$:*

- O*bjekte: Es gibt genau ein Objekt das wir mit $\mathcal{I}$ bezeichnen*
- M*orphismen: Die Endomorphismen von $\mathcal{I}$ enthalten genau ein Objekt 1_M*
- 2-*Morphismen: Die 2-Endomorphismen von 1_M sind glatte Abbildungen $M \to \mathrm{U}(1)$.*

Die Pullbackfunktoren müssen lediglich auf 2-Morphismen definiert werden und sind dort durch das Zurückziehen von Funktionen gegeben.

Wir haben den Vergissfunktor, der einer trivialen Gerbe $\mathcal{I}_\omega$ mit Zusammenhang die Gerbe $\mathcal{I}$ ohne Zusammenhang zuordnet Dies wird später einen Funktor von Gerben mit Zusammenhang zu Gerben ohne Zusammenhang liefern.

Bevor wir dieses Kapitel über Prägarben in Bikategorien abschließen wollen wir noch einen technischen Punkt ansprechen. Aus formalen Gründen wollen wir stets von unseren Prägarben in Bikategorien $\mathfrak{X}$ verlangen, dass die Kategorie $\mathfrak{X}\big(\bigsqcup_{i\in I} M_i\big)$ von Objekten auf der disjunkten Vereinigung von Mannigfaltigkeiten M_i gegeben ist durch das Produkt $\prod_{i\in I}\mathfrak{X}(M_i)$. Dies ist für alle bisher besprochenen Beispiele der Fall, wovon man sich leicht überzeugen kann.

3.2 2-Abstieg

Nachdem wir nun die Definition von Prägarben in Bikategorien vorliegen haben, wollen wir auch Abstiegsbedingungen in diesem Kontext formulieren. Analog zum Kapitel (2.4), in dem wir für eine Prägarbe in Kategorien $\mathfrak{X}$ und eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ die Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ definiert haben, wollen wir jetzt für eine Prägarbe in Bikategorien und eine Überdeckung die Abstiegsbikategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ definieren.

Wir wollen diese so wählen, dass für den Fall einer Prägarbe in Kategorien aufgefasst als Prägarbe in Bikategorien die Abstiegsbikategorie im Bild der Inklusion $\mathcal{C}at \to \mathcal{B}i\mathcal{C}at$ liegt und gleich dem Bild der in 2.4 definierten Abstiegskategorie ist. Sei also $\mathfrak{X}$ eine Prägarbe in Bikategorien und $Y \twoheadrightarrow M$ eine Überdeckung. Wir definieren die Bikategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ nun schrittweise.
Im Folgenden werden wir die horizontale Komposition von 1- und 2-Morphismen in einer Bikategorien durch das Symbol $\otimes$ und die vertikale Komposition von 2-Morphismen durch das Symbol $\circ$ schreiben. Wir beginnen mit den Objekten:

Definition 3.2.1. Für eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ besteht ein Abstiegsobjekt, d.h. ein Objekt in der Kategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ aus den nun folgenden Daten auf der zu der Überdeckung assoziierten simplizialen Mannigfaltigkeit

$$Y^{[4]} \; \substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow} \; Y^{[3]} \; \substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow} \; Y^{[2]} \; \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \; Y$$

(O1) einem Objekt $\mathcal{G}$ von $\mathfrak{X}(Y)$;

(O2) einem 1-Isomorphismus
$$P\colon\; \partial_0^*\mathcal{G} \to \partial_1^*\mathcal{G}$$
in $\mathfrak{X}(Y^{[2]})$;

(O3) einem 2-Isomorphismus
$$\mu\colon\; \partial_2^*P \otimes \partial_0^*P \Rightarrow \partial_1^*P$$
in $\mathfrak{X}(Y^{[3]})$;

(O4) der Kohärenzbedingung
$$\partial_2^*\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \partial_0^*\mu) = \partial_1^*\mu \circ (\partial_3^*\mu \otimes \mathrm{id})$$
von 2-Morphismen in $\mathfrak{X}(Y^{[4]})$.

Wir kürzen ein solches Objekt auch ab durch das Tripel $(\mathcal{G}, P, \mu)$. Als nächsten Schritt müssen wir die 1-Morphismen und 2-Morphismen in der Kategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ einführen:

Definition 3.2.2. i) Ein 1-Morphismus zwischen Abstiegsobjekten $(\mathcal{G}, P, \mu)$ und $(\mathcal{G}', P', \mu')$ besteht aus den folgenden Daten auf der simplizialen Mannigfaltigkeit

$$Y^{[4]} \; \substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow} \; Y^{[3]} \; \substack{\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow\\[-2pt]\longrightarrow} \; Y^{[2]} \; \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \; Y$$

(1M1) Einem 1-Morphismus $A\colon \mathcal{G} \to \mathcal{G}'$ in $\mathfrak{X}(Y)$;

(1M2) Einem 2-Isomorphismus $\alpha\colon P' \otimes \partial_0^* A \Rightarrow \partial_1^* A \otimes P$ in $\mathfrak{X}(Y^{[2]})$;

(1M3) Einem kommutativen Diagramm

$$(\mathrm{id} \otimes \mu') \circ (\partial_2^* \alpha \otimes \mathrm{id}) \circ (\mathrm{id} \otimes \partial_0^* \alpha) = \partial_1^* \alpha \circ (\mu \otimes id)$$

von 2-Morphismen in $\mathfrak{X}(Y^{[3]})$.

ii) Ein 2-Morphismus zwischen zwei solchen 1-Morphismen (A, α) und (A', α') besteht aus

(2M1) Einem 2-Morphismus $\beta\colon A \Rightarrow A'$ in $\mathfrak{X}(Y)$;

(2M2) einem kommutativen Diagramm

$$\alpha' \circ (\mathrm{id} \otimes \partial_0^* \beta) = (\partial_1^* \beta \otimes \mathrm{id}) \circ \alpha$$

von 2-Morphismen in $\mathfrak{X}(Y^{[2]})$.

Damit haben wir die Objekte, 1-Morphismen und 2-Morphismen in der Bikategorie $\mathcal{D}esc(Y \twoheadrightarrow M)$ definiert. Die Kompositionen wird dann in der offensichtlichen Weise definiert.

Man beachte, dass die Diagramme und Gleichheiten in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ hier in einer eher kombinatorischen Weise behandelt werden, weil dies für unsere Zwecke ausreichend ist. Wer die höheren Diagramme (O4), (1M3) oder (2M2) graphisch ausgeschrieben sehen möchte sei auf das Papier [Dus89] verwiesen. Man beachte beim Lesen, dass dort eine andere Konventionen über die Richtungen der Kohärenzisomorphismen getroffen wurde.

Bemerkung 3.2.3. *In dem Fall, dass die Prägarbe in Bikategorien von einer Prägarbe in Kategorien kommt, stimmen die beiden Abstiegskategorien im zu Beginn des Kapitels genannten Sinn überein. Dies sieht man sofort, wenn man die beiden Definitionen 3.2.2 und 2.4.1 vergleicht.*

Zusammen mit der Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ haben wir wieder wie in Kapitel 2.4 den, durch das augmentierte simpliziale Objekte

$$\begin{tikzcd} Y^{[4]} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & Y^{[3]} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & Y^{[2]} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & Y \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

und Pullback induzierten, kanonischen Funktor

$$\kappa_Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M).$$

Mit Hilfe dieses Funktors können wir nun wieder definieren, wann wir eine Prägarbe in Bikategorien als Stack bzw. Prästack bezeichnen. Wir übernehmen dazu wörtlich die Definition (2.4.2) :

Definition 3.2.4. (i) Eine Prägarbe $\mathfrak{X}$ in Bikategorien erfüllt die Abstiegsbedingung für eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$, falls der Funktor $\kappa_Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ eine Äquivalenz von Bikategorien ist.

(ii) Eine Prägarbe in Bikategorien heißt Stack, falls sie für jede Überdeckung die Abstiegsbedingung erfüllt.

(iii) Eine Prägarbe in Kategorien heißt Prästack, falls der Funktor κ_Y für jede Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ volltreu ist. Volltreu soll hier bedeuten, dass der Funktor Äquivalenzen auf Hom-Kategorien induziert.

Diese Definition bedeutet also, dass bei einem Prästack lediglich die Morphismen (d.h. die 1- und 2-Morphismen) Abstieg erfüllen, bei einem Stack aber sowohl die Morphismen als auch die Objekte.

Wir wollen uns nun überlegen, dass die Prägarbe $\mathfrak{X} = \mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ der trivialen Gerben weder ein Stack noch ein Prästack ist. Dazu rekapitulieren wir, dass für zwei durch die Formen ω und ω' gegebene Objekte $\mathcal{I}_\omega, \mathcal{I}_{\omega'} \in \mathcal{G}rbtriv^{\nabla}(M)$ die Morphismenkategorie $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{X}(M)}(\mathcal{I}_\omega, \mathcal{I}_{\omega'})$ gegeben ist durch:

- Objekte sind 1-Formen η mit $d\eta = \omega' - \omega$
- Morphismen $\eta \to \eta'$ sind glatte Abbildungen $f : M \to \mathrm{U}(1)$ mit $\mathrm{dlog}\, f = \mathrm{i}(\eta' - \eta)$

Diese Kategorie können wir als volle Unterkategorie der Kategorie $\mathcal{B}untriv^{\nabla}$ auffassen, nämlich als die volle Unterkategorie der trivialen Bündel 1_η mit Krümmung $\mathrm{curv}(1_\eta) = d\eta = \omega' - \omega$:

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{I}_\omega, \mathcal{I}_{\omega'}) = \mathcal{B}untriv^{\nabla}{}_{\omega'-\omega}$$

Diese trivialen Bündel erfüllen offensichtlich nicht die Abstiegsbedingung. Daraus folgt dass $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ kein Prästack oder Stack ist.

Bemerkung 3.2.5. *Wir haben den Begriff Stack nun für Prägarben in Kategorien und Prägarben in Bikategorien definiert. Wenn es wichtig ist zu unterscheiden werden wir von 1-Stacks oder 2-Stacks sprechen. Falls wir nur von Stacks sprechen meinen wir ab jetzt immer 2-Stacks.*

3.3 Der 2-Stack der Bündelgerben

In diesem Abschnitt wollen wir $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ unter Abstieg abschließen. Dies soll analog zu der Hut-Konstruktion $\mathfrak{X} \mapsto \hat{\mathfrak{X}}$ aus Abschnitt 2.5 geschehen, also durch die Hinzunahme von Abstiegsobjekten. Die Hut-Konstruktion liefert allerdings nur für Prästacks das „richtige“ Ergebnis. Also müssen wir zunächst durch Abschließen der Morphismenmengen aus $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ einen Prästack machen. Diesen können wir dann durch Abschließen unter Abstieg zu einem Stack machen. Der Stack, den wir dadurch schließlich erhalten, wird dann der Stack $\mathcal{G}rb$ der *Bündelgerben* mit Zusammenhang sein.

Zunächst schließen wir also in der Prägarbe $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ der trivialen Bündelgerben die Morphismenmengen unter Abstieg ab, und erhalten für jedes M die Kategorie $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}_{P}(M)$:

- Objekte sind $\mathcal{I}_\omega$ mit $\omega \in \Omega^2(M)$;
- 1-Morphismen $\mathcal{I}_\omega \longrightarrow \mathcal{I}_{\omega'}$; sind U(1)-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang und Krümmung $\omega' - \omega$ über M.
- 2-Morphismen sind Morphismen von U(1)-Hauptfaserbündel mit Zusammenhang.

Die Horizontale Komposition ist dabei gegeben durch das Tensorprodukt von Bündeln.

Nun kommen wir zum nächsten Schritt, dem Abschließen des Prästacks $\mathcal{G}rbtriv_P^\nabla$ unter Abstieg.

Definition 3.3.1. Eine Bündelgerbe mit Zusammenhang über M besteht aus den folgenden Daten: Einer Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ und einem Objekt $(\omega, L, \mu) \in \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ für $\mathfrak{X} = \mathcal{G}rbtriv_P^\nabla(M)$. Explizit haben wir also folgende Daten, für die zu der Überdeckung assoziierte simpliziale Mannigfaltigkeit

$$\begin{tikzcd} Y^{[4]} \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & Y^{[3]} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & Y^{[2]} \arrow[r, shift left, "\partial_0"] \arrow[r, shift right, "\partial_1"'] & Y \end{tikzcd}$$

(GO1) Ein Objekt $\mathcal{I}_\omega$ von $\mathcal{G}rbtriv^\nabla(Y)$: Eine 2-Form $\omega \in \Omega^2(Y)$;

(GO2) Einen 1-Morphismus
$$L\colon\ \partial_0^*\mathcal{I}_\omega \to \partial_1^*\mathcal{I}_\omega$$
in $\mathcal{G}rbtriv_P^\nabla(Y^{[2]})$: Ein Bündel L mit Zusammenhang über $Y^{[2]}$;

(GO3) Einen 2-Isomorphismus
$$\mu\colon\ \partial_2^*L \otimes \partial_0^*L \Rightarrow \partial_1^*L$$
in $\mathcal{G}rbtriv_P^\nabla(Y^{[3]})$: Ein zusammenhangserhaltender Morphismus von Bündeln über $Y^{[3]}$;

(GO4) Die Gleichheit
$$\partial_2^*\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \partial_0^*\mu) = \partial_1^*\mu \circ (\partial_3^*\mu \otimes \mathrm{id})$$
von 2-Morphismen in $\mathcal{G}rbtriv_P^\nabla\big(Y^{[4]}\big)$.

Morphismen zwischen Bündelgerben $\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu)$ und $\mathcal{G}' = (Y', \omega', L', \mu')$ sollen nun auf einer gemeinsamen Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ der Überdeckungen Y und Y' definiert werden. Wir haben also folgendes Diagramm:

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[dr, "\pi"'] & Z \arrow[l, two heads, "s"'] \arrow[r, two heads, "s'"] \arrow[d, "\zeta"'] & Y' \arrow[dl, "\pi'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Diese Abbildungen induzieren nun das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y^\bullet & Z^\bullet \arrow[l, "s"'] \arrow[r, "s'"] & Y'^\bullet \end{tikzcd}$$

der zugeordneten simplizialen Abbildungen. Entlang der simplizialen Abbildungen ziehen wir nun die Abstiegsdaten $(\omega, L, \mu) \in \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ und $(\omega', L', \mu') \in \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ zurück und erhalten die *verfeinerten Gerben* $\mathcal{G}_Z$ und $\mathcal{G}'_Z$. Explizit haben diese die Form

$$\mathcal{G}_Z := (Z, s_0^*\omega, s_1^*L, s_2^*\mu)$$

und

$$\mathcal{G}'_Z = (Z, s_0'^*\omega', s_1'^*L', s_2'^*\mu').$$

Damit können wir nun Morphismen und 2-Morphismen definieren:

Definition 3.3.2. i) Ein *1-Morphismus* zwischen Bündelgerben

$$\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{G}' = (Y', \omega', L', \mu')$$

besteht aus einer gemeinsamen Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ der Überdeckungen $Y \twoheadrightarrow M$ und $Y' \twoheadrightarrow M$ und einem Morphismus (A, α) der verfeinerten Gerben $\mathcal{G}_Z$ und $\mathcal{G}'_Z$ in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Z \twoheadrightarrow M)$
ii) Ein *2-Morphismus* zwischen 1-Morphismen

$$\mathfrak{m} = (Z, A, \alpha) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{m}' = (Z', A', \alpha')$$

besteht aus einer gemeinsamen Verfeinerung $W \twoheadrightarrow M$ von den Überdeckungen $Z \twoheadrightarrow M$ und $Z' \twoheadrightarrow M$ (die die Projektionen nach Y und Y' respektiert) und einem 2-Morphismus β der verfeinerten Morphismen $\mathfrak{m}_W$ und $\mathfrak{m}'_W$ in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(W \twoheadrightarrow M)$.
iii) Zusätzlich identifizieren wir zwei solche 2-Morphismen (W, β) und (W', β'), wenn eine weitere gemeinsame Überdeckung $V \twoheadrightarrow M$ von $W \twoheadrightarrow M$ und $W' \twoheadrightarrow M$ existiert, die kompatibel mit den anderen Projektionen ist, so dass die verfeinerten 2-Morphismen auf V übereinstimmen.

Wir müssen nun noch die Kompositionen von Morphismen und 2-Morphismen definieren. Dies soll komplett analog zu 2.5 geschehen. Die Idee ist also stets, die Morphismen, die auf verschiedenen Überdeckungen $Z \twoheadrightarrow M$ und $Z' \twoheadrightarrow M$ definiert sind, auf die kanonische gemeinsame Verfeinerung $Z \times_Y Z'$ zurückzuziehen und dort zu komponieren. 2-Morphismen komponiert man analog, wobei dabei beachtet werden muss, dass die kanonische gemeinsame Verfeinerung von 2-Morphismen mit allen Verfeinerungen kommutieren soll, und daher als entsprechender Pullback gewählt werden muss.

Bemerkung 3.3.3. *Mit dieser Wahl von Morphismen ist für jede Gerbe $\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu)$ und jede Verfeinerung $s : Z \twoheadrightarrow Y$ der Überdeckung, sodass s selbst eine Überdeckung ist, die verfeinerte Gerbe $\mathcal{G}_Z$ isomorph zu $\mathcal{G}$. Um das zu sehen, wählen wir als gemeinsame Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ mit den Abbildungen* $\mathrm{id} : Z \twoheadrightarrow Z$ *und $Z \twoheadrightarrow Y$ und haben dann die Identität zwischen $(\mathcal{G}_Z)_Z = \mathcal{G}_Z$ und $\mathcal{G}_Z$ in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Z \twoheadrightarrow M)$.*

Wir wollen zum Schluss noch Gerben ohne Zusammenhang definieren. Dies sind einfach Gerben $\mathcal{G}$ ohne die 2-Form und die Zusammenhänge auf den Bündeln. Doch wir wollen etwas formaler und analog zur Definition von Gerben mit Zusammenhang vorgehen. Dazu betrachten wir also die Prägarbe $\mathcal{G}rbtriv$ aus Beispiel 3.1.3, die auf M gegeben ist durch

- *O*bjekte: Es gibt genau ein Objekt das wir mit $\mathcal{I}$ bezeichnen.
- *M*orphismen: Die Endomorphismen von $\mathcal{I}$ enthalten genau ein Objekt 1_M.
- *2*-Morphismen: Die 2-Endomorphismen von 1 sind glatte Abbildungen $M \to \mathrm{U}(1)$.

Zunächst schließen wir die Morphismen unter Abstieg ab und erhalten den Prästack $\mathcal{G}rbtriv_P$, der auf M gegeben ist durch:

- *O*bjekte: Es gibt genau ein Objekt das wir mit $\mathcal{I}$ bezeichnen.
- *M*orphismen: Die Endomorphismen von $\mathcal{I}$ sind $\mathrm{U}(1)$-Bündel auf M.
- *2*-Morphismen: Die 2-Morphismen sind Morphismen von Bündeln.

Mit diesem Prästack können wir nun wörtlich die gleiche Definition wie 3.2.1 und 3.3.2 geben. Man mache sich dabei klar, wie Objekte in den Abstiegskategorien genau aussehen:

Definition 3.3.4. i) Eine Bündelgerbe ohne Zusammenhang über M besteht aus den folgenden Daten: Einer Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ und einem Objekt $(L, \mu) \in \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ für $\mathfrak{X} = \mathcal{G}rbtriv_P(M)$.
ii) Ein *1-Morphismus* zwischen Bündelgerben ohne Zusammenhang

$$\mathcal{G} = (Y, L, \mu) \qquad \text{und} \qquad \mathcal{G}' = (Y', L', \mu')$$

besteht aus einer gemeinsamen Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ der Überdeckungen $Y \twoheadrightarrow M$ und $Y' \twoheadrightarrow M$ und einem Morphismus (A, α) der verfeinerten Gerben $\mathcal{G}_Z$ und $\mathcal{G}'_Z$ in $\mathcal{D}esc_X(Z \twoheadrightarrow M)$
iii) Ein *2-Morphismus* zwischen 1-Morphismen

$$\mathfrak{m} = (Z, A, \alpha) \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{m}' = (Z', A', \alpha')$$

besteht aus einer gemeinsamen Verfeinerung $W \twoheadrightarrow M$ von den Überdeckungen $Z \twoheadrightarrow M$ und $Z' \twoheadrightarrow M$ (die die Projektionen nach Y und Y' respektiert) und einem 2-Morphismus β der verfeinerten Morphismen $\mathfrak{m}_W$ und $\mathfrak{m}'_W$ in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(W \twoheadrightarrow M)$.
iv) Zusätzlich identifizieren wir zwei solche 2-Morphismen (W, β) und (W', β') wenn eine weitere gemeinsame Überdeckung $V \twoheadrightarrow M$ von $W \twoheadrightarrow M$ und $W' \twoheadrightarrow M$ existiert, die kompatibel mit den anderen Projektionen ist, so dass die verfeinerten 2-Morphismen auf V übereinstimmen.

Aus dem bereits in Beispiel 3.1.3 angesprochenen Funktor, der einer trivialen Gerbe mit Zusammenhang eine triviale Gerbe ohne Zusammenhang zuordnet, bekommen wir nun offensichtlich einen Morphismus

$$\mathcal{G}rb^{\nabla} \to \mathcal{G}rb,$$

der ebenfalls einfach die Zusammenhangsdaten vergisst. Es wurde in [Mur96] gezeigt, dass für jede Mannigfaltigkeit M dieser Vergissfunktor $\mathcal{G}rb^{\nabla}(M) \to \mathcal{G}rb(M)$ surjektiv ist, d.h. dass jede Gerbe mit einem Zusammenhang versehen werden kann.

3.4 Tensorprodukt von Gerben

Auf Gerben kann man genau wie auf U(1)-Bündeln ein Tensorprodukt definieren. Dieses wollen wir in diesem Abschnitt kurz angeben. Dazu definieren wir das Tensorprodukt zunächst für eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ und zwei Objekte (ω, L, μ) und (ω', L', μ') in der Kategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ für $\mathfrak{X} = \mathcal{G}rbtriv_P^{\nabla}$

Definition 3.4.1. i) Für zwei über dem gleichen $Y \twoheadrightarrow M$ definierte Bündelgerben $\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu)$ und $\mathcal{G}' = (Y, \omega', L', \mu')$ ist das Tensorprodukt definiert durch:

$$\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}' := (\omega + \omega', L \otimes L', \mu \otimes \mu')$$

wobei $L \otimes L'$ und $\mu \otimes \mu'$ durch das Tensorprodukt auf U(1)-Bündeln gegeben sind. Dieses Tensorprodukt auf Bündeln stimmt mit der horizontalen Komposition in der Kategorie $\mathcal{G}rbtriv_P^{\nabla}(M)$ überein und ist symmetrisch, daher liegt $(\omega + \omega', L \otimes L', \mu \otimes \mu')$ wieder in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$.
ii) Zwei beliebige Bündelgerben $\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu)$ und $\mathcal{G}' = (Y', \omega', L', \mu')$ verfeinern wir zunächst bezüglich einer gemeinsamen Verfeinerung Z und bilden anschießend das Tensorprodukt der verfeinerten Gerben $\mathcal{G}_Z \otimes \mathcal{G}'_Z$.

Bemerkung 3.4.2. *i) Analog definieren wir auch das Tensorprodukt von Gerben ohne Zusammenhang.*
ii) Die Definition des Tensorproduktes kommt im Endeffekt von der Existenz eines Tensorproduktes auf dem Prästack $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$. Dieses liefert ein Tensorprodukt auf $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}_{P}$ und anschließend eines auf $\mathcal{G}rb^{\nabla}$. Das Tensorprodukt auf $\mathcal{G}rbtriv^{\nabla}$ ist gegeben durch die Multiplikation von $\mathrm{U}(1)$*-wertigen Funktionen. Dass dies ein Tensorprodukt liefert, liegt entscheidend daran, dass* $\mathrm{U}(1)$ *abelsch ist. iii) Die Kategorie der Gerben mit diesem Tensorprodukt bildet eine monoidale Bikategorie*

Wir haben schließlich noch zu jeder Gerbe eine duale Gerbe:

Definition 3.4.3. Für eine Bündelgerbe $\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu)$ ist die duale Gerbe gegeben durch die Daten $\mathcal{G}^* := (Y, -\omega, L^*, (\mu^*)^{-1})$

Wir sehen dann direkt an der Definition, dass gilt $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}^* \cong \mathcal{I}_0$. Dieses Tensorprodukt liefert uns also auf der Menge $\pi_0(\mathcal{G}rb^{\nabla})$ der Isomorphieklassen eine Gruppenstruktur.

3.5 Klassifikation von Gerben

In diesem Kapitel wollen wir zu einer Klassifikation von Gerben ohne Zusammenhang kommen. Diese werden wir hier einfach Gerben nennen und falls ein Zusammenhang existiert explizit darauf hinweisen. Wir werden ein analoges Klassifikationsresultat zu Kapitel 2.6 für Bündel erhalten.

Wie in Kapitel 2.3 bemerkt, ist die Topologie der offenen Mengen auf $\mathcal{M}an$ feiner als die Topologie der surjektiven Submersionen. Das bedeute aber, dass jeder Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ verfeinert werden kann durch eine Überdeckung der Form $\bigsqcup V_j \twoheadrightarrow M$ mit einer offenen Überdeckung $(V_j)_{j \in J}$ der Mannigfaltigkeit M.

Wir wissen also nach der letzten Bemerkung 3.3.3, dass jede Gerbe $\mathcal{G} = (Y, \omega, L, \mu)$ isomorph ist zu einer Gerbe $\mathcal{G}_Z$, die definiert ist auf einer offenen Überdeckung $Z := \bigsqcup V_i$. Zusätzlich ist bekannt, dass auf parakompakten Mannigfaltigkeiten jede Überdeckung $(V_i)_{i \in I}$ durch ein *gute Überdeckung* $(U_i)_{i \in I}$ verfeinert werden kann, bei der die Mengen U_i und die Durchschnitte $U_{ij} := U_i \cap U_j$ zusammenziehbar sind. Somit ist die Gerbe $\mathcal{G}$ isomorph zu einer Gerbe $\mathcal{G}'_Z$ die definiert ist auf der guten Überdeckung $Z' := \bigsqcup U_i$.

Bemerkung 3.5.1. *In strengen Sinn spricht man von einer guten Überdeckung U_i, wenn alle n-fachen Schnitte von U_i zusammenziehbar sind. Wir werden dies hier aber nur für 1- und 2-fache Schnitte benötigen.*

Nun wollen wir uns überlegen, wie eine Gerbe auf einer guten offenen Überdeckung (U_i) aussieht. Diese besteht also aus

- den trivialen Gerben über den Mengen U_i;
- einem Automorphismus der trivialen Gerben auf $\bigsqcup U_{ij}$, also einem Bündel. Diese aber trivialisierbar, da die U_{ij} zusammenziehbar sind.
- einem 2-Isomorphismus von trivialen Bündeln über U_{ijk}, also einer Familie von Funktionen $g_{ijk} : U_{ijk} \to \mathrm{U}(1)$

- der Gleichheit $g_{ijl} \cdot g_{jkl} = g_{ikl} \cdot g_{ijk}$ auf dreifachen Durchschnitten U_{ijkl}.

Wir sehen nun, dass es sich bei der Familie $g = (g_{ijk})$ um einen Čech-Kozykel im Grad 2 für die Garbe der U(1)-wertigen Funktionen handelt. Es seien nun zwei Gerben mit lokalen Daten (g_{ijk}) und (h_{ijk}) auf dieser guten offenen Überdeckung gegeben. Wir überlegen uns nun wie ein Morphismus zwischen diesen beiden aussieht. Um die Darstellung nicht durch Verfeinerungen zu komplizieren überlegen wir uns dies zunächst nur für Morphismen, die ebenfalls auf der Überdeckung $Z' = \bigsqcup U_i$ definiert sind. Wir haben also (vergleiche Def. 3.2.2):

- einer Familie von Morphismen von trivialen Gerben auf U_i, d.h. Bündel. Da die U_i zusammenziehbar sind können diese als trivial angenommen werden.
- einen Morphismus von trivialen Bündeln über $\bigsqcup U_{ij}$, also eine Familie U(1)-wertiger Funktionen (σ_{ij}).
- die Gleichheit $h_{ijk} \cdot \sigma_{ij} \cdot \sigma_{jk} = \sigma_{ik} \cdot g_{ijk}$ auf Schnitten U_{ijk}.

Mit dem Čech-Korandoperator δ und den Kozykeln $g = (g_{ijk})$ und $h = (h_{ijk})$ können wir die Gleichheit dann schreiben als $h \cdot \delta(\sigma) = g$. Also sind die Kozykel g und h Čech kohomolog. Weiter sehen wir direkt anhand unserer Definition des Tensorproduktes, dass für zwei Gerben $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}'$ mit den zugehörigen Kozykeln (g_{ijk}) und (h_{ijk}) das Tensorprodukt $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}'$ den Kozykel $(g_{ijk}) \cdot (h_{ijk})$ hat.

Diese Überlegung führt, wenn man sie für Verfeinerungen noch sorgfältig mit der Definition von Čech-Kohomologie abgleicht, auf folgendes Resultat:

Satz 3.5.2. *Die Zuordnung $\mathcal{G} \mapsto (g_{ijk})$ liefert einen Gruppenisomorphismus*

$$\pi_0(\mathcal{G}rb(M)) \to \check{H}^2(M, \mathrm{U}(1))$$

der Gruppe der Isomorphieklassen von Gerben und der 2-ten Čech-Kohomologiegruppe.

Zusammen mit dem Isomorphismus (3)

$$\check{\mathrm{H}}^n(M, \mathrm{U}(1)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^{n+1}(M, \mathbb{Z})$$

aus Kapitel 2.6 haben wir damit nun:

Satz 3.5.3 ([MS01])**.** *Für eine parakompakte Mannigfaltigkeit M existiert ein Gruppenisomorphismus*

$$\begin{array}{rrcl} DD: & \pi_0(\mathcal{G}rb(M)) & \to & H^3(M, \mathbb{Z}) \\ & [\mathcal{G}] & \mapsto & DD(\mathcal{G}) \end{array}$$

Die Klasse $DD(\mathcal{G})$ heißt Dixmier-Douady-Klasse der Gerbe $\mathcal{G}$.

Bemerkung 3.5.4. *(i) Als Dixmier-Douady-Klasse einer Gerbe mit Zusammenhang bezeichnet man die Klasse der unterliegenden Gerbe ohne Zusammenhang.*

(ii) *Die Gerben deren Dixmier-Douady-Klasse verschwindet sind isomorph zur trivialen Gerbe $\mathcal{I}$. Also sind die Gerben mit Zusammenhang deren Klasse verschwindet isomorph zu Gerben $\mathcal{I}_\omega$ mit einer 2-Form ω.*

(iii) *Mit dem Pullbackfunktor $f*$ von Gerben entlang einer glatten Abbildung $f : M \to N$ und dem Pullback f^* in Kohomologie gilt für Gerbe $\mathcal{G}$ über M:*

$$DD(f^*\mathcal{G}) = f^*DD(\mathcal{G}).$$

Schließlich erinnern wir kurz daran, dass für ein U(1)-Bündel P mit Zusammenhang das Bild der Chern-Klasse $c(P) \in \mathrm{H}^2(M, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^2(M, \mathbb{R})$ in reeller Kohomologie mit der Klasse der Krümmung übereinstimmt (siehe 2.7.1). Ein analoges Resultat gilt auch für Bündelgerben. Doch dazu müssen wir zunächst die Krümmung für beliebige Gerben definieren. Zunächst haben wir für einer trivialen Gerbe $\mathcal{I}_\omega \in \mathcal{G}rbtriv_P^\nabla$ mit Zusammenhang die Krümmung:

$$\mathrm{curv}(\mathcal{I}_\omega) := d\omega \in \Omega^3(M)$$

Diese Zuordnung ist invariant unter Isomorphismen, denn für eine isomorphe, triviale Gerbe $\mathcal{I}_{\omega'}$ unterscheiden sich ω und ω' um die Krümmung eines Bündels P. Also gilt:

$$\mathrm{curv}(\mathcal{I}_\omega) = d\omega = d(\omega' + \mathrm{curv}(P)) = d\omega' = \mathrm{curv}(\mathcal{I}'_\omega).$$

Wegen dieser Invarianz, und weil Ω^3 eine Garbe auf M ist, können wir die Zuordnung zu

$$\mathrm{curv}(\mathcal{G}) \equiv \mathrm{curv}(Y, \omega, L, \mu) := d\omega \in \mathcal{D}esc_{\Omega^3}(Y \twoheadrightarrow M) \cong \Omega^3(M)$$

fortsetzen. Aufgrund der Definition des Tensorproduktes von Gerben ist klar, dass gilt

$$\mathrm{curv}(\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}') = \mathrm{curv}(\mathcal{G}) + \mathrm{curv}(\mathcal{G}')$$

Weiter ist die Krümmung unter Isomorphie von Gerben invariant und als 3-Form geschlossen. Damit liefert die Krümmung einen Gruppenhomomorphismus

$$\mathrm{curv} : \pi_0\left(\mathcal{G}rb^\nabla\right) \to \mathrm{H}^3_{dR}(M, \mathbb{R})$$

Mit diesem gilt dann für parakompakte Mannigfaltigkeiten M und die kanonischen Abbildung $\iota : \mathrm{H}^3(M, \mathbb{Z}) \to \mathrm{H}^3_{dR}(M, \mathbb{R})$ das zu Satz 2.7.1 analoge Theorem:

Satz 3.5.5 ([Bry93])**.** *Für eine Gerbe $\mathcal{G}$ mit Zusammenhang über M ist die Klasse der Krümmung gleich dem Bild der Dixmier-Douady-Klasse in reeller Kohomologie:*

$$\iota\big(DD(\mathcal{G})\big) = \mathrm{curv}(\mathcal{G})$$

Da wie bereits erwähnt jede Gerbe mit einem Zusammenhang versehen werden kann, erlaubt dies die Dixmier-Douady-Klasse bis auf Torsion zu berechnen. Außerdem folgt daraus, dass die Krümmung eine ganzzahlige Kohomologieklasse besitzt.

3.6 Flächenholonomie

Nun können wir in sehr einfacher Weise für Gerben mit Zusammenhang eine Holonomie um geschlossene Flächen in M definieren. Dies war zu Beginn des Kapitels die Motivation Gerben einzuführen.

Die Holonomie der trivialen Bündelgerbe $\mathcal{I}_\omega$ über einer geschlossenen, orientierten Fläche Σ ist definiert als

$$\mathrm{Hol}_{\mathcal{I}_\omega} := \exp\Big(2\pi \mathrm{i} \int_\Sigma \omega\Big) \in \mathrm{U}(1)\,.$$

Wenn $\mathcal{I}_\omega$ und $\mathcal{I}_{\omega'}$ nun isomorph über Σ sind, so existiert ein 1-Isomorphismus $\mathcal{I}_\omega \to I_{\omega'}$, d.h. ein Bündel L mit Zusammenhang $\omega' - \omega$. Dann haben wir die Gleichheit $\mathrm{Hol}_{\mathcal{I}_\omega} = \mathrm{Hol}_{\mathcal{I}_{\omega'}}$ weil

$$\int_\Sigma \omega' - \int_\Sigma \omega = \int_\Sigma \mathrm{curv}(L) \in \mathbb{Z}\,.$$

Wir betrachten nun eine beliebige Bündelgerbe $\mathcal{G}$ mit Zusammenhang über einer glatten Mannigfaltigkeit M und eine glatte Abbildung

$$\Phi : \quad \Sigma \to M$$

die definiert ist auf einer geschlossenen, orientierten Fläche Σ. Weil $\mathrm{H}^3(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$, ist der Pullback $\Phi^*\mathcal{G}$ isomorph zu einer trivialen Bündelgerbe. Daher können wir eine Trivialisierung, d.h. einen 1-Isomorphismus

$$\mathcal{T} : \quad \Phi^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_\omega$$

wählen und die Holonomie von $\mathcal{G}$ um Φ definieren durch

$$\mathrm{Hol}_{\mathcal{G}}(\Phi) := \mathrm{Hol}_{\mathcal{I}_\omega}\,.$$

In der gleichen Weise wie für Bündel mit Zusammenhang sehen wir dann, dass diese Definition unabhängig von der Wahl des 1-Isomorphismus $\mathcal{T}$ ist. Wenn nämlich

$$\mathcal{T}' \colon \Phi^*\mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\omega'}$$

eine andere Trivialisierung ist, haben wir einen Übergangsisomorphismus

$$L := \mathcal{T}' \circ \mathcal{T}^{-1} : \quad \mathcal{I}_\omega \xrightarrow{\sim} \mathcal{I}_{\omega'}\,,$$

wodurch die Unabhängigkeit gezeigt ist.

4 Äquivariante Objekte

Unter äquivarianten Objekten versteht man üblicherweise Objekte (z.B. Bündel) auf einer Mannigfaltigkeit M die mit der Wirkung einer Lie-Gruppe G in geeigneter Weise verträglich sind. Wir wollen den Begriff jedoch allgemeiner fassen und gleich äquivariante Objekte einer Prägarbe in Bikategorien auf einem Lie-Gruppoid betrachten. Lie Gruppoide sind eine Verallgemeinerung von Mannigfaltigkeiten und Gruppen.

Diese Verallgemeinerung erlaubt es uns, sowohl Abstieg, als auch Äquivarianz in einem gemeinsamen formalen Rahmen zu beschreiben. Dadurch können wir Sätze beweisen, die beide Aspekte kombinieren.

In Abschnitt 4.1 besprechen wir Lie-Gruppoide. Diese verwenden wir dann in 4.2 zur Definition äquivarianter Objekte. In den nächsten drei Abschnitten, die den technischen Kern dieser Arbeit bilden, werden wir dann wichtige Sätze beweisen. Dabei werden wir zum Beispiel den Satz nachliefern, dass Bündelgerben Abstieg erfüllen.

4.1 Lie-Gruppoide und simpliziale Mannigfaltigkeiten

Es sei daran erinnert, dass ein Gruppoid eine Kategorie ist, in der jeder Morphismus invertierbar ist. Einen kleinen Gruppoid kann man dann schreiben als $\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$ wobei Γ_1 die Menge der Morphismen und Γ_0 die Menge der Objekte ist. Die beiden Abbildungen sind die Source- und Target-Abbildung, die jedem Morphismus sein Urbild- bzw. Bildobjekt zuordnen. Weiter gibt es eine Identitätsabbildung $\Gamma_0 \to \Gamma_1$ und eine Komposition $\Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \to \Gamma$. Dabei ist $\Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$ der Pullback des Diagramms $\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0$, also die Menge aller Paare von Pfeilen $(f,g) \in \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$ die verknüpfbar sind. Verknüpfbar bedeutet dabei, dass das Bildobjekt von g mit dem Urbildobjekt von f übereinstimmt. Die Daten müssen so gewählt sein, dass sie ein Kategorie definieren in der alle Morphismen invertierbar sind. Diese Bedingungen kann man mittels der Strukturabbildungen natürlich in kommutativen Diagrammen ausdrücken. Wir nennen solche kleinen Gruppoide auch Gruppoide in der Kategorie Set.

Ein Gruppoid in der Kategorie $\mathcal{M}an$ oder *Lie-Gruppoid* besteht entsprechend aus zwei Mannigfaltigkeiten Γ_0 und Γ_1, differenzierbaren Abbildungen $s,t : \Gamma_1 \to \Gamma_0, \iota : \Gamma_0 \to \Gamma_1$ und $\circ : \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \to \Gamma_1$, für die die entsprechenden Diagramme kommutieren. Dabei ist zu beachten, dass die Existenz des Pullbacks $\Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1$ nicht für jede Wahl von s und t gegeben ist, sondern gefordert werden muss. Sie ist zum Beispiel gegeben, wenn s und t surjektive Submersionen sind, was wir deshalb stets verlangen wollen.

Beispiele 4.1.1. *(i) Für jede Mannigfaltigkeit M haben wir das triviale Lie-Gruppoid $M \rightrightarrows M$, bei dem alle Strukturabbildungen Identitäten sind. In diesem Sinn kann ein Lie-Gruppoid als Verallgemeinerung eines Raumes angesehen werden.*

(ii) Für eine Lie-Gruppe G haben wir das Gruppoid $G \rightrightarrows pt$ bei dem pt die einelementige Menge ist. Die Identitätsabbildung $pt \to G$ ist das neutralen Element und die Komposition $G \times G \to G$ ist die Gruppenmultiplikation. Dieses Gruppoid bezeichnen wir mit BG. So können Gruppoide auch als Verallgemeinerung von Gruppen angesehen werden.

(iii) *Für jede Wirkung einer Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit M haben wir das Wirkungsgruppoid $M//G$. Dieses hat als Objektmannigfaltigkeit M und als Morphismenmannigfaltigkeit $G \times M$. Die Source-Abbildung ist die Projektion auf M und die Target-Abbildung t gegeben durch $t(g,m) := g \cdot m$. Die Identität ist die Zuordnung $m \mapsto (1,m)$ und die Komposition $(g,m) \circ (h,n) := (gh,n)$. Als kleine Kategorie aufgefasst hat $M//G$ als Objekte die Punkte von M und als Morphismen $\mathrm{Hom}_{M//G}(m,n)$ die Gruppenelemente, unter deren Wirkung m auf n abgebildet wird. Dieses Gruppoid umfasst als Spezialfälle für G oder M trivial die ersten beiden Beispiele.*

(iv) *Für jede Überdeckung $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ haben wir das Gruppoid $Y \times_M Y \rightrightarrows Y$. Dabei ist die Komposition $(Y \times_M Y) \times_Y (Y \times_M Y) \cong Y^{[3]} \to Y^{[2]}$ gegeben durch das Weglassen des mittleren Elementes. Die Identitätsabbildung ist die Diagonalabbildung $Y \to Y \times_M Y$. Wir nennen dieses Gruppoid auch Čech-Gruppoid und bezeichnen es mit $\check{C}(Y)$.*

Nach diesen Beispielen betrachten wir nun die Nerv-Konstruktion die einem Lie-Gruppoid eine simpliziale Mannigfaltigkeit zuordnet. Dazu sei ein Gruppoid $\Gamma = (\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0)$ gegeben. Der Nerv $\Gamma_\bullet$ ist dann die simpliziale Mannigfaltigkeit

$$\cdots \overset{\partial_0}{\underset{\partial_3}{\;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}\;} \Gamma_2 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\;\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}\;} \Gamma_1 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$$

wobei

$$\Gamma_n = \underbrace{\Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \ldots \times_{\Gamma_0} \Gamma_1}_{n}$$

die Menge der n-Tupel von verkettbaren Morphismen darstellt. Die Abbildung $\partial_i : \Gamma_n \to \Gamma_{n-1}$ ist die Komposition des i-ten mit dem $(i+1)$-ten Morphismus. Also

$$\begin{aligned} \partial_i(f_1,\ldots,f_n) &:= (f_1,\ldots,f_i \circ f_{i+1},\ldots,f_n) \\ \partial_0(f_1,\ldots,f_n) &:= (f_2,\ldots,f_n) \\ \partial_n(f_1,\ldots,f_n) &:= (f_1,\ldots,f_{n-1}) \end{aligned}$$

Außerdem sind $\partial_1, \partial_0 : \Gamma_1 \to \Gamma_0$ die Source- und Target-Abbildung. Es gelten, wie man leicht verifiziert, die simplizialen Identitäten $\partial_i \partial_{j+1} = \partial_j \partial_i$ für $i \leq j$. Wir unterdrücken an dieser Stelle, wie üblich, die Notation der Entartungsabbildungen $\sigma_i : \Gamma_n \to \Gamma_{n+1}$, die an der i-ten Stelle eine Identität einfügen.

Zu den Lie-Gruppoiden müssen wir natürlich noch den geeigneten Begriff von Morphismen einführen. Das sind *Lie-Funktoren.* Ein Lie-Funktor $F : (\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0) \to (\Omega_1 \rightrightarrows \Omega_0)$ besteht aus differenzierbaren Abbildungen $F_0 : \Gamma_0 \to \Omega_0$ und $F_1 : \Gamma_1 \to \Omega_1$. Diese sollen mit allen Strukturabbildungen kommutieren, das bedeutet zum Beispiel für die Source-Abbildungen s, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "s"'] & \Omega_1 \arrow[d, "s"] \\ \Gamma_0 \arrow[r, "F_0"] & \Omega_0 \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beispiele 4.1.2. *(i) Für zwei Mannigfaltigkeiten M, N ist jeder Lie-Funktor $F : (M \rightrightarrows M) \to (N \rightrightarrows N)$ gegeben durch eine glatte Abbildung $f : M \to N$ wobei $F_0 = F_1 = f$. Damit ist die Zuordnung $M \mapsto (M \rightrightarrows M)$ eine volltreue Einbettung von Mannigfaltigkeiten in Lie-Gruppoide. Wir schreiben deswegen für das Lie-Gruppoid oft auch nur M.*

(ii) Seien nun zwei Lie-Gruppen G und H gegeben. Dann sind Lie-Funktoren $F : BG \to BH$ genau gegeben durch glatte Gruppenhomomorphismen $f : G \to H$, denn ein Lie-Funktor F besteht in diesem Fall, weil $F_0 : \mathrm{pt} \to \mathrm{pt}$ trivial ist, genau aus einer Abbildung $f : G \to H$ und muss nur die Identität und Komposition, also die Gruppenstruktur erhalten. Damit ist die Zurordnung $G \mapsto BG$ eine volltreue Einbettung von Gruppen in Lie-Gruppoide.

(iii) Für zwei Wirkungsgruppoide $M//G$ und $N//G$ liefert jede G-äquivariante Abbildung $f : M \to N$ einen Lie Funktor durch $F_0 := f$ und $F_1 := f \times id : M \times G \to N \times G$. Dies sind natürlich nicht alle Lie-Funktoren zwischen diesen beiden Gruppoiden, wie man am vorigen Beispiel als Spezialfall für $M = N = pt$ sehen kann.

(iv) Für eine Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ einer Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ liefert die Verfeinerungsabbildung $s : Z \to Y$ eine Lie-Funktor S von $\check{C}(Z)$ nach $\check{C}(Y)$. Dazu setzen wir nämlich $S_0 := s : Z \to Z$ und $S_1 : Z \times_M Z \to Y \times_M Y$ durch $S_1(z, z) := (s(z), s(z)) \in Y \times_M Y$. Dies ist wohldefiniert und außerdem ein Lie-Funktor.

(v) Als Spezialfall des letzten Beispiels betrachten wir eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ und fassen sie als Verfeinerung der trivialen Überdeckung $id : M \twoheadrightarrow M$ auf. Damit bekommen wir den Funktor $\Pi^Y : \check{C}(Y) \to M$.

Wir wollen nun die Nerv-Konstruktion nicht nur auf Lie-Gruppoide sonder auch auf Lie-Funktoren anwenden. Dazu sei ein Lie-Funktor $F : (\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0) \to (\Omega \rightrightarrows \Omega_0)$ gegeben. Wir betrachten nun die Nerven $\Gamma_\bullet$ und $\Omega_\bullet$. Darauf definieren wir Abbildungen

$$F_i : \Gamma_i \to \Omega_i.$$

für alle $i = 0, 1, 2, \ldots$. Diese sind durch F_0, F_1 und für $i > 1$ durch

$$\begin{array}{rrcl} F_i : & \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \ldots \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 & \to & \Omega_1 \times_{\Omega_0} \ldots \times_{\Omega_0} \Omega_1 \\ & (f_1, \ldots, f_n) & \mapsto & \big(F_1(f_1), \ldots F_1(f_n)\big) \end{array}$$

gegeben. Wir bezeichnen diese Familie (F_i) von Abbildungen auch durch $F_\bullet$. Wegen der definierenden Eigenschaften von Lie-Funktoren kommutieren die Abbildungen F_i mit allen Abbildungen ∂_i und σ_i der simplizialen Objekte, wir veranschaulichen dies in folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Gamma_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "F_2"'] & \Gamma_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "F_1"'] & \Gamma_0 \arrow[d, "F_0"'] \\ \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Omega_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \Omega_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & \Omega_0 \end{tikzcd}$$

Eine solche Familie $F_\bullet$ heisst *simpliziale Abbildung*. Vergleiche hierzu wieder [Wei95] oder [ML98].

4.2 Äquivariante Objekte

Man sieht sofort dass der Nerv des Čech-Gruppoids $\check{\mathrm{C}}\,(Y)$ die simpliziale Mannigfaltigkeit ist, die wir in den Kapiteln (2.4) und (3.2) benutzt haben, um die Abstiegskategorien zu definieren. Ein äquivariantes Objekt von einer Prägarbe in Kategorien bzw. Bikategorien soll nun ein solches Abstiegsobjekt verallgemeinern. Deswegen setzen wir in kompletter Analogie zu Definition 3.2.1

Definition 4.2.1. Sei $\mathfrak{X}$ eine Prägarbe in Bikategorien und die simpliziale Mannigfaltigkeit

$$\cdots \overset{\partial_0}{\underset{\partial_3}{\rightrightarrows\!\!\rightrightarrows}} \Gamma_2 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\rightrightarrows\!\!\to}} \Gamma_1 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \Gamma_0$$

gegeben. Dann besteht ein $\Gamma_\bullet$-äquivariantes Objekt von $\mathfrak{X}$ aus

(O1) einem Objekt $\mathcal{G}$ von $\mathfrak{X}(Y)$;

(O2) einem 1-Isomorphismus

$$P\colon\ \partial_0^*\mathcal{G} \to \partial_1^*\mathcal{G}$$

in $\mathfrak{X}\big(Y^{[2]}\big)$;

(O3) einem 2-Isomorphismus

$$\mu\colon\ \partial_2^*P \otimes \partial_0^*P \Rightarrow \partial_1^*P$$

in $\mathfrak{X}\big(Y^{[3]}\big)$;

(O4) der Kohärenzbedingung

$$\partial_2^*\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \partial_0^*\mu) = \partial_1^*\mu \circ (\partial_3^*\mu \otimes \mathrm{id})$$

von 2-Morphismen in $\mathfrak{X}\big(Y^{[4]}\big)$.

Genauso wie in Kapitel 3.2 für die Abstiegskategorien definieren wir nun Morphismen und 2-Morphismen zwischen äquivarianten Objekten und erhalten die Bikategorie $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$ der äquivarianten Objekte. Wir haben damit eine sehr allgemeine Definition von äquivarianten Objekten auf beliebigen simplizialen Mannigfaltigkeiten. In dieser Arbeit werden wir aber nur solche betrachten, die Nerven von Gruppoiden sind.

Bemerkung 4.2.2.

- *Für ein Lie-Gruppoid Γ schreiben wir auch $\mathfrak{X}(\Gamma)$ für $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$.*
- *Für das Čech-Gruppoid $\check{C}(Y)$ einer Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ gilt*

$$\mathfrak{X}\big(\check{C}(Y)\big) = \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M).$$

- *Für ein konstantes Lie-Gruppoid $M \rightrightarrows M$ gilt $\mathfrak{X}(M \rightrightarrows M) = \mathfrak{X}(M)$.*
- *Die Definition liefert insbesondere natürliche eine Definition von äquivarianten Bündelgerben. Diese werden wir in Kapitel 5 mit den in diesem Kapitel entwickelten Methoden eingehender untersuchen.*

- *Wir haben äquivariante Objekte nur für Prägarben in Bikategorien definiert. Falls wir eine Prägarbe $\mathfrak{X}$ in Kategorien gegeben haben, können wir diese aber, wie in Bemerkung 3.1.2 beschrieben, als Prägarbe in Bikategorien auffassen. So kann man der Definition von $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$ auch für Prägarben in Kategorien Sinn geben. In diesem Fall haben die Objekte keine 2-Morphismen (O2) auf Γ_3 sondern Gleichheiten und die Bedingung (O4) auf Γ_4 ist trivialerweise erfüllt. Analoges gilt natürlich für Morphismen. Die 2-Morphismen treten nicht auf, da jeder 2-Morphismus nur die Identität sein kann. Daher ist in diesem Fall $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$ auch eine Kategorie. Somit enthält diese Definition als Spezialfall auch die Definition* 2.4.1.

Im engeren Sinne wird von äquivarianten Objekten nur gesprochen, wenn die simpliziale Mannigfaltigkeit $\Gamma_\bullet$ der Nerv eines Wirkungsgruppoids $M//G$ ist. Möglicherweise hat der Leser eine andere Definition von äquivarianten Objekten wie Bündeln oder Garben kennengelernt. Wir wollen daher noch in zwei speziellen Fällen genauer betrachten, wie Kategorie der äquivarianten Objekte mit unserer Definition aussieht und sie in diesen Spezialfällen vereinfachen bzw. umformulieren.

1) G **diskret:** Wir nehmen an, dass wir das Wirkungsgruppoid $M//G$ für die Wirkung einer diskreten Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit haben. Wir können die Morphismenmannigfaltigkeit des Gruppoids in diesem Fall schreiben als $G \times M = \coprod_{g \in G} M$ und den Nerven entsprechend als:

$$\cdots \underset{\partial_3}{\overset{\partial_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \coprod_{g,h \in G} M \underset{\partial_2}{\overset{\partial_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \coprod_{g \in G} M \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} M$$

Ein äquivariantes Objekt in $\mathfrak{X}\big(M//G\big)$ besteht in diesem Fall entsprechend aus:

- Einem Objekt $\mathcal{G}$ aus $\mathfrak{X}(M)$.
- Einem Isomorphismus in $\mathfrak{X}\left(\coprod_{g \in G} M\right) = \prod_{g \in G} \mathfrak{X}(M)$, also einer Familie von Isomorphismen
$$\varphi_g : g^*\mathcal{G} \to \mathcal{G} \qquad\qquad g \in G$$
in $\mathfrak{X}(M)$.
- Einem 2-Isomorphismus
$$\begin{tikzcd} g^*h^*\mathcal{G} \arrow[r, "g^*\varphi_h"] \arrow[dr, "\varphi_{hg}"'] & g^*\mathcal{G} \arrow[d, "\varphi_g"] \arrow[dl, phantom, "\swarrow"] \\ & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$
für jedes Paar $(g, h) \in G \times G$.
- Einer Bedingung für Tripel $(g, h, l) \in G \times G \times G$ die wir hier nicht ausschreiben wollen.

2) Bündel auf Wirkunsgruppoiden: Wir überlegen, aus welchen Daten ein Bündel ohne Zusammenhang auf $M//G$ besteht:

- Ein Bündel P über M
- Ein Isomorphismus von dem Bündel $pr^*P = G \times P \to M$ zu dem Bündel m^*P über $G \times M$, wobei $m : G \times M \to M$ die Wirkung und $pr : G \times M \to M$ die Projektion sei. Dies ist aber aufgrund der Definition des Pullbackbündels m^*P als Faserprodukt das gleiche wie eine U(1)-äquivariante Abbildung φ in folgendem Diagramm:

$$\begin{tikzcd} G \times P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\ G \times M \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

- Eine Bedingung die genau bedeutet dass $\varphi : G \times P \to P$ eine Wirkung der Gruppe G auf P definiert.

Wir haben also genau ein Bündel P über M und eine Wirkung von G auf dem Totalraum des Bündels, so dass die Bündelprojektion äquivariant ist und die Wirkung mit der U(1)-Wirkung vertauscht. Ein Morphismus von zwei äquivarianten Bündeln P, P' besteht nun aus:

- Einem Morphismus $f : P \to P'$ von Bündeln über M
- Weiter haben wir die Bedingung

$$\begin{tikzcd} G \times P \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & P \arrow[d, "f"] \\ G \times P' \arrow[r, "\varphi'"] & P' \end{tikzcd}$$

Damit ist ein Morphismus von äquivarianten Bündeln einfach ein Morphismus der unterliegenden Bündel, der äquivariant bezüglich der G-Wirkung ist.

Wir wollen nun beschreiben, wie wir mittels eines Lie-Funktors $F : \Gamma \to \Omega$ Objekte von $\mathfrak{X}(\Omega)$ zurückziehen können zu Objekten $\mathfrak{X}(\Gamma)$. Dazu betrachten wir zunächst die im letzten Kapitel beschriebe simpliziale Abbildung $F_\bullet$, die der Lie-Funktor F induziert.

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Gamma_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "F_2"'] & \Gamma_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, "F_1"'] & \Gamma_0 \arrow[d, "F_0"'] \\ \cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Omega_2 \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \Omega_1 \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & \Omega_0 \end{tikzcd}$$

Mit dieser können wir nun die Struktur $(\mathcal{G}, P, \mu) \in \mathfrak{X}(\Omega)$ levelweise zurückziehen. Das heißt wir definieren:

$$\begin{array}{rrcl} F^* : & \mathfrak{X}(\Omega) & \to & \mathfrak{X}(\Gamma) \\ & (\mathcal{G}, P, \mu) & \mapsto & (F_0^*\mathcal{G}, F_1^*P, F_2^*\mu) \end{array}$$

Dass die Daten $(F_0^*\mathcal{G}, F_1^*P, F_2^*\mu)$ wirklich ein Objekt in $\mathfrak{X}(\Omega)$ definieren, folgt daraus, dass die Abbildungen F_i mit allen simplizialen Strukturabbildungen kommutieren.

Beispiel 4.2.3.

- *Für eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ liefert der Pullback entlang des in Beispiel 4.1.2(v) beschriebenen Lie-Funktors $\Pi^Y : \check{C}(Y) \to M$ genau die kanonische Abbildung*
$$\kappa_Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M) = \mathfrak{X}(\check{C}(Y)).$$
- *Analog liefert der Pullback entlang eines Lie-Funktors $S : \check{C}(Z) \to \check{C}(Y)$, der von einer Verfeinerung induzierte ist, den Funktor*
$$\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M) \to \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Z \twoheadrightarrow M)$$
der die Objekte mit Überdeckung Y zu Objekten mit Überdeckung Z verfeinert.

4.3 Äquivarianter Abstieg

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass man für einen 2-Stack $\mathfrak{X}$ nicht nur gewöhnliche Objekte lokal verkleben kann sondern auch äquivariante Objekte. Da wir sowohl Abstieg, als auch Äquivarianz mittels simplizialer Mannigfaltigkeiten beschrieben haben, führt uns dies auf bisimpliziale Mannigfaltigkeiten. Das Prinzip des äquivarianten Abstiegs kommt in Kapitel 5 bei der der Konstruktion von Gerben auf kompakten Lie-Gruppen zum Tragen.

Wir beginnen mit einer einfachen Beobachtung: Man kann die Definition von äquivarianten Objekten auch in der folgenden Art und Weise geben: Zunächst werten wir die Prägarbe in Bikategorien $\mathfrak{X}$ auf dem simplizialen Objekt $\Gamma_\bullet$ aus und erhalten folgendes Diagramm in $\mathcal{B}i\mathcal{C}at$:

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{X}(\Gamma_0) \arrow[r, shift left, "\partial_0^*"] \arrow[r, shift right, "\partial_1^*"'] & \mathfrak{X}(\Gamma_1) \arrow[r, shift left=2, "\partial_0^*"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\partial_2^*"'] & \mathfrak{X}(\Gamma_2) \arrow[r, shift left=3, "\partial_0^*"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "\partial_3^*"'] & \cdots \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm in $\mathcal{B}i\mathcal{C}at$ erfüllt nun offensichtlich bis auf natürliche Isomorphie die kosimplizialen Identitäten

$$\partial_j^* \partial_i^* \;\cong\; \partial_i^* \partial_{j-1}^* \qquad \text{für } i < j$$

die durch Dualisieren aus den simplizialen Identitäten für $\Gamma_\bullet$ folgen, die wir in Kapitel 2.4 beschrieben haben. Die Kohärenzzellen machen dies zu einem schwachen Funktor $\Delta \to \mathcal{B}i\mathcal{C}at$ von der simplizialen Kategorie nach $\mathcal{B}i\mathcal{C}at$. Ein solches Objekt bezeichnen wir als *(schwache) kosimpliziale Bikategorie.*
Die Abstiegs- und äquivarianten Kategorien können nun ausschließlich aus dieser kosimplizialen Kategorie in der üblichen Art und Weise mittels eines Objekts in $\mathfrak{X}(\Gamma_0)$ eines Morphismuses in $\mathfrak{X}(\Gamma_1)$ etc. gebildet werden. Daher liegt es nahe, für eine allgemeine kosimpliziale Bikategorie folgende Konstruktion zu geben:

Definition 4.3.1. Für eine kosimpliziale Bikategorie $C_\bullet$ definieren wir die Kategorie

$$\operatorname{holim}_{i\in\Delta} C_i \equiv \operatorname{holim}\left(\begin{tikzcd} C_0 \arrow[r, shift left, "\partial_0^*"] \arrow[r, shift right, "\partial_1^*"'] & C_1 \arrow[r, shift left=2, "\partial_0^*"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2, "\partial_2^*"'] & C_2 \arrow[r, shift left=3, "\partial_0^*"] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3, "\partial_3^*"'] & \cdots \end{tikzcd} \right)$$

durch die analoge Konstruktion zu (3.2.1) und (4.2.1). Objekte sind also gegeben durch:

- Ein Objekt $\mathcal{G}$ in C_0;
- einem 1-Isomorphismus
$$P\colon\ \partial_0^*\mathcal{G} \to \partial_1^*\mathcal{G}$$
in C_1;
- einem 2-Isomorphismus
$$\mu\colon\ \partial_2^* P \otimes \partial_0^* P \Rightarrow \partial_1^* P$$
in C_2;
- der Kohärenzbedingung
$$\partial_2^*\mu \circ (\mathrm{id} \otimes \partial_0^*\mu) = \partial_1^*\mu \circ (\partial_3^*\mu \otimes \mathrm{id})$$
von 2-Morphismen in C_3.

Die Morphismen und 2-Morphismen sind entsprechend wie in 3.2 definiert.

Mit dieser Definition gilt dann

$$\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) = \mathrm{holim}_{i\in\Delta}\, \mathfrak{X}(\Gamma_i)$$

und als Spezialfall davon

$$\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M) = \mathrm{holim}_{i\in\Delta}\, X(Y^{[i+1]}).$$

Für eine konstante simpliziale Bikategorie $C_\bullet$ mit $C_i = C$ für alle i haben wir

$$\mathrm{holim}_{i\in\Delta}\, C_i = C.$$

Bemerkung 4.3.2. *Die Bezeichnung* holim *haben wir natürlich nicht zufällig gewählt. In der Tat ist* holim_Δ *der Homotopielimes d.h. der „richtige“ höherdimensionale Limes über das kosimpliziale Diagramm* $C_\bullet$ *in* $\mathcal{B}i\mathcal{C}at$*. Wir wollen den Begriff von Homotopielimites hier aber nicht einführen, dafür sei der Leser auf [DS95] und [Lur06] verwiesen. Wir werden auch im Folgenden nicht benutzen dass es sich um den Homotopielimes handelt und daher* $\mathrm{holim}_{i\in\Delta} C_i$ *lediglich als Bezeichnung für die durch die gegebene Vorschrift definierte Bikategorie verwenden. Wir wollen nur kurz für diejenigen die den Begriff kennen, darauf hinweisen, dass zur Definition des Homotopielimes über kosimpliziale Bikategorien die Modellstruktur aus [Lac04] auf Bikategorien benutzt wird.*

Da wir versuchen den Begriff des Abstiegs auch in einem äquivarianten Kontext zu verwenden müssen wir Überdeckungen von Gruppoiden betrachten. Allgemeiner wollen wir hier direkt Überdeckungen von simplizialen Objekten betrachten. Dieser Begriff hängt natürlich wieder von der Grothendieck-Topologie ab:

Definition 4.3.3. (i) Wir nennen eine simpliziale Abbildung $\Pi_\bullet : \Lambda_\bullet \to \Gamma_\bullet$ von simplizialen Mannigfaltigkeiten $\Lambda_\bullet$ und $\Gamma_\bullet$ eine Überdeckung, falls alle Abbildungen $\Pi_i : \Lambda_i \to \Gamma_i$ Überdeckungen sind.

(ii) Ein Lie-Funktor $\Pi : (\Lambda_1 \rightrightarrows \Lambda_0) \to (\Gamma_1 \rightrightarrows \Gamma_0)$ heißt Überdeckung, falls die zugehörige simpliziale Abbildung $\Pi_\bullet : \Lambda_\bullet \to \Gamma_\bullet$ der zugehörigen Nerven eine Überdeckung von simplizialen Mannigfaltigkeiten ist.

Ein Beispiel einer solchen Simplizialen Überdeckung liefert nun für jede Überdeckung eines Raumes $\pi : Y \to M$ sowohl die Simpliziale Abbildung $Y^\bullet \to M$ die durch den Lie-Funktor $\check{\mathrm{C}}(Y) \to M$ gegeben ist als auch die simpliziale Abbildung $Y \to M$ von konstanten Simplizialen Objekten Y und M die einfach gradweise durch π gegeben ist.

Für uns wird aber das folgende Beispiel eine entscheidende Rolle spielen:

Beispiel 4.3.4. *Wir betrachten eine Lie-Gruppe G und eine G-Wirkung auf einer Mannigfaltigkeit M. Für diese Wirkung sei nun eine G-invariante Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ gegeben. Dann haben wir die Wirkungsgruppoide $\bigsqcup_{i\in I} U_i//G$ und $M//G$ und den Lie-Funktor*

$$\Pi : \bigsqcup_{i\in I} U_i//G \to M//G$$

gegeben durch die G-äquviariante Überdeckungsabbildung $\pi : \bigsqcup_{i\in I} U_i \twoheadrightarrow M$. Wir sehen dass die $j-te$ der simplizialen Abbildungen

$$\Pi_j : G \times \ldots \times G \times \bigsqcup_{i\in I} U_i \to G \times \ldots \times G \times M$$

gegeben ist durch $id \times \pi$, also eine Überdeckung von Mannigfaltigkeiten ist. Somit ist Π eine Überdeckung von Gruppoiden. Eine offensichtliche Verallgemeinerung dieses Beispieles bekommen wir, wenn wir für die G-Mannigfaltigkeit M eine surjektive Submersion $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ betrachten so dass Y ebenfalls eine G-Wirkung hat und die Abbildung π äquivariant ist. Dann sieht man wie zuvor, dass die Abbildung

$$\Pi : Y//G \to M//G$$

eine Überdeckung ist.

Doch nun zur Formulierung des äquivarianten Abstiegs. Für eine Überdeckung $\Pi_\bullet : \Lambda_\bullet \to \Gamma_\bullet$ von simplizialen Mannigfaltigkeiten können wir die simpliziale Mannigfaltigkeit

$$\Lambda_\bullet \times_{\Gamma_\bullet} \Lambda_\bullet := \left(\cdots \overset{\partial_0}{\underset{\partial_3}{\rightrightarrows\!\!\rightrightarrows}} \Lambda_2 \times_{\Gamma_2} \Lambda_2 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_2}{\rightrightarrows\!\!\to}} \Lambda_1 \times_{\Gamma_1} \Lambda_1 \overset{\partial_0}{\underset{\partial_1}{\rightrightarrows}} \Lambda_0 \times_{\Gamma_0} \Lambda_0 \right)$$

bilden. Die Abbildungen ∂_i sind hierbei in offensichtlicher Weise gegeben. Dieses Objekt werden wir auch mit $\Lambda_\bullet^{[2]}$ bezeichnen. Die beiden Projektionen $\delta_0, \delta_1 : \Lambda_\bullet^{[2]} \to \Lambda_\bullet$ bilden simpliziale Abbildungen wovon man sich leicht überzeugt. Weiter haben wir dann natürlich auch die simplizialen Mannigfaltigkeiten

$$\Lambda_\bullet^{[n]} := \underbrace{\Lambda_\bullet \times_{\Gamma_\bullet} \ldots \times_{\Gamma_\bullet} \Lambda_\bullet}_{n}$$

und simpliziale-Abbildungen $\delta_i : \Lambda_\bullet^{[n]} \to \Lambda_\bullet^{[n-1]}$ für $i = 0, \ldots, n$. Was wir also insgesamt erhalten, ist ein augmentiertes simpliziales Objekt

$$\left(\Lambda_\bullet\right)^{[\bullet]} := \left(\cdots \overset{\delta_0}{\underset{\delta_3}{\rightrightarrows\!\!\rightrightarrows}} \Lambda_\bullet^{[3]} \overset{\delta_0}{\underset{\delta_2}{\rightrightarrows\!\!\to}} \Lambda_\bullet^{[2]} \overset{\delta_0}{\underset{\delta_1}{\rightrightarrows}} \Lambda_\bullet \right) \longrightarrow \Gamma_\bullet$$

in simplizialen Mannigfaktigkeiten. Ein simpliziales Objekt in simplizialen Mannigfaltigkeiten heißt auch *bisimpliziale* Mannigfaltigkeit. Komplett ausgeschrieben hat dieses dann die Form:

$$
\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d, shift left=3]\arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1]\arrow[d, shift right=3] & \cdots \arrow[d, shift left=3]\arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1]\arrow[d, shift right=3] & \cdots \arrow[d, shift left=3]\arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1]\arrow[d, shift right=3] & \cdots \arrow[d, shift left=3]\arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1]\arrow[d, shift right=3] \\
\cdots \arrow[r, shift left=3]\arrow[r, shift left=1]\arrow[r, shift right=1]\arrow[r, shift right=3] & \Lambda_2^{[3]} \arrow[r, shift left=2]\arrow[r]\arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2]\arrow[d]\arrow[d, shift right=2] & \Lambda_2^{[2]} \arrow[r, shift left=1]\arrow[r, shift right=1] \arrow[d, shift left=2]\arrow[d]\arrow[d, shift right=2] & \Lambda_2 \arrow[r] \arrow[d, shift left=2]\arrow[d]\arrow[d, shift right=2] & \Gamma_2 \arrow[d, shift left=2]\arrow[d]\arrow[d, shift right=2] \\
\cdots \arrow[r, shift left=3]\arrow[r, shift left=1]\arrow[r, shift right=1]\arrow[r, shift right=3] & \Lambda_1^{[3]} \arrow[r, shift left=2]\arrow[r]\arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1] & \Lambda_1^{[2]} \arrow[r, shift left=1]\arrow[r, shift right=1] \arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1] & \Lambda_1 \arrow[r] \arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1] & \Gamma_1 \arrow[d, shift left=1]\arrow[d, shift right=1] \\
\cdots \arrow[r, shift left=3]\arrow[r, shift left=1]\arrow[r, shift right=1]\arrow[r, shift right=3] & \Lambda_0^{[3]} \arrow[r, shift left=2]\arrow[r]\arrow[r, shift right=2] & \Lambda_0^{[2]} \arrow[r, shift left=1]\arrow[r, shift right=1] & \Lambda_0 \arrow[r] & \Gamma_0
\end{tikzcd}
$$

Die horizontalen Reihen sind per Konstruktion Nerven von Čech-Gruppoiden. Dies wollen wir nun ausnutzen um das Prinzip des äquivarianten Abstiegs zu beweisen:

Satz 4.3.5 (Äquivarianter Abstieg)**.** *Sei $\mathfrak{X}$ ein 2-Stack und $\Pi : \Lambda_\bullet \to \Gamma_\bullet$ eine Überdeckung von simplizialen Mannigfaltigkeiten. Dann haben wir eine Äquivalenz von Bikategorien*

$$\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{holim}\left(\mathfrak{X}(\Lambda_\bullet) \underset{\delta_1^*}{\overset{\delta_0^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Lambda_\bullet^{[2]}\right) \underset{\delta_2^*}{\overset{\delta_0^*}{\substack{\to\\ \to\\ \to}}} \mathfrak{X}\left(\Lambda_\bullet^{[3]}\right) \underset{\delta_3^*}{\overset{\delta_0^*}{\substack{\to\\ \to\\ \to\\ \to}}} \cdots \right)$$

Falls $\mathfrak{X}$ nur ein Prästack ist, so ist der Funktor immerhin volltreu, d.h. induziert Äquivalenzen auf Hom*-Kategorien.*

Beweis. Es gilt zunächst $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) = \operatorname{holim}_{i\in\Delta} \mathfrak{X}(\Gamma_i)$. Weil $\mathfrak{X}$ ein Stack ist und die $\Pi_i : \Lambda_i \twoheadrightarrow \Gamma_i$ Überdeckungen sind, ist außerdem

$$\mathfrak{X}(\Gamma_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}esc(\Lambda_i \twoheadrightarrow \Gamma_i) = \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}(\Lambda_i^{[j]})$$

eine Äquivalenz von Bikategorien. Setzen wir dies zusammen so erhalten wir eine Äquivalenz

$$\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{holim}_{i\in\Delta} \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Lambda_i^{[j]}\right)$$

Der entscheidende Punkt im Beweis ist zu zeigen, dass wir die beiden Homotopielimites vertauschen dürfen, dann erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned} \operatorname{holim}_{i\in\Delta} \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Lambda_i^{[j]}\right) &= \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \operatorname{holim}_{i\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Lambda_i^{[j]}\right) \\ &= \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Lambda_\bullet^{[j]}\right) \end{aligned}$$

also die Aussage des Satzes. Die Vertauschungssaussage wollen wir etwas allgemeiner in einem eigenen Satz formulieren, da wir sie auch später noch brauchen werden. Die Aussage über Prästacks folgt komplett analog. □

Satz 4.3.6. *Für eine beliebige bisimpliziale Mannigfaltigkeit $\Omega_{\bullet\bullet}$ und eine beliebige Prägarbe in Bikategorien $\mathfrak{X}$ gilt:*

$$\operatorname{holim}_{i\in\Delta} \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}(\Omega_{ij}) = \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \operatorname{holim}_{i\in\Delta} \mathfrak{X}(\Omega_{ij})$$

Beweis. Am einfachsten wäre es, diesen Beweis durch abstact-nonsense zu führen, indem man die universelle Eigenschaft des Homotopielimes benutzt. Da wir jedoch nicht die Eigenschaften des Homotopielimes verwenden wollten, werden wir dies explizit nachrechnen. Wir überlegen uns, aus welchen Daten auf der bisimplizialen Mannigfaltigkeit

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] & \cdots \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] & \cdots \arrow[d, shift left=3] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \arrow[d, shift right=3] \\
\cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Omega_{22} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & \Omega_{21} \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] & \Omega_{20} \arrow[d, shift left=2] \arrow[d] \arrow[d, shift right=2] \\
\cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Omega_{12} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & \Omega_{11} \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] & \Omega_{10} \arrow[d, shift left=1] \arrow[d, shift right=1] \\
\cdots \arrow[r, shift left=3] \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] \arrow[r, shift right=3] & \Omega_{02} \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \Omega_{01} \arrow[r, shift left=1] \arrow[r, shift right=1] & \Omega_{00}
\end{tikzcd}$$

ein Objekt in $\operatorname{holim}_{i\in\Delta} \operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Omega_{ij}\right)$ besteht. Dazu seien die horizontalen Randabbildungen mit δ bezeichnet und die vertikalen mit ∂. Dann ist ist ein solches Objekt gegeben durch:

- Ein Objekt in $\operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Omega_{0j}\right)$ d.h.
  - Ein Objekt $\mathcal{G}$ über Ω_{00}
  - Ein Isomorphismus $A_{01} : \delta_0^*\mathcal{G} \to \delta_1^*\mathcal{G}$ über Ω_{01}
  - Ein 2-Isomorphismus $\mu_{02} : \delta_2^* A_{01} \otimes \delta_0^* A_{01} \Rightarrow \delta_1^* A_{01}$ über Ω_{02}
  - Eine Bedingung über Ω_{03}
- Ein Morphismus $\partial_0^*(\mathcal{G}, A_{0,1}, \mu_{0,2}) \to \partial_1^*(\mathcal{G}, A_{0,1}, \mu_{02})$ in $\operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Omega_{1j}\right)$ also
  - Ein Isomorphismus $A_{10} : \partial_0^*\mathcal{G} \to \partial_1^*\mathcal{G}$ über $\Omega_{1,0}$
  - Ein 2-Isomorphismus $\mu_{11} : \partial_1^* A_{01} \otimes \delta_0^* A_{10} \Rightarrow \delta_1^* A_{10} \otimes \partial_0^* A_{01}$ über Ω_{11}.
  - Eine Bedinung über Ω_{12}.
- Ein 2-Isomorphismus $\partial_2^*(A_{10}, \mu_{11}) \otimes \partial_0^*(A_{10}, \mu_{11}) \Rightarrow \partial_1^*(A_{10}, \mu_{11})$ in $\operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Omega_{2j}\right)$:
  - Ein 2-Isomorphismus $\mu_{20} : \partial_2^* A_{10} \otimes \partial_0^* A_{10} \Rightarrow \partial_1^* A_{10}$ über Ω_{20}.
  - Eine Bedingung über Ω_{21}.
- Eine Bedingung an die 2-Morphismen in $\operatorname{holim}_{j\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Omega_{3j}\right)$ also
  - Eine Bedingung über Ω_{30}.

Wenn wir uns das Diagramm anschauen sehen wir ein Objekt $\mathcal{G} \in \mathfrak{X}(\Omega_{00})$ in der unteren Ecke, zwei Isomorphismen $A_{01} \in \mathfrak{X}(\Omega_{01})$, $A_{10} \in \mathfrak{X}(\Omega_{01})$ auf der ersten Diagonale, drei 2-Isomorphismen $\mu_{02} \in \mathfrak{X}(\Omega_{02}), \mu_{11} \in \mathfrak{X}(\Omega_{11}), \mu_{20} \in \mathfrak{X}(\Omega_{20})$ auf der zweiten Diagonale und vier Bedingungen auf der dritten Diagonale.

Wenn wir nun ein Objekt in $\operatorname{holim}_{j\in\Delta} \operatorname{holim}_{i\in\Delta} \mathfrak{X}\left(\Omega_{ij}\right)$ betrachten so sehen wir durch vertauschen der Rolle von i und j in den obigen Überlegungen, dass wir die gleiche Menge an Daten

erhalten. Da wir jedoch auch die Rollen von ∂ und δ vertauschen müssen, sehen wir dass wir nicht einen 2-Ismorphismus $\mu_{11} : \partial_1^* A_{01} \otimes \delta_0^* A_{10} \Rightarrow \delta_1^* A_{10} \otimes \partial_0^* A_{01}$ erhalten sondern einen in die umgekehrte Richtung. Da es sich um einen Ismomorphismus handelt können wir einen solchen einfach durch Übergang zum Inversen bekommen. Für die anderen Isomorphismen bleiben die Source- und Targetobjekte gleich (und außerdem die Bedingungen, wenn man sie ausformuliert).
Durch analoge Überlegungen sieht man nun auch, dass die Morphismen und 2-Morphismen in den beiden Kategorien die gleichen sind. □

Schließlich wollen wir noch den bereits mehrfach behandelten Fall einer G-invarianten Überdeckung betrachten. Dieser Spezialfall ist sehr wichtig, da sich stets eine solche Überdeckung finden lässt, wie wir in 5.4 zeigen werden. In diesem Fall hat das simpliziale Diagramm offensichtlich die Form:

$$\cdots \underset{\delta_3}{\overset{\delta_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \bigsqcup U_{ijk}//G \underset{\delta_2}{\overset{\delta_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \bigsqcup U_{ij}//G \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \bigsqcup U_i//G \longrightarrow M//G$$

Damit bekommen wir dann:

Korollar 4.3.7. *Gegeben sei eine G-Wirkung auf M und eine G-invariante offene Überdeckung $(U_i)_{i\in I}$ von M. Dann liefert die Einschränkung für jeden Stack $\mathfrak{X}$ die Äquivalenz:*

$$\mathfrak{X}(M//G) \xrightarrow{\sim} \operatorname{holim}\left(\prod \mathfrak{X}(U_i//G) \underset{\delta_1^*}{\overset{\delta_0^*}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \prod \mathfrak{X}(U_{ij}//G) \underset{\delta_2^*}{\overset{\delta_0^*}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \prod \mathfrak{X}(U_{ijk}//G) \underset{\delta_3^*}{\overset{\delta_0^*}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \cdots \right)$$

4.4 Schwache Äquivalenzen

Wir hatten gesehen, dass für eine beliebige Prägarbe in Kategorien die Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$ die Kategorie von äquivarianten Objekten auf dem Čech-Gruppoid $\check{C}Y$ ist. Wir haben weiter den Lie-Funktor $\Pi_Y : \check{C}Y \to M$ der von der Abbildung π induziert wird. Wir fassen dabei die Mannigfaltigkeit M wie üblich als den konstanten Gruppoid $M \rightrightarrows M$ auf. Der kanonische Funktor

$$\kappa_Y : \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$$

ist dann der Pullback entlang dieses Funktors. Die Bedingung, dass eine Prägarbe in Bikategorien ein 2-Stack ist, lautet also einfach, dass der Pullback entlang der durch die Überdeckung ausgezeichneten Funktoren Π_Y eine Äquivalenz ist.
Nun stellt sich die Frage ob auch für andere Funktoren $F : \Gamma \to \Omega$ der Pullback $F^* : \mathfrak{X}(\Omega_\bullet) \to \mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$ eine Äquivalenz ist. Ziel dieses Kapitels ist es die Funktoren für die dies der Fall ist zu charakterisieren. Daher zunächst folgende Definition:

Definition 4.4.1. Ein Lie-Funktor $F : \Gamma \to \Lambda$ heißt *schwache Äquivalenz* falls für jeden 2-Stack $\mathfrak{X}$ der Pullbackfunktor $F^* : \mathfrak{X}(\Lambda^\bullet) \to \mathfrak{X}(\Gamma^\bullet)$ eine Äquivalenz von Bikategorien ist. Die Lie-Gruppoide heißen dann *schwach äquivalent.*

Bemerkung 4.4.2. *Diese Definition von schwachen Äquivalenzen ist konsistent mit der in [Lur06] in Kapitel gegebenen.*

Wir betrachten, um mit dem Begriff vertraut zu werden ein paar einfache Beispiele von schwachen Äquivalenzen:

Beispiele 4.4.3. *(i) Invertierbare Lie-Funktoren, das sind Lie-Funktoren* $F : \Gamma \to \Lambda$ *sodass ein Lie-Funktor* $G : \Lambda \to \Gamma$ *existiert mit* $G \circ F = id_\Gamma$ *und* $F \circ G = id_\Lambda$*.*

(ii) Wir wissen außerdem bereits, dass die Funktoren $\Pi_Y : \check{C}(Y) \to M$ *schwache Äquivalenzen sind.*

(iii) Wir betrachten die Wirkung einer Gruppe G *auf einer Mannigfaltigkeit* M*. Diese Wirkung sei frei und eigentlich. Dann ist der Quotient* M/G *ebenfalls eine Mannigfaltigkeit und die Quotientenabbildung* $q : M \to M/G$ *eine surjektive Submersion (siehe [DK00], Theorem 1.11.4). Dann ist dass der Lie-Funktor* $Q : M//G \to M/G$ *induziert von Quotientenabbildung* q *mitels*

$$\begin{array}{rccl} Q_0 : & M & \to & M/G \\ & m & \mapsto & q(m) \\ Q_1 : & G \times M & \to & M/G \\ & (g, m) & \mapsto & q(m) \end{array}$$

eine schwache Äquivalenz. Dies sieht man, indem man für die surjektive Submersion $q : M \to M/G$ *das Čech-Gruppoid* $M \times_{M/G} M \rightrightarrows M$ *betrachtet, das nach Beispiel (i) eine schwache Äquivalenz ist. Bei Elementen in* $M \times_{M/G} M$ *handelt es sich um Tupel* (m, m') *von Elementen in* M *die im gleichen* G*-Orbit liegen. Da die Wirkung frei ist unterscheiden diese sich genau um ein Element in* G*, d.h. die Abbildung* $G \times M \to M \times_{M/G} M, (g, m) \mapsto (m, gm)$ *ist ein Isomorphismus. Insgesamt haben wir eine Isomorphie der Gruppoide*

$$M//G = (G \times M \rightrightarrows M) \cong (M \times_{M/G} M \rightrightarrows M)$$

Auch wenn das letzte Beispiel auf den ersten Blick trivial wirkt, so können daraus bereits wichtige Folgerungen gezogen werden. Es ist zum Beispiel bekannt dass jede kompakte, einfache Lie-Gruppe G geschrieben werden kann als

$$\tilde{G}/H$$

wobei $\tilde{G}$ die universelle Überlagerung und $H := \pi_1(G)$ als Untergruppe des Zentrums von $\tilde{G}$ aufgefasst werden kann. Wegen der schwachen Äquivalenz

$$\tilde{G}//H \to \tilde{G}/H = G$$

sind also Gerben auf G das gleiche wie H-äquivariante Gerben auf $\tilde{G}$. Da die Theorie der Gerben auf einfach-zusammenhängenden kompakten Lie-Gruppen gut verstanden ist (siehe Kapitel 5), erhält man auf die Weise Aussagen über Gerben auf nicht einfach-zusammenhängenden Lie-Gruppen. Mit diesen Methoden konnten in [GR04] Bündelgerben auf nicht-einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen konstruiert und klassifiziert werden. Man beachte, dass sich in diesem Fall die Definition von äquivarianten Gerben wie in 4.2 angegeben vereinfacht, weil H eine diskrete Untergruppe von $\tilde{G}$ ist.

Wenn wir an Funktoren von Kategorien denken, so ist wohlbekannt, dass ein Funktor genau dann eine Äquvialenz von Kategorien ist, falls er volltreu und essentiell surjektiv ist. In der Tat gilt für Lie-Gruppoide eine analoge Aussage, die wir nun beweisen wollen. Dazu folgende Definition:

Definition 4.4.4. Ein Lie Funktor $F : \Gamma \to \Lambda$ heißt

- *volltreu*, falls das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d, "(s,t)"'] & \Lambda_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ \Gamma_0 \times \Gamma_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0"] & \Lambda_0 \times \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

  ein Pullback-Diagramm ist.

- *essentiell surjektiv*, falls die Target-Abbildung $\Gamma_0 \ {}_{F_0}\times_s \Lambda_1 \to \Lambda_0$ eine Überdeckung ist.

Ziel des Restes dieses Kapitels wird es nun sein, zu beweisen, dass Lie-Funktoren die volltreu und essentiell surjektiv sind schwache Äquivalenzen sind. Wir benötigen jedoch erst einiges an Vorarbeit bevor wir den Beweis führen können. Von den folgenden Lemmata, Definitionen und Sätzen werden wir in späteren Kapiteln nur noch die Sätze 4.4.18 und 4.4.19 verwenden. Der Leser der nicht an den technischen Details interessiert ist kann dieses Kapitel daher auslassen.

Wir haben bei unserem bisherigen Vorgehen Lie-Gruppoide und Lie-Funktoren betrachtet. Zusätzlich wollen wir nun auch noch sogenannte Lie-Transformationen betrachten, die den natürlichen Transformationen von Kategorien entsprechen. Dazu führen wir zunächst das Intervall-Gruppoid

$$\mathrm{I} := (\mathrm{I}_1 \rightrightarrows \mathrm{I}_0)$$

als freies Gruppoid auf einem Morphismus ein. Also hat I zwei formale Objekte $\mathrm{I}_0 := \{a, b\}$ und vier Morphismen $\mathrm{I}_1 := \{id_a, id_b, f, f^{-1}\}$ wobei $s(f) = a, t(f) = b$. Dadurch ist das Gruppoid bereits vollständig bestimmt. Es bildet ein kleines Gruppoid und wir wollen es auffassen als diskretes Lie-Gruppoid.
Mittels des Intervall-Gruppoids definieren wir für nun beliebiges Lie-Gruppoid Γ das *Zylinder-Gruppoid* $\Gamma \times \mathrm{I}$. Dieses hat die kanonischen Inklusionsfunktoren $i_0, i_1 : \Gamma \to \Gamma \times \mathrm{I}$.

Definition 4.4.5.

- Eine Lie-Transformation η zwischen Lie-Funktoren $F, G : \Gamma \to \Omega$ ist ein Lie-Funktor $\eta : \Gamma \times \mathrm{I} \to \Omega$ mit $\eta \circ i_0 = F$ und $\eta \circ i_1 = G$.

- Falls eine Lie-Transformation zwischen Lie-Funktoren F und G existiert, so nennen wir diese natürlich isomorph und schreiben $F \simeq G$.

- Ein Lie-Funktor $F : \Gamma \to \Omega$ heißt interne Äquivalenz, falls es einen zweiten Funktor $G : \Omega \to \Gamma$ gibt mit $G \circ F \simeq \mathrm{id}_\Gamma$ und $F \circ G \simeq \mathrm{id}_\Omega$.

Bemerkung 4.4.6. *Es ist eine einfache Übung sich zu überlegen, dass eine Lie-Transformation zwischen den Funktoren $F, G : \Gamma \to \Omega$ aus einer Abbildung $\eta : \Gamma_0 \to \Omega_1$ besteht, sodass gilt $s \circ \eta = F_0, t \circ \eta = G_0$ und außerdem muss für ein Element $f \in \Gamma_1$ gelten*

$$G_1(f) \circ \eta(s(f)) = \eta(t(f)) \circ F_1(f).$$

Anschaulich entspricht dies der Kommutativität des Diagramms:

$$\begin{tikzcd} F_0(s(f)) \arrow[r, "F_1(f)"] \arrow[d, "\eta(s(f))"'] & F_0(t(f)) \arrow[d, "\eta(t(f))"] \\ G_0(s(f)) \arrow[r, "G_1(f)"] & G_0(t(f)) \end{tikzcd}$$

welche genau die übliche Bedingung an natürliche Transformationen ist.

Damit haben wir nun folgenden wichtigen Satz:

Satz 4.4.7. *Eine Lie-Transformation η von Lie-Funktoren $F, G : \Gamma \to \Omega$ induziert für jede Prägarbe in Kategorien eine natürliche Isomorphie der beiden Pullbackfunktoren $F^*, G^* : \mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$.*

Diese Aussage scheint anschaulich völlig klar zu sein. Es ist jedoch nicht ganz einfach explizit anzugeben welche kombinatorische Stuktur eine Lie-Transformation $F \Rightarrow G$ auf den simplizialen Nerven $F_\bullet, G_\bullet : \Gamma_\bullet \to \Omega_\bullet$ induziert, um einen direkten Beweis des Satzes führen zu können.
Die richtige Antwort lautet, dass wir eine simpliziale Homotopie haben (sieht dazu z.B. [May92]). Eine solche simpliziale Homotopie ist mit unseren ad-hoc-Methoden jedoch nicht so einfach in Kategorien zu übersetzen, daher wollen wir den Beweis folgendermaßen führen:

Beweis. Es gilt für eine Menge D (diskreter Raum), eine glatte Mannigfaltigkeit M und eine Prägarbe in Bikategorien $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{X}(M \times D) = \mathfrak{X}\left(\coprod_{d \in D} M\right) \cong \prod_{d \in D} \mathfrak{X}(M) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{BiCat}}\big(D, \mathfrak{X}(M)\big)$$

wobei wir D als Bikategorie mit Objekten $d \in D$ und mit 1- und 2-Morphismen nur Identitäten auffassen. Damit haben wir nun für das Lie-Gruppoid Γ:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X}(\Gamma \times \mathrm{I}) &= \mathrm{holim}_{k \in \Delta}\Big(\mathfrak{X}(\Gamma_k \times \mathrm{I}_k))\Big) \\ &= \mathrm{holim}_{k \in \Delta}\Big(\mathrm{Hom}\big(\mathrm{I}_k, \mathfrak{X}(\Gamma_k)\big)\Big) \end{aligned}$$

Wenn man den letzten holim explizit ausschreibt so kann man schnell sehen, dass dies genau einem Funktor von dem Gruppoiden I als Bikategorie aufgefasst nach $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$ entspricht. Ein solcher Funktor ist aufgrund der Definition von I als freies Gruppoid auf einem Erzeuger aber genau ein Isomorphismus in der Bikategorie $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$. Das bedeutet dass der Pullback entlang $\eta : \Gamma \times \mathrm{I} \to \Omega$ einen Funktor

$$\mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Gamma)^{\mathrm{I}},$$

d.h. eine natürliche Transformation, liefert. □

Korollar 4.4.8. *Für eine Prägarbe in Bikategorien $\mathfrak{X}$ und eine interne Äquivalenz $\Gamma \to \Omega$ ist der Pullback $\mathfrak{X}(\Omega) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$ eine Äquivalenz von Bikategorien. Insbesondere sind interne Äquivalenzen auch schwache Äquivalenzen.*

Nun wollen wir noch ein nützliches Kriterium für interne Äquivalenzen beweisen, das wir später benutzen werden.

Lemma 4.4.9. *Ein Lie-Funktor $F : \Gamma \to \Omega$ der einen volltreuen Retrakt, d.h. ein volltreues Linksinverses hat, ist eine interne Äquivalenz.*

Beweis. Sei also P das volltreue Linksinverse zu F. Wir haben dann

$$P \circ F = \mathrm{id}_\Gamma$$

Es bleibt also eine Lie-Transformation

$$\eta : F \circ P \Longrightarrow \mathrm{id}_\Gamma$$

zu finden. Weil P volltreu ist, ist das folgende Diagramm ein Pullback:

$$\begin{tikzcd} \Omega_1 \arrow[r, "P_1"] \arrow[d, "(s,t)"'] & \Gamma_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ \Omega_0 \times \Omega_0 \arrow[r, "P_0 \times P_0"] & \Gamma_0 \times \Gamma_0 \end{tikzcd}$$

Wir definieren nun $\eta : \Omega_0 \to \Omega_1 \cong \Omega_0 \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} \Omega_0$ durch

$$\eta(\omega) = \big(F_0 P_0(\omega)\,, \mathrm{id}_{P_0(\omega)}, \,\omega\big)$$

Dies ist wohldefiniert weil $P_0(w) = s(\mathrm{id}_{P_0(\omega)})$ und $t(\mathrm{id}_{P_0(\omega)}) = P_0(\omega) = P_0 F_0 P_0(\omega)$. Es ist dann klar, dass es sich damit um die gesuchte Lie-Transformation handelt, denn

$$s\eta(\omega) = F_0 P_0(\omega) \quad \text{und} \quad t\eta(\omega) = \omega.$$

□

Lemma 4.4.10. *Für zwei Überdeckungen $\pi : Y \twoheadrightarrow M$ und $\pi' : Y' \twoheadrightarrow M'$ in $\mathcal{M}an$ ist die Abbildung $\pi \times \pi' : Y \times Y' \to M \times M'$ ebenfalls eine Überdeckung.*

Beweis. Es gilt $\pi \times \pi' = (\pi \times id) \circ (id \times \pi')$. Da die Komposition von Überdeckungen eine Überdeckung ist können wir oBdA annehmen dass $\pi' = id : M' \twoheadrightarrow M'$. Dann folgt die Aussage aber daraus, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y \times M' \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, two heads] \\ M \times M' \arrow[r] & M \end{tikzcd}$$

ein Pullback-Diagramm ist. □

Lemma 4.4.11. *Ein volltreuer Lie-Funktor $F : \Lambda \to \Gamma$ ist genau dann einen Überdeckung im Sinne von 4.3.3 wenn $F_0 : \Lambda_0 \to \Gamma_0$ eine Überdeckung ist.*

Beweis. Daraus dass der Funktor volltreu ist, folgt zunächst, dass alle Diagramme der Form

$$\begin{tikzcd} \Lambda_n \arrow[r, "F_n"] \arrow[d] & \Gamma_n \arrow[d] \\ \underbrace{\Lambda_0 \times \cdots \times \Lambda_0}_{n+1} \arrow[r, "F_0 \times \cdots \times F_0"] & \underbrace{\Gamma_0 \times \cdots \times \Gamma_0}_{n+1} \end{tikzcd}$$

Pullbacks sind. Dass die F_n Überdeckungen sind folgt dann daraus, dass $F_0 \times \cdots \times F_0$ welche sind. □

Definition 4.4.12. Ein Funktor der die Voraussetzungen aus dem letzten Lemma erfüllt heißt *Morita-Morphismus*

Lemma 4.4.13. *(i) Für einen Morita-Morphismus $F : \Gamma \to \Lambda$ haben wir für jedes n den kanonischen Funktor $M^n : \Gamma^{[n]} \to \Lambda$ der sich durch Komposition beliebiger Abbildungen in dem augmentierten simplizialen Gruppoid*

$$\cdots \underset{\delta_3}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} \Gamma^{[2]} \underset{\delta_2}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} \Gamma^{[1]} \underset{\delta_1}{\overset{\delta_0}{\rightrightarrows}} \Gamma \xrightarrow{F} \Lambda$$

ergibt. Dieser Funktor ist ein Morita-Morphismus.

(ii) Die Diagonalfunktoren $\Gamma \to \Gamma^{[n]}$ sind interne Äquivalenzen.

Beweis. (i) Dass die Funktoren M^n Überdeckungen sind ist klar. Weil $\Gamma \to \Lambda$ volltreu ist gilt

$$\Gamma_1 = \Gamma_0 \times_{\Lambda_0} \Lambda_1 \times_{\Lambda_0} \Gamma_0.$$

Wir rechnen nun

$$\begin{aligned} \Gamma_1^{[n]} &= \Gamma_1 \times_{\Lambda_1} \cdots \times_{\Lambda_1} \Gamma_1 \\ &= \Big(\Gamma_0 \times_{\Lambda_0} \Lambda_1 \times_{\Lambda_0} \Gamma_0\Big) \times_{\Lambda_1} \cdots \times_{\Lambda_1} \Big(\Gamma_0 \times_{\Lambda_0} \Lambda_1 \times_{\Lambda_0} \Gamma_0\Big) \end{aligned}$$

Durch umordnen sehen wir, dass dies gleich

$$\Big(\Gamma_0 \times_{\Lambda_1} \cdots \times_{\Lambda_1} \Gamma_0\Big) \times_{\Lambda_0} \Lambda_1 \times_{\Lambda_0} \Big(\Gamma_0 \times_{\Lambda_1} \cdots \times_{\Lambda_1} \Gamma_0\Big)$$

ist. Das bedeutet aber, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1^{[n]} \arrow[r, "M_1^n"] \arrow[d] & \Lambda_1 \arrow[d] \\ \Gamma_0^{[n]} \times \Gamma_0^{[n]} \arrow[r, "M_0^n"] & \Lambda_0 \times \Lambda_0 \end{tikzcd} \tag{7}$$

ein Pullback ist, also M^n volltreu ist.
(ii) Wir nehmen nun einen der n möglichen Projektionsfunktoren $P^n : \Gamma^{[n]} \to \Gamma$. Damit haben wir nun das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1^{[n]} \arrow[r, "P_1^n"] \arrow[d] & \Gamma_1 \arrow[r, "F_1"] \arrow[d] & \Lambda_1 \arrow[d] \\ \Gamma_0^{[n]} \times \Gamma_0^{[n]} \arrow[r, "P_0^n \times P_0^n"] & \Gamma_0 \times \Gamma_0 \arrow[r, "F_0 \times F_0"] & \Lambda_0 \times \Lambda_0 \end{tikzcd}$$

Das rechte Diagramm ist per Voraussetzung des Lemmas ein Pullback und das äußere Diagramm ist gleich Diagramm 7 aus Teil (i) des Lemmas. Daher ist auch das linke Diagramm ein Pullback, d.h. der Funktor P^n ist volltreu. Dieser ist aber ein Linksinverses zu der Diagonale $\Lambda \to \Lambda^{[n]}$. Nach Lemma 4.4.9 sind die Diagonalfunktoren also interne Äquivalenzen. □

Satz 4.4.14. *Für einen Morita-Morphismus $\Gamma \to \Lambda$ und eine beliebige Prägarbe in Kategorien gilt:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) &\cong \operatorname{holim}\left(\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_1^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Gamma_\bullet^{[2]}\right) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_2^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Gamma_\bullet^{[3]}\right) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_3^*}{\rightrightarrows}} \cdots \right) \\
&\cong \operatorname{holim}\left(\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_0 \twoheadrightarrow \Lambda_0) \overset{\partial_0^*}{\underset{\partial_1^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_1 \twoheadrightarrow \Lambda_1) \overset{\partial_0^*}{\underset{\partial_2^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_2 \twoheadrightarrow \Lambda_2) \overset{\partial_0^*}{\underset{\partial_3^*}{\rightrightarrows}} \cdots \right)
\end{aligned}$$

Beweis. Die Diagonalenfunktoren $\Gamma \to \Gamma^n$ ergeben eine Abbildung

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_3"'] & \Gamma^{[2]} \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] & \Gamma^{[1]} \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & \Gamma \arrow[r, "F"] & \Lambda \arrow[d, equal] \\
\cdots \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_3"'] & \Gamma \arrow[u] \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_2"'] & \Gamma \arrow[u] \arrow[r, shift left, "\delta_0"] \arrow[r, shift right, "\delta_1"'] & \Gamma \arrow[u] \arrow[r, "F"] & \Lambda
\end{tikzcd}$$

von simplizialen Gruppoiden. Diese Abbildung ist nach Lemma 4.4.13(ii) levelweise eine interne Äquivalenz, also gilt:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{holim}\left(\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_1^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Gamma_\bullet^{[2]}\right) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_2^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Gamma_\bullet^{[3]}\right) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_3^*}{\rightrightarrows}} \cdots \right) \\
&\qquad \xrightarrow{\sim} \operatorname{holim}\left(\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_1^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_2^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_3^*}{\rightrightarrows}} \cdots \right) \cong \mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)
\end{aligned}$$

Die zweite Äquivalenz folgt direkt aus dem Vertauschungssatz 4.3.6. □

Satz 4.4.15. *(i) Jeder Morita Morphismus $F : \Gamma \to \Lambda$ ist eine schwache Äquivalenz, d.h. für jeden Stacks $\mathfrak{X}$ ist der Funktor $F^* : \mathfrak{X}(\Lambda) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$ eine Äquivalenz von Bikategorien.*

(ii) Für einen Prästack $\mathfrak{X}$ ist der Funktor $F^* : \mathfrak{X}(\Lambda) \to \mathfrak{X}(\Gamma)$ volltreu d.h. er induziert Äquivalenzen auf Hom*-Kategorien.*

Beweis. Aufgrund des Satzes 4.3.5 über äquivarianten Abstieg gilt

$$\mathfrak{X}(\Lambda_\bullet) \xrightarrow{\sim} \operatorname{holim}\left(\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_1^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Gamma_\bullet^{[2]}\right) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_2^*}{\rightrightarrows}} \mathfrak{X}\left(\Gamma_\bullet^{[3]}\right) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_3^*}{\rightrightarrows}} \cdots \right)$$

Nach dem vorigen Satz 4.4.14 ist dies aber gleich $\mathfrak{X}(\Gamma_\bullet)$. Damit haben wir Teil (i) bewiesen. Die Aussage (ii) über Prästacks ergibt sich direkt aus der entsprechenden Aussage im Satz über Äquivarianten Abstieg. □

Satz 4.4.16 (Faktorisierungslemma). *Jeder Lie-Funktor $F : \Gamma \to \Omega$ der volltreu und essentiell surjektiv ist kann faktorisiert werden in der Form*

$$\begin{tikzcd} & \Lambda \arrow[dr, "H"] & \\ \Gamma \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, "F"'] & & \Omega \end{tikzcd}$$

sodass H ein Morita-Morphismus ist und G eine interne Äquivalenz.

Beweis. Wir setzen zunächst
$$\Lambda_0 := \Gamma_0 \, {}_{F_0}\!\times_s \Omega_1.$$
Dann ist $H_0 : \Lambda_0 \to \Omega_0$ gegeben durch die Target-Abbildung und per Definition von essentieller Surjektivität von F eine Überdeckung. Die Abbildung $G_0 : \Gamma_0 \to \Lambda_0$ definieren wir durch $\gamma \mapsto \big(\gamma, \mathrm{id}_{F_0(\gamma)}\big)$. Wir haben dann das kommutative Diagramm

$$\begin{tikzcd} & \Lambda_0 \arrow[dr, "H_0"] & \\ \Gamma_0 \arrow[ur, "G_0"] \arrow[rr, "F_0"'] & & \Omega_0 \end{tikzcd}$$

Mit den oberen beiden Abbildungen haben wir außerdem:

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[rr, "F_1"] \arrow[d, "{(s,t)}"'] & & \Omega_1 \arrow[d, "{(s,t)}"] \\ \Gamma_0 \times \Gamma_0 \arrow[r, "G_0 \times G_0"] & \Lambda_0 \times \Lambda_0 \arrow[r, "H_0 \times H_0"] & \Omega_0 \times \Omega_0 \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm ist weil F volltreu ist ein Pullback-Diagramm. Da der Lie-Funktor H ebenfalls volltreu werden soll, müssen wir nun $\Lambda_1 := \Lambda_0 \times_{\Omega_0} \Omega_1 \times_{\Omega_0} \Lambda_0$ als Pullback des rechten Teildiagramms definieren. Damit liefert uns die universelle Eigenschaft von Pullback-Quadraten folgendes Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1 \arrow[r, "G_1"] \arrow[d, "{(s,t)}"'] & \Lambda_1 \arrow[r, "H_1"] \arrow[d, "{(s,t)}"] & \Omega_1 \arrow[d, "{(s,t)}"] \\ \Gamma_0 \times \Gamma_0 \arrow[r, "G_0 \times G_0"] & \Lambda_0 \times \Lambda_0 \arrow[r, "H_0 \times H_0"] & \Omega_0 \times \Omega_0 \end{tikzcd}$$

in dem alle Teilquadrate Pullbacks sind. Die Gruppoid-Stuktur auf $\Omega = (\Omega_1 \rightrightarrows \Omega_0)$ induziert nun eine Gruppoid Struktur auf $\Lambda = (\Lambda_1 \rightrightarrows \Lambda_0)$ sodass G und H Lie-Funktoren werden.

Wir haben also die Faktorisierung konstruiert und per Konstruktion ist klar, dass H ein Morita-Morphismus ist. Es bleibt lediglich zu zeigen, dass G eine interne Äquivalenz ist. Dazu reicht es nach Lemma 4.4.11 zu zeigen, dass G eine volltreuen Retraktion hat.

Wir geben also eine Retraktion P direkt an: $P_0 : \Lambda_0 := \Gamma_0 \, {}_{F_0}\!\times_s \Omega_1 \to \Gamma_0$ ist die Projektion auf die erste Komponente. □

Bemerkung 4.4.17. *Das Faktorisierungslemma lässt sich einfacher beweisen, wenn man die Kategorie der Lie-Gruppoide mit der Struktur einer Kategorie von Fibranten Objekten, wie sie in [Bro73] eingeführt wurde, versieht. Dann sind die Morita-Morphismen genau die azyklischen Faserungen und unsere schwachen Äquivalenzen sind die schwachen Äquivalenzen im Sinne von Brown. Die Lokalisierung an den schwachen Äquivalenzen bzw. die Homotopiekategorie entspricht dann der Kategorie der glatten 1-Stacks. Siehe [BX06] für diesen Zugang zu Stacks und Gerben.*

Doch nun zu den Hauptaussagen dieses Kapitels:

Satz 4.4.18. *Ein volltreuer, essentiell surjektiver Funktor $F : \Gamma \to \Lambda$ ist eine schwache Äquivalenz.*

Beweis. Aufgrund des Faktorisierungslemma 4.4.16 können wir F als $F = H \circ G$ schreiben, mit einem Morita-Morphismus H, der nach Satz 4.4.15 eine schwache Äquivalenz ist, und einer internen Äquivalenz G, die nach Korollar 4.4.8 eine schwache Äquivalenz ist. Also ist auch F eine schwache Äquivalenz. □

Satz 4.4.19. *Für einen Prästack $\mathfrak{X}$ und einen volltreuen, essentiell surjektiven Lie-Funktor $F : \Gamma \to \Lambda$ ist der Pullbackfunktor $F^* : \mathfrak{X}(\Lambda) \to \mathfrak{X}(\Omega)$ ein volltreuer Funktor von Bikategorien in dem Sinn, dass er eine Äquivalenz auf* Hom-*Kategorien induziert.*

Beweis. Wir schreiben wir im Beweis zu 4.4.18 F in der Form $F = H \circ G$. Der Pullback entlang dem Lie-Funktor H ist nun nach Satz 4.4.15(ii) volltreu und der Pullback entlang G nach 4.4.8 eine Äquivalenz. Also ist auch F volltreu. □

4.5 Stackifizierung

In diesem Kapitel wollen wir nun die im letzten Kapitel bewiesenen Aussagen benutzen um zu zeigen, dass die Konstruktion der Stackifizierung durch Abschließen unter Abstieg wie wir sie in Kapitel 2.5 für 1-Stacks und in Kapitel 3.3 für Gerben verwendet haben wirklich einen Stack liefert. Dies ist wichtig, damit wir die Kategorien von äquivarianten Gerben und Bündeln mittels schwacher Äquivalenzen verstehen können.

Doch zunächst wollen wir den Beweis von Satz 2.4.3 und der analogen Aussage für Prägarben in Bikategorien nachliefern:

Satz 4.5.1. *Sei eine Topologie τ_2 feiner als τ_1. Dann ist jeder Stack (Prästack) bezüglich τ_1 auch ein Stack (Prästack) bezüglich τ_2.*

Beweis. Sei $\mathfrak{X}$ also ein Stack bezüglich τ_1 und $Y \twoheadrightarrow M$ eine Überdeckung in τ_2. Wir haben dann eine Verfeinerung $Y' \twoheadrightarrow M$ in τ_1 mit einer Abbildung $s : Y' \to Y$. Daher haben wir folgendes Diagramm von Abstiegsbikategorien:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}esc(Y \twoheadrightarrow M) \arrow[rr, "s^*"] & & \mathcal{D}esc(Y' \twoheadrightarrow M) \\ & \mathfrak{X}(M) \arrow[ul, "\kappa_Y"] \arrow[ur, "\kappa'_Y"'] & \end{tikzcd}$$

Dieses Diagramm kommutiert bis auf einen natürlichen Isomorphismus. Wir müssen nun zeigen, dass κ_Y eine Äquivalenz von Kategorien ist. Dies tun wir, indem wir zeigen, das s^*

und κ'_Y Äquivalenzen sind. Für κ'_Y ist das klar, weil $\mathfrak{X}$ ein Stack bezglich τ_1 ist. Um zu zeigen dass s^* eine Äquivalenz ist, werden wir zeigen, dass der Lie-Funktor

$$S : \check{\mathrm{C}}\,(Y') \to \check{\mathrm{C}}\,(Y)$$

essentielle surjektiv und volltreu bezüglich der Topologie τ_1 ist. Dann folgt die Aussage aus Satz 4.4.18.

Die Volltreue folgt daraus, dass das Diagramm

$$\begin{tikzcd} Y' \times_M Y' \arrow[r] \arrow[d] & Y \times_M Y \arrow[d] \\ Y' \times Y' \arrow[r] & Y \times Y \end{tikzcd}$$

offensichtlich ein Pullback ist. Die essentielle Surjektivität daraus, dass

$$Y' \times_M Y = Y'\,{}_s\!\times_{pr_1} (Y \times_M Y) \longrightarrow Y$$

als Pullback der Überdeckung $Y' \twoheadrightarrow M$ in τ_1 ebenfalls eine Überdeckung in τ_1 ist.

Für die Aussagen über Prästacks folgt analog aus 4.4.19, dass κ'_Y und s^* volltreu, sind, und damit auch κ_Y. □

Doch nun wollen wir zu Stackifizierung eines 2-Prästacks $\mathfrak{X}$ kommen. Wir erinnern nochmal daran, wie wir in 2.5 und 3.3 einen Prästack $\mathfrak{X}$ unter Abstieg abgeschlossen haben.

Definition 4.5.2. Für einen Prästack $\mathfrak{X}$ definieren wir $\hat{\mathfrak{X}}(M)$ durch:

- Objekte bestehtehen aus einer surjektiven Submersion $Y \twoheadrightarrow M$ und einem Objekt $\mathcal{G}$ in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow M)$.
- Morphismen zwischen Objekten $(Y, \mathcal{G})$ und $(Y', \mathcal{G}')$ bestehtehen aus einer gemeinsamen Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ von Y und Y' und einem Morphismus A der beiden verfeinerten Abstiegsobjekte $\mathcal{O}_Z$ und $\mathcal{O}'_Z$ in der Abstiegskategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Z \twoheadrightarrow M)$.
- Ein 2-Morphismus zwischen Morphismen (Z, A) und (Z', A') besteht aus einer verträglichen gemeinsamen Verfeinerung $W \twoheadrightarrow M$ von Z und Z' und einem 2-Morphismus g der beiden verfeinerten Morphismen A_W und A'_W in der Kategorie $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(W \twoheadrightarrow M)$.
- Wir identifizieren 2-Morphismen (W, g) und (W', g'), wenn es eine weitere gemeinsame Verfeinerung $V \twoheadrightarrow M$ von W und W' gibt die kompatibel mit alle Projektionen ist, so dass die verfeinerten Morphismen in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(V \twoheadrightarrow M)$ übereinstimmen.

Unser Ziel in diesem Kapitel wird es nun sein, folgenden Satz zu beweisen

Satz 4.5.3. *Für einen Prästack $\mathfrak{X}$ ist $\hat{\mathfrak{X}}$ ein Stack.*

Als ersten Schritt wollen wir eine Aussage über die Morphismen in $\hat{\mathfrak{X}}$ beweisen.

Definition 4.5.4. i) Wir nennen einen Morphismus $\mathcal{A} : (Y, \mathcal{G}) \to (Y', \mathcal{G}')$ in $\hat{\mathfrak{X}}(M)$ einen *stabilen Isomorphismus* wenn er auf der kanonischen gemeinsamen Verfeinerung

$$Z := Y \times_M Y'$$

definiert ist.
ii) Ein stabiler 2-Isomorphismus zwischen stabilen Isomorphismen (Z, A) und (Z, A') ist ein Morphismus in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Z \twoheadrightarrow M)$, also einer auf der kanonischen Verfeinerung $Z = Y \times_M Y'$.
iii) Zwei Objekte heißen *stabil isomorph* falls ein stabiler Isomorphismus zwischen ihnen existiert.

Jede gemeinsame verfeinerung $Z \twoheadrightarrow M$ von $Y \twoheadrightarrow M$ und $Y' \twoheadrightarrow M$ induziert einen Morphismus $Z \to Y \times_M Y'$ in die kanonische gemeinsame Verfeinerung. Der zugehörige Morphismus von Gruppoiden

$$\big(\check{\mathrm{C}}\,(Z)\big) \to \check{\mathrm{C}}\,(Y \times_M Y')$$

ist nun volltreu und essentiell surjektiv. Also folgt, da $\mathfrak{X}$ ein Prästack ist aus Satz 4.4.19 der folgende:

Satz 4.5.5. *Für zwei Objekte $\mathcal{O} = (Y, \mathcal{G})$ und $\mathcal{O}' = (Y', \mathcal{G}')$ in $\hat{\mathfrak{X}}(M)$ ist die 1-Kategorie*

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}, \mathcal{O}')$$

äquivalent zu der Unterkategorie der stabilen Isomorphismen und stabilen 2-Isomorphismen. Insbesondere sind zwei Objekte genau dann isormorph in $\hat{\mathfrak{X}}(M)$, wenn sie stabil isomorph sind.

Bemerkung 4.5.6.

- *Die stabilen Isomorphismen wurden in [MS01] eingeführt. Der Satz zeigt das unsere Kategorie äquivalent zu der dortigen ist. Wir haben jedoch eine wesentliche einfachere Komposition von Morphismen.*
- *Die in [Wal07] eingeführte Kategorie hat als Isomorphismen eine Kategorie, die zwischen unserer und der in [MS01] liegt. Diese ist also auch äquivalent.*

Als nächstes wichtiges Resultat beweisen wir eine Beschreibung von äquivarianten Objekten in $\hat{\mathfrak{X}}$. Dazu sei ein Gruppoid Γ gegeben. Für eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow \Gamma_0$ haben wir dann den *Überdeckungsgruppoiden* Γ^Y der definiert ist durch:

$$\Gamma_0^Y := Y \qquad\qquad \Gamma_1^Y := Y \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} Y$$

Da per Definition das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \Gamma_1^Y \arrow[rr] \arrow[d, "(s,t)"'] & & \Gamma_1 \arrow[d, "(s,t)"] \\ \Gamma_0^Y \times \Gamma_0^Y \arrow[rr, "\pi\times\pi"] & & \Gamma_0 \times \Gamma_0 \end{tikzcd}$$

ein Pullback ist, ist die Abbildung $\Pi : \Gamma_Y \to \Gamma$ eine Morita-Äquivalenz, also insbesondere eine schwache Äquivalenz. Die weitere Strukur auf Γ^Y wird wie üblich von der Gruppoid-Struktur auf Γ induziert. Wir haben dann:

Satz 4.5.7. *Für einen Prästack $\mathfrak{X}$ und einen Gruppoid Γ ist die Kategorie $\hat{\mathfrak{X}}(\Gamma)$ äquivalent zu der folgender Kategorie:*

- *Objekte bestehen aus einer Überdeckung $Y \twoheadrightarrow \Gamma_0$ und einem Objekt $\mathcal{G}$ in $\mathfrak{X}\left(\Gamma^Y\right)$.*
- *Morphismen zwischen $(Y, \mathcal{G})$ und $(Y', \mathcal{G}')$ bestehen aus einer gemeinsamen Verfeinerung $Z \twoheadrightarrow \Gamma_0$ von $Y \twoheadrightarrow \Gamma_0$ und $Y' \twoheadrightarrow \Gamma_0$ und einem Morphismus A der verfeinerten Objekte $\mathcal{G}_Z$ und $\mathcal{G}_{Z'}$ in $\mathfrak{X}\left(\Gamma^Z\right)$.*
- *2-Morphismen zwischen (Z, A) und (Z', A') bestehen aus einer gemeinsamen Verfeinerung $W \twoheadrightarrow \Gamma_0$ von Z und Z' die mit allen Projektionen verträglich ist, und einem Morphismus der Verfeinerungen A_Z und $A_{Z'}$ in $\mathfrak{X}\left(\Gamma^W\right)$*
- *Wir identifizieren 2-Morphismen (W, g) und (W', g') falls für eine weitere gemeinsame Verfeinerung $V \twoheadrightarrow \Gamma_0$ die 2-Morphismen g_V und g'_V in $\mathfrak{X}\left(\Gamma^V\right)$ gleich sind.*

Beweis. Wir überlegen uns zunächst, wie ein Objekt in der Kategorie $\hat{\mathfrak{X}}(\Gamma)$ aussieht: Zunächst haben wir ein Objekt in $\hat{\mathfrak{X}}(\Gamma_0)$, also eine Überdeckung $Y \twoheadrightarrow M$ und

- ein Objekt in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(Y \twoheadrightarrow \Gamma_0)$.

Als nächstes haben wir einen Morphismus der beiden nach $\hat{\mathfrak{X}}(\Gamma_1)$ zurückgezogenen Objekte. Die zurückgezogenen Objekte haben aber die Überdeckungen $Y \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \twoheadrightarrow \Gamma_1$ und $\Gamma_1 \times_{\Gamma_0} Y \twoheadrightarrow \Gamma_1$ wobei einem der Pullback entlang der Source-Abbildung und einmal entlang der Target-Abbildung gemeint ist. Wir können den Morphismus dann nach Satz 4.5.5 als stabilen Morphismus auf der kanonischen gemeinsamen Verfeinerung

$$Y \times_{\Gamma_0} \Gamma_1 \times_{\Gamma_0} Y \twoheadrightarrow \Gamma_1$$

angeben:

- Ein Morphismus der Pullbacks in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_1^Y \twoheadrightarrow \Gamma_1)$.

Die weiteren Daten und Axiome gelten dann auch jeweils auf der kanonischen Verfeinerung:

- Ein 2-Morphismus der Pullbacks in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_2^Y \twoheadrightarrow \Gamma_2)$.
- Eine Bedingung an die Pullbacks in $\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_3^Y \twoheadrightarrow \Gamma_3)$.

Wir haben also insgesamt ein Objekt in

$$\operatorname{holim}\left(\mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_0^Y \twoheadrightarrow \Gamma_0) \underset{\partial_1^*}{\overset{\partial_0^*}{\rightrightarrows}} \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_1^Y \twoheadrightarrow \Gamma_1) \underset{\partial_2^*}{\overset{\partial_0^*}{\Rrightarrow}} \mathcal{D}esc_{\mathfrak{X}}(\Gamma_2^Y \twoheadrightarrow \Gamma_2) \underset{\partial_3^*}{\overset{\partial_0^*}{\Rrightarrow}} \cdots \right)$$

Dies ist nach Satz 4.4.14 gleich $\mathfrak{X}(\Gamma^Y)$. Also haben wir die Aussage für Objekte bewiesen. Für Morphismen und 2-Morphismen folgt sie genauso. □

Bemerkung 4.5.8. *Wir haben nun im Verlaufe dieser Arbeit 3-äquivalente Beschreibungen von G-äquivarianten Objekten, insbesondere Bündelgerben gefunden, die auch alle in der Literatur verwendet werden:*

(i) *Unsere Definition 4.2.1. Diese ist meiner Meinung nach die konzeptionell saubersste. Die Formulierung für Wirkungsgruppoide endlicher Gruppen wird zum Beispiel in [GR04] benutzt.*

(ii) *Mittels einer G-äquivarianten offenen Überdeckung, als G-äquivariantes Abstiegsobjekt wie im Satz über Äquivarianten Abstieg 4.3.7. Dies wir zum Beispiel in [Mei02] zur Konstruktion von Gerben auf kompakten Lie-Gruppen verwendet. Diese Definition ist wegen den Äquivarianten Mengen sehr starr, aber wie wir im nächsten Kapitel sehen werden, lassen sich solche stets finden.*

(iii) *Wie in dem eben bewiesenen Satz 4.5.7. Dies hat den Vorteil (fast) per Definition invariant unter schwachen Äquivalenzen zu sein. Eine solche Definition von Gerben wird in [BX06] gegeben und verwendet.*

Nun zum Beweis von Satz 4.5.3, der Hauptaussage dieses Kapitels:

Beweis. Wir wollen für die Prägarbe in Kategorien $\hat{\mathfrak{X}}$ beweisen, dass sie ein Stack ist. Wir betrachten also für eine beliebige Überdeckung $Z \twoheadrightarrow M$ die Kategorie

$$\mathcal{D}esc_{\hat{\mathfrak{X}}}(Z \twoheadrightarrow M) = \hat{\mathfrak{X}}\big(\check{\mathrm{C}}\,(Z)\big).$$

Diese ist nach Satz 4.5.7 gegeben durch Objekte, Morphismen und 2-Morphismen auf Covering-Gruppoiden $\check{\mathrm{C}}\,(Z)^Y$ für Überdeckungen $Y \twoheadrightarrow Z$. Wir überlegen und also zunächst, wie ein solches Gruppoid aussieht:

$$\begin{aligned} \check{\mathrm{C}}\,(Z)_0^Y &= Y = \check{\mathrm{C}}\,(Y)_0 \\ \check{\mathrm{C}}\,(Z)_1^Y &= Y \times_Z (Z \times_M Z) \times_Z Y \\ &= Y \times_M Y = \check{\mathrm{C}}\,(Y)_1 \end{aligned}$$

Also gilt $\check{\mathrm{C}}\,(Z)^Y = \check{\mathrm{C}}\,(Y)$. Damit ist $\mathcal{D}esc_{\hat{\mathfrak{X}}}(Z \twoheadrightarrow M) = \hat{\mathfrak{X}}\big(\check{\mathrm{C}}\,(Z)\big)$ äquivalent zur Unterkategorie der Objekte von $\hat{\mathfrak{X}}(M)$ die auf Überdeckungen $Y \twoheadrightarrow Z \twoheadrightarrow M$ definiert sind. Diese Unterkategorie ist aber offensichtlich äquivalent zu $\hat{\mathfrak{X}}(M)$. □

5 Gerben auf kompakten Lie-Gruppen

5.1 Pseudo-Zusammenhänge und Klassifikation

Sie ein Wirkungsgruppoid $M//G$ gegeben. Wir wollen zunächst die Kategorie $\mathcal{G}rb(M//G)$ der Gerben ohne Zusammenhang auf $M//G$ betrachten. Um zu einer brauchbaren Klassifikation von äquivarianten Gerben auf Wirkungsgruppoiden zu kommen, muss man verschiedene Modelle der Kohomologie dieser Wirkungsgruppoide miteinander vergleichen. Wir sind an dieser Stelle speziell an dem üblichen Borel-Modell von äquivarianter Kohomologie interessiert.

Für dieses kann man stets eine eine Zuordnung:

$$DD : \mathcal{G}rb(M//G) \to \mathrm{H}^3_G(M, \mathbb{Z})$$

konstruieren. Diese Abbildung ist ein Gruppenhomomorphismus und $DD(\mathcal{G})$ wird als äquivariante Dixmier-Douady-Klasse bezeichnet. Für kompakte Lie-Gruppen G gilt dann:

Satz 5.1.1 (Brylinski [Bry00], Prop A2)**.** *Für eine kompakte Lie-Gruppe G liefert die Dixmier-Douady-Klasse ein Gruppenisomorphismus der Gruppe der Isomorphieklassen G-äquivarianter Bündelgerben und der (Borel) äquivarianten Kohomologiegruppe $H^3_G(M, \mathbb{Z})$.*

Insbesondere betrachten wir nun eine kompakte, einfache, einfach-zusammenhängende Lie-Gruppe G. Diese opereriert per Konjugation auf sich selbst. Wir können also den Wirkungsgruppoiden $G//G$ betrachten. Es ist nun bekannt, dass für die dritte äquivarianter-Kohomologiegruppe von G gilt

$$\mathrm{H}^3_G(M, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

Wir haben somit eine ausgezeichnete, G-äquivariante Gerbe $\mathcal{G}$ auf G, deren Dixmier-Douady-Klasse der Erzeuger $1 \in \mathrm{H}^3_G(M, \mathbb{Z})$ ist. Eine Konstruktion dieser Gerbe werden wir in Abschnitt (...) angeben.

Wir wollen nun auch im äquivarianten Kontext die Klasse einer Bündelgerbe $\mathcal{G} \in \mathcal{G}rb(M//G)$ durch Zusammenhangsdaten bestimmen. Im Gegensatz zum Fall von nicht-äquivarianten Gerben mit Zusammenhang kann jedoch nicht jede äquivarianter Gerbe mit einem Zusammenhang versehen werden. Mit anderen Worten: Der Vergissfunktor

$$\mathcal{G}rb^{\nabla}(M//G) \longrightarrow \mathcal{G}rb(M//G)$$

ist nicht surjektiv. Um trotzdem noch mittels einer Krümmung die Klasse berechnen zu können, wollen wir den Begriff von Zusammenhängen auf äquivarianten Gerben abschwächen. Doch zunächst eine dazu benötigte Definition.

Definition 5.1.2 ([FSW08])**.** Für zwei Bündelgerben $\mathcal{G}$ und $\mathcal{H}$ in $\mathcal{G}rb^{\nabla}(M)$ besteht ein Gerben-Bimodul aus einer 2-Form $\omega \in \Omega^2(M)$ und einem Morphismus

$$L : \mathcal{G} \to \mathcal{H} \otimes \mathcal{I}_\omega$$

von Gerben mit Zusammenhang. Ein Morphismus von Gerben-Bimoduln ist ein 2-Morphismus der 1-Morphismen in $\mathcal{G}rb^{\nabla}(M)$.

Bemerkung 5.1.3. *In der angegebenen Quelle sind Gerben-Bimoduln noch etwas allgemeiner definiert. Für unsere Zwecke reicht diese Definition jedoch aus.*

Damit erhalten wir nun die 2-Kategorien $\mathcal{G}rb^B(M)$ der Gerben mit Gerben-Bimoduln. Diese bilden natürlich einen Prägarbe in Bikategorien. Gegeben sei nun eine Gerbe $\mathcal{G}$ ohne Zusammenhang. Auf dieser seien zwei verschiedene Zusammenhänge definiert. Diese beiden Gerben mit Zusammenhang bezeichnen wir dann mit $\mathcal{G}_1$ und $\mathcal{G}_2$. Wir bilden nun die Gerbe $\mathcal{G}_2^* \otimes \mathcal{G}_1$. Diese hat triviale Dixmier-Douady-Klasse, ist also von der Form $\mathcal{I}_\omega$ mit einer 2-Form ω. Dann gilt aber $\mathcal{G}_1 \cong \mathcal{G}_2 \otimes \mathcal{I}_\omega$. Daher bildet das triviale Bündel mit flachem Zusammenhang 1_0 zusammen mit der 2-Form ω einen Gerben-Bimodul von $\mathcal{G}_1$ nach $\mathcal{G}_2$. Es sind also je zwei Zusammenhänge auf einer Gerbe in der Kategorie $\mathcal{G}rb^B$ isomorph. Da jede Gerbe über M einen Zusammenhang besitzt sind die Isomorphieklassen $\pi_0(\mathcal{G}rb^B(M))$ und $\pi_0(\mathcal{G}rb(M))$ der beiden Kategorien also gleich.

Definition 5.1.4. Eine *Pseudo-äquivariante* Gerbe auf einem Gruppoid Γ ist ein Objekt in $\mathcal{G}rb^B(\Gamma)$.

Das bedeutet also, das wir eine Gerbe $\mathcal{G}$ auf Γ_0, einen Gerben-Bimodul (L, ω) auf Γ_1, einen Morphismus von Gerben-Bimoduln μ auf Γ_2 und eine Bedingung auf Γ_3 haben. Natürlich haben wir nun den durch den Vergissfunktor induzierten Funktor

$$\mathcal{G}rb^B(\Gamma) \to \mathcal{G}rb(\Gamma).$$

Wir nennen die Zusammenhangsdaten daher auch einen Pseudo-Zusammenhang auf der unterliegenden äquivarianten Gerbe.

Nun wollen wir beschreiben wir man bei einer Pseudo-äquivarianten Gerbe $\mathcal{G}$ die Zusammenhangsdaten benutzen kann um die äquivarianter Dixmier-Douady-Klasse zu bestimmen. Dazu müsse wir jedoch erst das de-Rham-Modell für reelwertige, äquivariante Kohomologie auf einem Gruppoid Γ einführen. Zunächst bilden wir den Nerv

$$\cdots \underset{\partial_3}{\overset{\partial_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \Gamma_2 \underset{\partial_2}{\overset{\partial_0}{\substack{\longrightarrow\\\longrightarrow\\\longrightarrow}}} \Gamma_1 \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} \Gamma_0 \tag{8}$$

von Γ. Betrachte nun den Doppelkomplex:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots \\
 & & & \cdots & \Omega^3(\Gamma_0) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] \\
 & \cdots & \cdots & \Omega^2(\Gamma_1) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] & \Omega^2(\Gamma_0) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] \\
 & \cdots & \Omega^1(\Gamma_2) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] & \Omega^1(\Gamma_1) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] & \Omega^1(\Gamma_0) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] \\
\cdots & \Omega^0(\Gamma_3) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] & \Omega^0(\Gamma_2) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] & \Omega^0(\Gamma_1) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"] & \Omega^0(\Gamma_0) \arrow[l, "\partial"'] \arrow[u, "d"]
\end{tikzcd}$$

Die Randabbildungen sind $d : \Omega^k(\Gamma_n) \to \Omega^{k+1}(\Gamma_n)$, das übliche differential von Differentialformen und $\partial : \Omega^k(\Gamma_n) \to \Omega^k(\Gamma_{n+1})$, die alternierende Summe der Randabbildungen der simplizialen Mannigfaltigkeit 8. Wir bezeichnen das totale Differential dann mit $D = (-1)^n d + \partial$.

Die Kohomologiegruppen des Totalkomplexes $C^\bullet_{dR}\big(\Gamma_\bullet\big)$

$$\mathrm{H}^k_{dR}\big(\Gamma_\bullet\big) := \mathrm{H}^k(\Omega^\bullet(\Gamma_\bullet))$$

nennen wir die de-Rham-Kohomologiegruppen des Gruppoids Γ.

Definition 5.1.5. Dir Krümmung einer Pseudo-äquivarianten Gerbe $\big(\mathcal{G}, (L,\omega), \mu\big) \in \mathcal{G}rb^B(\Gamma)$ ist gegeben durch:

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{curv}: & \mathcal{G}rb^B(\Gamma) & \to & \Omega^3(\Gamma_0) \oplus \Omega^2(\Gamma_1) \\ & \Big(\mathcal{G}, (L,\omega), \mu\Big) & \mapsto & \mathrm{curv}(\mathcal{G}) + w \end{array}$$

Wir wollen uns nun überlegen, dass die Krümmung einer pseudo-äquivarianten Gerbe eine Kozykel in $C^\bullet_{dR}\big(\Gamma_\bullet\big)$ ist. Zunächst wollen wir nochmal die Daten genauer untersuchen, aus denen eine Pseudo-äquivariante Gerbe besteht:

(i) Eine Gerbe $\mathcal{G}$ auf Γ_0

(ii) Ein Gerben-Bimodul $L : \partial_0^*\mathcal{G} \to \partial_1^*\mathcal{G} \otimes \mathcal{I}_\omega$.

(iii) Ein 2-Isomorphismus $\partial_2^*(L,\omega) \otimes \partial_0^*(L,\omega) \Rightarrow \partial_1^*(L,\omega)$.

Aus der Existenz des Isomorphismus (i) folgt $\partial_0^* \,\mathrm{curv}(\mathcal{G}) = \partial_1^* \,\mathrm{curv}(\mathcal{G}) + d\omega$. Dies heißt aber $d\omega = \partial \,\mathrm{curv}(\mathcal{G})$ mit dem horizontalen Differential ∂. Aus der Existenz des 2-Isomorphismus folgt insbesondere $\partial_2^*\omega + \partial_0^*\omega = \partial_1^*\omega$. Das heißt aber $\partial(\omega) = 0$. Außerdem gilt $d\,\mathrm{curv}(\mathcal{G}) = 0$. Diese drei Gleichungen besagen genau, dass $\mathrm{curv}(\mathcal{G}) + \omega$ ein Kozykel ist. Damit liefert die Krümmung also eine Klasse $[\mathrm{curv}(\mathcal{G}) + \omega]$ in $\mathrm{H}^k_{dR}\big(\Gamma_\bullet\big)$.

Die de-Rham Kohomologiegruppen stimmen nun für Wirkungsgruppoide $\Gamma = M//G$ mit der reelwertigen, Borel äquivarianten Kohomologie $\mathrm{H}^k_G(M,\mathbb{R})$ überein, also können wir das Bild der Dixmier-Douady-Klasse $DD(\mathcal{G})$ einer äquivarianten Gerbe $\mathcal{G}$ in der Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^k_{dR}\big(M//G\big)$ betrachten. Dafür gilt nun:

Satz 5.1.6. *[BX06] Für eine äquivariante Gerbe mit Pseudo-Zusammenhang auf $M//G$ ist die Klasse der Krümmung gleich dem Bild der äquivarianten Dixmier-Douady-Klasse in reeller Kohomologie.*

In dem zitierten Papier wird auch bewiesen, dass jede äquivariante Gerbe auf einem Gruppoid mit einem Pseudo-Zusammenhang ausgestattet werden kann. Damit liefert dies ein gutes Hilfsmittel zur Berechnung der äquivarianten Dixmier-Douady-Klasse. Insbesondere auf kompakten Lie-Gruppen G, weil dort $\mathrm{H}^3_G(G,\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ keine Torsion hat.

5.2 Gerben auf SU(n)

Wir wollen nun kurz die Idee der folgenden Konstruktion geben, bevor wir beginnen diese formal durchzuführen. Diese informelle Beschreibung der Gerbe auf SU(n) stammt aus dem Papier [Mei02].

Jede Matrix $A \in \mathrm{SU}(n)$ hat (mit Vielfachheiten gezählt) genau n-Eigenwerte $\rho_1(A), \ldots, \rho_n(A)$ die in U(1)-liegen. Diese können in der Form

$$\rho_j(A) = \exp\left(2\pi i \lambda_j(A)\right) \qquad \text{mit} \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j(A) = 0$$

geschrieben werden. Durch die Forderung

$$\lambda_1(A) \geq \lambda_2(A) \geq \ldots \geq \lambda_n(A) \geq \lambda_1(A) - 1$$

ist dann auch die Reihenfolge eindeutig festgelegt. Nun betrachten wir die offenen Mengen $U_i \subset G$ der Matrizen für die i-te der Ungleichungen strikt wird. Auf der Menge

$$\mathrm{SU}(n)_{reg} = \bigcap_{i=1}^{n} U_i = \{A \in \mathrm{SU}(n) \mid \lambda_1(A) > \ldots > \lambda_n(A) > \lambda_1(A) - 1\}$$

haben wir nun die Geradenbündel $L_1, \ldots, L_n$ definiert, die über jeder Matrix durch die Eigenräume zu den Eigenwerten $\rho_1(A), \ldots, \rho_n(A)$ gegeben sind. Für $i < j$ zeigen wir dann, dass wir das Bündel $L_{i+1} \otimes \ldots \otimes L_j \to G_{reg}$ fortsetzen können zu einem Bündel $L_{ij} \to U_i \cap U_j$. Über $U_i \cap U_j \cap U_k$ für $i < j < k$ haben wir dann die Isomorphie $L_{ij} \otimes L_{jk} \cong L_{ik}$. Diese Daten definieren eine Gerbe auf $\mathrm{SU}(n)$. Die Bündel sind außerdem äquivariant und somit auch die Gerbe.

Die offenen Überdeckung Im folgenden benutzen wir ohne jedesmal explizit darauf einzugehen einige Standardfakten aus der Theorie kompatker Lie-Gruppen. Diese können in [BTD85] oder [Bou79] gefunden werden.
Wir bezeichnen die Lie-Algebra von $\mathrm{SU}(n)$ wie üblich mit $\mathfrak{su}$(n). Weiter wählen wir in der Lie-Gruppe den maximalen Torus

$$\Delta(n) := \left\{ \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix} \middle| \prod \rho_i = 1 \right\} \cong \mathrm{U}(1)^{n-1}$$

mit Lie-Algebra

$$L\Delta(n) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \middle| \sum \lambda_i = 0 \right\}$$

Wir erhalten damit die Wurzeln $\alpha_{rs} = \pi_{rr} - \pi_{ss} : L\Delta(n) \to \mathbb{R}$ für $r \neq s$. Als Menge einfacher Wurzeln wählen wir nun

$$S = \{\alpha_{12}, \ldots, \alpha_{n-1,n}\}.$$

Dies ergibt die Weyl-Kammer

$$\mathscr{C} := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n\}$$

und mit α_{1n} den Weyl-Alkoven;

$$\mathscr{A} := \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \ldots \geq \lambda_n \geq \lambda_1 - 1\}$$

Der Alkoven ist ein Simplex weil $\mathrm{SU}(n)$ halbeinfach ist. Seien nun

$$\mathscr{A}_i = \{(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \mid \lambda_1 \geq \ldots \lambda_i > \lambda_{i+1} \geq \ldots \lambda_1 - 1\}$$

für $i = 1, \ldots n$ die offenen Mengen bei denen eine Rand-Hyperebene der Kodimension 1 aus dem Alkoven entfernt wurde. Wir haben nun die stetige Abbildung $q : G \to \mathscr{A}$ die Konjugationsklassen paramterisiert, d.h. für jede Konjugationsklasse Gx existiert genau ein Element $q(x)$ in $\mathscr{A}$ sodass $\exp(q(a)) \in Gx$. Die Abbildung sei in Komponenten gegeben durch $q(A) = (\lambda_1(A), \ldots, \lambda_n(A))$. Die Eigenwerte von A sind dann offensichtlich gleich der Eigenwerte von $\exp(q(A))$, also gleich $\rho_i(A) = \exp(2\pi\lambda_i(A))$.
Mittels dieser Abbildung definieren wir nun die offenen Mengen $U_i \subset G$ als Urbilder $q^{-1}(\mathscr{A}_i)$ von den $\mathscr{A}_i$. Diese bilden eine offene Überdeckung der Lie-Gruppe, weil die $\mathscr{A}_i$ eine offene Überdeckung von $\mathscr{A}$ bilden.

Sei $G_k(\mathbb{C}^n)$ die Grassmann Mannigfaltigkeit der k-dimensionalen Unterräume im $\mathbb{C}^n$. Um für $i < j$ die Bündel L_{ij} zu konstruieren betrachten wir nun die Abbildung

$$\Phi_{ij} : U_i \cap U_j \to G_k(\mathbb{C}^n)$$

die gegeben ist durch die Projektion einer speziellen unitären Matrix auf die Summe der Eigenräume zu den Eigenwerten ρ_{i+1} bis ρ_j wobei $k = j - i$. In Formeln können wir also schreiben:

$$\Phi_{ij}(A) := \ker\Big((A - \rho_{i+1}(A)) \cdot \ldots \cdot (A - \rho_j(A))\Big)$$

Differenzierbarkeit der Φ_{ij} Wir wollen nun zeigen, dass diese Abbildungen differenzierbar sind. Dazu identifizieren wir zunächst $G_k(\mathbb{C}^n)$ mit dem Raum $P_k(\mathbb{C}^n)$ der Orthogonalprojektoren $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ mit k-dimensionalem Bild, in der Weise

$$\begin{array}{rrcl} \Psi : & P_k(\mathbb{C}^n) & \to & G_k(\mathbb{C}^n) \\ & P & \mapsto & \mathrm{Im}(P) \end{array}$$

Diese beiden Räume kann man als homogene Räume beschrieben, indem man $U(n)$ darauf operieren lässt:

$$\begin{array}{rcl} U(n) \times P_k(\mathbb{C}^n) & \to & P_k(\mathbb{C}^n) \\ (A, P) & \mapsto & AP\overline{A}^T \\ U(n) \times G_k(\mathbb{C}^n) & \to & G_k(\mathbb{C}^n) \\ (A, \mathscr{U}) & \mapsto & A(\mathscr{U}) \end{array}$$

Mit diesen Wirkungen ist Ψ äquivariant, denn

$$\mathrm{Im}\left(AP\overline{A}^T\right) = \mathrm{Im}\left(APA^{-1}\right) = A(\mathrm{Im}\, P).$$

Durch die Homogene Struktur ist die differenzierbare Struktur eindeutig gegeben. Da Ψ bijektiv und äquivariant ist, ist es somit ein Diffeomorphismus. Ausserdem sind sogar die Abbildungen Φ_{ij} bezüglich der Einschränkug auf eine $\mathrm{SU}(n)$-Wirkung auf G_k und der Konjugationswirkung auf $\mathrm{SU}(n)$ äquivariant. Denn der Eigenraum $\mathrm{Eig}\,(APA^{-1}, \lambda)$ einer Matrix APA^{-1} bezüglich dem Eigenwert λ ist gegeben durch $A \cdot \mathrm{Eig}(P, \lambda)$.

Wir müssen wegen der Diffeomorphie von $P_k(C^n)$ und $G_k(C^n)$ lediglich den Projektor $P_{ij}(A) := \Psi\big(\Phi_{ij}(A)\big)$ auf den Unterraum

$$\ker\Big(\big(A-\rho_{i+1}(A)\big)\cdot\ldots\cdot\big(A-\rho_j(A)\big)\Big)$$

beschreiben.

Es sei also $A \in \mathrm{SU}(n)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein geschlossener Pfad, der keinen Eigenwert von A trifft. Außerdem sei γ injektiv bis auf den Endpunkt. Das heißt γ umläuft jeden Punkt im Inneren genau einmal. Wir nehmen weiter an dass γ die umschlossenen Eigenwerte im positiven Umlaufsinn umläuft. Dann gilt:

Satz 5.2.1. *Der Projektor auf die Eigenräume der eingeschlossenen Eigenwerte ist gegeben durch*

$$P := -\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma (A-z)^{-1}dz$$

Beweis. Wir betrachten einen umlaufenen Eigenwert λ. Für einen Eigenwert v zu λ gilt dann:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\lambda - z}\,v &= (A-z)^{-1}\left(\frac{A-z}{\lambda-z}v\right)\\ &= (A-z)^{-1}v\end{aligned}$$

Also nach dem Residuensatz

$$\begin{aligned}P(v) &= -\frac{1}{2\pi i}\oint (A-z)^{-1}v dz\\ &= -\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{\lambda-z}\;v\;dz = v\end{aligned}$$

Nun betrachten wir einen Eigenvektor w zu einem Eigenwert μ der nicht umlaufen wird:

$$P(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{1}{\mu - z}\;w\;dz = 0.$$

Da sich $\mathbb{C}^n$ als direkte Summe der Eigenräume schreiben lässt und diese senkrecht stehen haben wir damit die Behauptung gezeigt.

□

Für $A \in U_i \cap U_j$ gilt nun:

$$\lambda_i(A) > \lambda_{i+1}(A) \geq \ldots \geq \lambda_j(A) > \lambda_{j+1}$$

Also für die Eigenwerte

$$\rho_k(A) = \exp(\lambda_k(A))$$

auch $\rho_i \neq \rho_{i+1}$ und $\rho_j \neq \rho_{j+1}$ wie in der Skizze zu erkennen ist:

Bild einfügen

Wir wählen nun einen geeigneten Pfad γ der die Eigenwerte $\rho_{i+1}, \ldots, \rho_j$ umläuft wie in der Skizze zu erkennen:

Skizze

Damit erhalten wir den Projektor $P_{ij}(A)$ dann, wie in dem Satz 5.2.1 gezeigt, als

$$P_{ij}(A) = -\frac{1}{2\pi i}\oint (A-z)^{-1}dz.$$

In einer Umgebung von A liegen nun dieselben Eigenwerte innerhalb bzw. außerhalb des Pfades γ, weil die ρ_k stetig sind. Wir können den Projektor dort also durch dieselbe Formel mit festem γ beschreiben. Diese ist offenbar differenzierbar in A, also ist die Eingangs angegebene Abbildung Φ_{ij} differenzierbar.

Bündel über G_k: Wir betrachten das triviale Bündel $\mathbb{C}^k \times G_k(\mathbb{C}^n) \to G_k(\mathbb{C}^n)$ mit kanonischer Metrik und kanonischem flachen Zusammenhang. Wir bezeichnen mit ∇ die zugehörige kovariante Ableitung. Weiter betrachten wir das tautologische Unterbündel $T \to G_k(\mathbb{C}^n)$, dessen Faser im Punkt $U \in G_k(\mathbb{C}^n)$ gleich U ist. Dieses ist ebenfalls hermitesch. Als solches können wir das zugehörige Repèrbündel betrachten und das ist gegeben durch

$$\pi : V_k \to G_k$$

wobei V_k die Stiefelmannigfaltigkeit der orthonormalen k-Tupel in $\mathbb{C}^n$ ist und π einem solchen Tupel den erzeugten Unterraum zuordnet. Die Rechtswirkung von $B \in U(k)$ auf $(v_1, \dots, v_k)$ ist gegeben durch:

$$(v_1, \dots, v_k) \cdot B := (\sum b_1^i v_i, \dots, \sum b_n^i v_i).$$

Weiterhin haben wir eine Linksoperation von $U(n)$ auf V_k durch

$$A \cdot (v_1, \dots, v_k) := (Av_1, \dots, Av_k)$$

Bezüglich dieser Abbildung ist die Abbildung π äquivariant und V_k ein homogener Raum. Auf dem Bündel $T \to G_k(\mathbb{C}^n)$ erhalten wir eine von ∇ induzierte kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$. Einen Schnitt $s : G_k \to T$ differenzieren wir bezüglich des Vektorfeldes X auf G_k indem wir ihn als Schnitt ins triviale Bündel $G_k \times \mathbb{C}^n$ auffassen, mit ∇ differenzieren und anschließend orthogonal auf das Unterbündel T projizieren Diese kovariante Ableitung $\tilde{\nabla}$ liefert einen Zusammenhang auf $T \to G_k$ und damit auch auf dem assoziierten Bündel $V_k \to G_k$.

Wir betrachten auf $U_i \cap U_j \cap U_k$ mit $i < j < k$ die Abbildungen Φ_{ij}, Φ_{jk} und Φ_{ik}. Für $A \in U_i \cap U_j \cap U_k$ gilt:

$$\Phi_{ij}(A) \oplus \Phi_{jk}(A) = \Phi_{ik}(A)$$

als Unterräume von $\mathbb{C}^n$. Diese Zerlegung ist orthogonal, da die Eigenräume orthogonal aufeinander stehen. Wir bezeichnen mit T_{ij} das entlang Φ_{ij} zurückgezogene Bündel über U_{ij}. Die oben genannte Gleichheit liefert dann eine Isomorphie

$$t_{ijk} : T_{ij} \oplus T_{jk} \to T_{ik}$$

von Bündel mit Metrik und Zusammenhang über $U_i \cap U_j \cap U_k$. Diese ist auf vierfachen Schnitten verträglich, das heißt das Diagramm:

$$\begin{tikzcd} T_{ij} \oplus T_{jk} \oplus T_{ks} \arrow[r] \arrow[d] & T_{ik} \oplus T_{ks} \arrow[d] \\ T_{ij} \oplus T_{js} \arrow[r] & T_{is} \end{tikzcd} \tag{9}$$

kommutiert.
Die U(1)-Hauptfaserbündel (bzw. Geradenbündel) L_{ij} für die Gerbe definieren wir nun als Determinantenbündel der T_{ij}. Also

$$L_{ij} := \Lambda^{i-j}(T_{ij}).$$

Mit induzierter Metrik und Zusammenhang. Wegen dem kanonischen Isomorphismus

$$\Lambda^{\dim V + \dim W}(V \oplus W) \cong \lambda^{\dim V} \otimes \lambda^{\dim W}$$

liefert $\lambda^{top}(tijk) : L_{ij} \otimes L_{jk} \to L_{ik}$ den benötigten Isomorphismus und das Diagramm (9) die Veträglichkeitsbedinung.

5.3 Bündelgerben und zentrale Erweiterungen

In diesem Kapitel wollen wir nun äquivariante Bündelgerben auf speziellen Wirkungsgruppoiden betrachten. Zunächst betrachten wir für eine Lie-Gruppe G den Gruppoid BG wie in 4.1.1. Die zugehörige simpliziale Mannigfaltigkeit hat dann die Form:

$$\cdots \underset{\partial_3}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows\rightrightarrows}} G \times G \underset{\partial_2}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows\!\!\!\rightarrow}} G \underset{\partial_1}{\overset{\partial_0}{\rightrightarrows}} pt$$

Hierbei sind die Abbildungen $\partial_0, \partial_2 : G \times G \to G$ die Projektion auf die beiden Komponenten und die Abbildung $\partial_1 : G \times G \to G$ ist die Gruppenmultiplikation.

Wir wollen nun die Kategorie $\mathcal{G}rb(BG)$ der äquivarianten Gerben (ohne Zusammenhang) auf dieser Kategorie berechnen. Eine Gerbe auf BG hat also folgende Daten und Axiomen:

(i) Einer Gerbe über dem Punkt, also der trivialen Gerbe.

(ii) Einem Endomorphismus der trivialen Gerbe über G, d.h. ein Bündel $\pi : P \to G$.

(iii) Einem Morphismus $\tilde{\mu} : \partial_0^* P \otimes \partial_2^* P \to \partial_1^* P$ über $G \times G$. Das Bündel $\partial_0^* P$ ist gleich $P \times G \to G \times G$ und analog $\partial_2^* P = G \times P \to G \times G$. Also ist $\partial_0^* P \otimes \partial_2^* P = P \times^{\mathrm{U}(1)} P$. Aufgrund der Definition des zurückgezogenen Bündels $\partial_1^* P$ als Faserprodukt ist ein Morphismus $\tilde{\mu} : \partial_0^* P \otimes \partial_2^* P \to \partial_1^* P$ daher das gleiche, wie ein kommutatives Diagramm der Form:

$$\begin{tikzcd} P \times^{\mathrm{U}(1)} P \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi\times\pi"'] & P \arrow[d, "\pi"] \\ G \times G \arrow[r] & G \end{tikzcd}$$

wobei μ die U(1)-Wirkung respektiert.

(iv) Der Kommutativität von

$$\begin{tikzcd} P \times^{\mathrm{U}(1)} P \times^{\mathrm{U}(1)} P \arrow[r, "\mu\times id"] \arrow[d, "id\times\mu"'] & P \times^{\mathrm{U}(1)} P \arrow[d, "\mu"] \\ P \times^{\mathrm{U}(1)} P \arrow[r, "\mu"] & P \end{tikzcd}$$

Es handelt sich also bei μ um eine U(1)-äquivariante, assoziative Multiplikation auf P sodass die Bündelprojektion ein multipikativer Homomorphismus ist.

Bemerkung 5.3.1. *Das Bündel* $P \times^{\mathrm{U}(1)} P = \{(p,q) \in P \times P\}/\,\mathrm{U}(1)$ *über* $G \times G$ *ist* <u>*nicht*</u> *das Tensorprodukt* $P \otimes P = \{(p,q) \in P \times P \mid \pi(p) = \pi(q)\}/\,\mathrm{U}(1)$ *über* G *das auch manchmal so bezeichnet wird.*

Wir wollen uns nun überlegen, dass es sich bei P mit der Multiplikation auch um eine Gruppe handelt. Dazu betrachten wir zunächst den Kern, also die Faser P_e über dem neutralen Element $e \in G$. Dies ist ein Monoid in U(1)-Torsoren, wobei wir hier für Monoide nicht die Existenz eines neutralen Elementes voraussetzen wollen. Dann haben wir:

Lemma 5.3.2. *Jeder Monoid in der Kategorie der* U(1)*-Torsoren ist eine Gruppe.*

Beweis. Sei also ein solcher Monoid M gegeben. Durch wählen eines Punktes $m \in M$ können wir diesen Torsor identifizieren mit der Gruppe U(1) aufgefasst als Torsor über sich selbst. Die Multiplikation ist dann eine Abbildung $\mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1) \to \mathrm{U}(1)$. $\mathrm{U}(1) \otimes \mathrm{U}(1)$ können wir mit U(1) identifizieren und sehen so, dass jede Monoid-Struktur auf dem Torsor U(1) gegeben ist durch eine Multiplikation der Form $a * b := u \cdot a \cdot b$ wobei $u \in \mathrm{U}(1)$ ein fest gewähltes Element ist und $\cdot$ die Standard-Gruppenstruktur. Diese Multiplikation hat das neutrale Element u^{-1} und das Inverse zu $a \in \mathrm{U}(1)$ ist gleich $\left(au^2\right)^{-1}$. □

Wir haben somit ein eindeutig bestimmtes neutrales Element $\hat{e}$ in P_e. Es bleibt die Existenz von Inversen für beliebige Elemente zu zeigen. Es ist klar, dass für ein beliebiges Element $p \in P_g$ die Abbildung $\mu(p, -) : P_{g^{-1}} \to P_e$ ein Morphismus von U(1)-Torsoren und daher surjektiv ist. Damit wissen wir das auch Inverse existieren.

Wenn wir nun die Abbildung $i : \mathrm{U}(1) \to P$ betrachten, die ein Element $u \in \mathrm{U}(1)$ auf das Element $\hat{e} \cdot u$ abbildet, so ist dies ein Homomorphismus. Dieser bildet U(1) bijektiv auf die Faser P_e ab. Also ist

$$\mathrm{U}(1) \xrightarrow{i} P \xrightarrow{\pi} G$$

eine kurze exakte Sequenz von Gruppen. Weiterhin haben wir

$$\mu(x, \iota(u)) = \mu(x, \hat{e} \cdot u) = \mu(x, \hat{e}) \cdot u = \mu(\hat{e}, x) \cdot u = \mu(\hat{e} \cdot u, x) = \mu(\iota(u), x)$$

Damit liegt U(1) im Zentrum von P, das heißt die Erweiterung ist zentral.

Satz 5.3.3. *Eine Bündelgerbe über* BG *ist genau eine* U(1)*-Zentrale Erweiterung von* G*.*

Nun kommen wir zu den Morphismen in der Kategorie $\mathcal{G}rb(BG)$. Ein Morphismus von äquivarianten Bündelgerben gegeben durch zentrale Erweiterungen P, Q besteht aus:

(i) Einem Endomorphismus der trivialen Gerbe über dem Punkt, also einem Bündel. Dies ist aber auch selbst wieder trivial.

(ii) Einen Morphismus α von Bündeln $P \to Q$.

(iii) Der Bedingung

$$\begin{tikzcd} P \times^{\mathrm{U}(1)} P \arrow[r] \arrow[d, "\alpha\times\alpha"'] & P \arrow[d, "\alpha"] \\ Q \times^{\mathrm{U}(1)} Q \arrow[r] & Q \end{tikzcd}$$

über Fasern $(g, h) \in G \times G$.

Die Bedinung bedeutet offenbar genau, dass α die Gruppenstruktur respektiert. Weil es sich bei α ferner um einen Bündelmorphismus handelt ist er fasertreu, d.h. die Projektionen werden respektiert. Außerdem ist er U(1)-äquivariant, d.h. die Inklusionen werden respektiert. Insgesamt haben wir ein Diagramm der Form

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dd, "\alpha"] \arrow[dr] & \\ U \arrow[ur] \arrow[dr] & & G \\ & Q \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

in Gruppen. Die Morphismen entsprechen also genau den Morphismen von zentralen Erweiterungen.

Schließlich bleiben noch die 2-Morphismen zu betrachten. Dazu seien wieder Erweiterungen P und Q gegeben und zwei Morphismen $\alpha, \alpha' : P \to Q$. Ein 2-Morphismus $\alpha \Rightarrow \alpha'$ in $\mathcal{G}rb(BG)$ besteht aus:

(i) Einem Morphismus von trivialen Bündeln über dem Punkt, also ein Element $\zeta \in \mathrm{U}(1)$.

(ii) Der Bedingung

$$\begin{tikzcd} P \times^{\mathrm{U}(1)} \mathrm{U}(1) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "id\otimes\zeta"'] & \mathrm{U}(1) \times^{\mathrm{U}(1)} P \arrow[d, "\zeta\otimes id"] \\ Q \times^{\mathrm{U}(1)} \mathrm{U}(1) \arrow[r, "\alpha'"'] & \mathrm{U}(1) \times^{\mathrm{U}(1)} Q \end{tikzcd}$$

Wegen $P \times^{\mathrm{U}(1)} \mathrm{U}(1) = P$ und $Q \times^{\mathrm{U}(1)} Q = Q$ bedeutet dies $\alpha' \cdot \zeta = \zeta \cdot \alpha$. Weil U(1) zentral liegt impliziert dies $\alpha' = \alpha$.

Wir können nun also sagen, dass 2-Morphismen nur zwischen identischen 1-Morphismen existieren und dann parametrisiert sind durch U(1).

Nachdem wir gesehen haben, dass die Kategorie $\mathcal{G}rb(BG)$ im wesentlichen der Kategorie der zentralen Erweiterungen entspricht, betrachten wir nun einen etwas komplizierteren Fall. Wirkungsgruppoide für den Fall, dass wir die Wirkung einer kompakten Lie-Gruppe G auf einer Mannigfaltigkeit haben, so dass M als Mannigfaltigkeit G-äquivariant auf einen Punkt zusammengezogen werden kann. Wir haben also eine glatte, äquivariante Homotopie zwischen der konstanten Abbildung von M auf einen Punkt $m_0 \in M$ und der Identität auf M. Insbesondere ist der Punkt m_0 ein Fixpunkt der G-Wirkung.
Wir haben dann die folgende Lie-Funktoren:

$$BG \to M//G \to BG$$

wobei die linke Abbildung durch die Inklusion des Punktes gegeben ist und die rechte durch Projektion auf den Punkt. Wir wissen dass die Komposition die Identität auf BG ist. Nun wollen wir die Kategorie $\mathcal{G}rb(M//G)$ berechnen:

Wir wissen, dass äquivariante Gerben durch die dritte ganzzahlige äquivariante Kohomologie $\mathrm{H}^3_G(M,\mathbb{Z})$ klassifiziert sind. Die G-äquivariante Homotopieäquivalenz $M \to m_0$ liefert einen Isomorphismus in äquivarianter Kohomologie. Dies sieht man sofort da die Abbildung eine gewöhnliche Homotopieäquivalenz der zugehörigen schwachen topologischen Quotienten liefert. Aufgrund dieser Tatsache wissen wir, dass jede G-äquivariante Gerbe über M isomorph zum Pullback einer Gerbe über BG ist. Also lässt sich jedes Objekt von $\mathcal{G}rb(M//G)$ mittels einer U(1)-zentralen Erweiterung P von G darstellen als:

(i) Der trivialen Gerbe $\mathcal{I}$ über M;

(ii) Das Bündel $P \times M \to G \times M$ über $G \times M$;

(iii) Der Morphismus über $G \times G \times M$ wird von der Multiplikation μ auf P induziert:

$$P \times^{\mathrm{U}(1)} P \times M \xrightarrow{\mu \times \mathrm{id}} P \times M$$

Nun kommen wir zu den Morphismen in $\mathcal{G}rb(M//G)$. Hier können wir leider nicht ganz so einfache argumentieren. Denn ein Morphismus zwischen P und Q besteht aus:

(i) Einem Bündel über M, das aber weil M zusammenziehbar ist, trivialisierbar ist.

(ii) Einem Isomorphismus von Bündeln $M \times P \to M \times Q$ über $G \times M$, d.h. eine U(1)-äquivariante Abbildung $\alpha : P \times M \to Q$ die die Fasern von P und Q respektiert.

(iii) Der Kommutatvität von

$$\begin{tikzcd} P \times^{\mathrm{U}(1)} P \times M \arrow[r, "\mu_1"] \arrow[d, "\alpha_{gm}\otimes\alpha_{hm}"'] & P \times M \arrow[d, "\alpha_{ghm}"] \\ Q \times^{U} Q \times M \arrow[r, "\mu_2"] & Q \times M \end{tikzcd}$$

über Fasern $(g,h,m) \in G \times G \times M$.

Was wir also haben ist eine Abbildung $\alpha : M \times \hat{G} \to \hat{G}'$ sodass für jedes $m \in M$ die Abbildung $\alpha_m : \hat{G} \to \hat{G}'$ ein Morphismus von zentralen Erweiterungen ist. Wir nennen eine solche Abbildung einen *M-parametrisierten Morphismus von zentralen Erweiterungen.*

Wir haben nun aber folgendes Resultat:

Lemma 5.3.4. *Für eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe G ist jeder M-parametrisierte Morphismus von zentralen Erweiterungen konstant in M.*

Beweis. Zunächst überlegen wir uns, dass sich zwei verschieden Morphismen $f, g : \hat{G} \to \hat{G}'$ von beliebigen zentralen Erweiterungen genau um einen Gruppenhomomorphismus $G \to$ U(1) untescheiden. Dies folgt mittels eines homologischen Standard-Argmumentes: Die Differenz von fg^{-1} liegt in U(1) und ausserdem weil U(1)-zentral ist ein Homomorphismus $\hat{G}$

nach U(1). Weil dieser aber auf U(1) verschwindet, faktorisiert er eindeutig auf den Quotienten $\hat{G}/\mathrm{U}(1) = G$.

Somit ist ein M-parametrisierter Morphismus von zentralen Erweiterungen eindeutig durch den Morphismus α_{m_0} in dem ausgezeichneten Punkt $m_0 \in M$ und einer glatten Abbildung $\varphi : M \to \mathrm{Hom}_{Grp}\big(G, \mathrm{U}(1)\big)$ mit $\varphi(m_0)$ gegeben. Glatt bedeute hierbei dass die assoziierte Abbildung $M \times G \to \mathrm{U}(1)$ glatt ist. Die Behauptung folgt nun daraus, dass die Gruppenhomomorphismen eine diskrete Menge bilden. Um das zu sehen wählen wir einen maximalen Torus $T \subset G$ in der kompakten Lie-Gruppe. Wir haben jetzt die Einschränkungsabbildung

$$\mathrm{Hom}_{Grp}(G, \mathrm{U}(1)) \to \mathrm{Hom}_{Grp}(T, \mathrm{U}(1)) \cong \mathbb{Z}^n \qquad n = \dim T.$$

Wir behaupten nun, dass diese Abbildung injektiv ist. Dazu sei $f \in \mathrm{Hom}_{Grp}(G, \mathrm{U}(1))$ und ein beliebiges Element $h \in G$. Dieses können wir darstellen als gtg^{-1} mit $g \in G, t \in T$. Dann gilt aber weil U(1)-abelsch ist:

$$f(h) = f\left(gtg^{-1}\right) = f(g)f(t)f(g)^{-1} = f(t)$$

Also sind Gruppenhomomorphismen durch ihre Werte auf dem Torus eindeutig festgelegt und somit die Einschränkung injektiv. □

Schließlich betrachen wir für zwei Morphismen $\alpha, \alpha' : \hat{G} \to \hat{G}'$ von zentralen Erweiterungen einen 2-Morphismus. Dieser besteht aus

(i) Einem Morphismus von trivialen Bündeln über M, d.h. eine glatte Abbildung $\varphi : M \to \mathrm{U}(1)$.

(ii) Es gilt wie oben $\alpha \cdot \varphi(m) = \varphi(m) \cdot \alpha$. Also gilt $\alpha = \alpha'$.

Insgesamt haben wir nun bewiesen:

Satz 5.3.5. *Für einen kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe G und einen G-equivariant kontrahierbaren Raum M ist die Kategorie $\mathcal{G}rb(M//G)$ bis auf Äquivalenz gegeben durch:*

- *Objekte sind* U(1)*-zentrale Erweiterungen von G*
- *1-Morphismen sind Morphismen von zentralen Erweiterungen.*
- *2-Automorphismen sind glatte Abbildungen $M \to \mathrm{U}(1)$.*

Dieses Resultat wollen wir nun noch etwas weiterentwickeln. Dazu benutzen wir die Tatsache, dass für eine einfach zusammenhängende, kompakte Lie-Gruppe keine U(1)-zentralen Erweiterungen existieren. Wir können also jede zentrale Erweiterung H von G, nach zurückziehen auf die universelle Überlagerung $\tilde{G}$ trivialisieren.

Halbeinfach????

Weil $\pi_1(G) \to \tilde{G} \to G$ eine exakte Sequenz ist, sieht man also, dass man jede zentrale Erweiterung von G mittels eines Gruppenhomomorphismus $\rho : \pi_1(G) \to \mathrm{U}(1)$ also assoziiertes Bündel

$$\tilde{G} \times^{\rho} \mathrm{U}(1) \to G$$

schreiben kann. Wir bezeichnen die äquivarianter Gerbe zu dieser zentralen Erweiterung mit $G^\rho \in \mathcal{G}rb(G//M)$. Für zwei Gruppenhomomorphismen $\rho, \mu : \pi_1(G) \to \mathrm{U}(1)$ erhalten wir, dass die assoziierte Gerbe $G^{\rho\cdot\mu}$ gleich dem Tensorprodukt der Gerben G^ρ und G^μ ist und die zum inversen Morphismus $\rho^{-1} = \overline{\rho}$ assoziierte Gerbe gleich der dualen Gerbe $(G^\rho)^*$. Wir wollen uns nun überlegen, wie ein Morphismus der beiden Gerben G^ρ und G^μ aussieht. Nach dem eben gesagten und Satz 5.3.5 sind dies also Trivialisierungen der zentralen Erweiterung

$$\mathrm{U}(1) \to \tilde{G} \times^{\rho\cdot\mu^{-1}} \mathrm{U}(1) \to G$$

eine solche Trivialisierung ist aber das gleiche wie ein Retrakt $\tilde{G} \times^{\rho\cdot\mu^{-1}} \mathrm{U}(1)$ to $\mathrm{U}(1)$. Wie wir weiter sehen, ist jeder solche Retrakt gegeben durch einen Gruppenhomomorphismus $\tilde{G} \to \mathrm{U}(1)$, der Eingeschränkt auf $\pi_1(G) \subset \tilde{G}$ gleich $\rho \cdot \mu^{-1}$ ist. Somit haben wir nun basierend auf Satz 5.3.5 folgendes Resultat:

Satz 5.3.6. *Für eine kompakte, zusammenhängende Lie-Gruppe G mit universeller Überlagerung $\tilde{G}$ und einen G-equivariant kontrahierbaren Raum M ist die Kategorie $\mathcal{G}rb(M//G)$ bis auf Äquivalenz gegeben durch:*

- *Objekte sind Gruppenhomomorphismen $\rho : \pi_1(G) \to \mathrm{U}(1)$. Wir schreiben das Objekt als G^ρ.*
- *1-Morphismen $G^\rho \to G^\mu$ sind Morphismen $\tilde{G} \to \mathrm{U}(1)$ sodass die Einschränkung auf $\pi_1(G)$ gleich $\rho \cdot \overline{\mu}$ ist.*
- *2-Automorphismen sind glatte Abbildungen $M \to \mathrm{U}(1)$.*

Mit Zusammenhang klären

5.4 Allgemeine Wirkungsgruppoide

In diesem Kapitel wollen wir herausfinden wie sich äquivariante Gerben auf Wirkungsgruppoiden lokal beschreiben lassen. Aus solchen lokale äquivarianten Gerben lässt sich wegen Satz 4.3.7 jede globale Gerbe verkleben. Wichtig ist zu wissen, dass die Situation für äquivariante Gerben nicht so einfach ist wie für gewöhnliche Gerben ohne Zusammenhang. Denn eine äquivariante Gerbe kann nicht lokal als äquvariante Gerbe trivialsiert werden.

Ein wichtiges Hilfsmittel um die lokale Situation zu studieren ist das folgende wohlbekannte Theorem [DK00, Bre72]:

Satz 5.4.1. *(Tuben-Umgebungs-Satz) Sei eine eigentliche G-Wirkung auf der Mannigfaltigkeit M gegeben. Dann existiert für jeden Orbit Gx eine invariante Umgebung U und eine G-äquivariante Homotopie $H : U \times [0,1] \to U$ mit $H_1(U) = Gx$ und $H_t|_{Gx}$ ist die Inklusion $Gx \subset U$ für alle t.*

Wir wollen hier eine kurze Skizze des Beweises geben, der volle Beweis findet sich in den angegebenen Quellen:

Beweis. Zunächst wählen wir eine G-invariante Riemannsche Metrik auf M für die G durch Isometrien wirkt. Für $x \in M$ ist der Orbit $Gx \subset M$ eine eigentliche Untermannigfaltigkeit. Sei nun $\mathrm{TN}Gx \to Gx$ das Normalenbündel von Gx in M. Weiter sei $\mathrm{TN}^r Gx \subset \mathrm{TN}Gx$ das

Unterbündel von Vektoren der Länge $\leq r$. Dann existiert ein $r > 0$ sodass die geodätische Exponentialabbildung $\exp : \mathrm{TN}^r Gx \to M$ ein Diffeomorphismus auf eine röhrenförmige Umgebung U des Orbits Gx ist. Wir definieren die Homotopie H nun durch die geodätische Retraktion $H : U \times [0,1] \to U$ gegeben durch $H_t(\exp(v), t) := \exp(tv)$. Es ist nun einfach zu sehen, dass diese Homotopie G-äquivariant ist. □

Wir setzen jetzt $S := H_1^{-1}(x)$. Ausserdem sei $G_x := \{g \in G \mid gx = x\}$ der Stabilisator von x. Dann gilt:

(i) S ist G_x-invariant, denn für $s \in S$ und $g \in G$ gilt $H_1(gs) = gH_1(s) = gs = s$.

(ii) Für $r, s \in S$ und $g \in G$ mit $gr = s$ gilt $g \in G_x$. Es gilt nämlich $gx = gH_1(r) = H_1(gr) = H_1(s) = x$.

(iii) Die Abbildung $G \times^{G_x} S \to U$ mit $[g, s] \mapsto gs$ ist ein G-äquivarianter Diffeomorphismus. Zunächst zeigen wir dass die Abbildung wohldefiniert ist. Sei also

(iv) Die Einschränkung von H auf S liefert eine G_x-äquivarianter Kontraktion von S auf den Punkt x.

Eigenschaften (i) - (iii) bedeuten zusammengefasst dass es sich bei S um ein *Slice* für die G-Wirkung handelt.

Definition 5.4.2. Wir nennen eine Umgebung U mit diesen Eigenschaften eine *Tuben-Umgebung.*

Wir haben nun aufgrund von Punkt (i) eine Wirkung des Stabilisators G_x auf S, also den Wirkungsgruppoiden $S//G_x$. Weiterhin liefert die Inklusion $S \subset U$ einen Lie Funktor:

$$S//G_x \to U//G.$$

Eigenschaft (ii) bedeutet nun offensichtlich genau, dass dieser Lie-Funktor volltreu ist. Aufgrund von Eigenschaft (*iii*) wissen wir dass die Abbildung $G \times S \to U$ gegeben durch die Multiplikation eine surjektive Submersion, also eine Überdeckung ist. Daher ist der Funktor auch essentiell surjektiv und somit eine schwache Äquivalenz. Also gilt für einen beliebigen Stack $\mathfrak{X}$:

$$\mathfrak{X}(U//G) \;\cong\; \mathfrak{X}(S//G_x)$$

Aufgrund von Eigenschaft (*iv*) erfüllt der Gruppoid $S//G$ die Vorraussetzung von Satz 5.3.5. Damit haben wir:

Satz 5.4.3. *Für eine G-Wirkung auf M sind äquivariante Bündelgerben lokal um Orbits $Gx \subset M$ gegeben durch* U(1)*-zentrale Erweiterungen von G_x.*

Wir wollen nun noch konkreter angeben, wie die G-equivariante Bündelgerbe aussieht, die wir für eine zentrale Erweiterung $\hat{G}_x$ von G_x erhalten. Dazu betrachten wir den Lie-Funktor $U//G \to Gx//G$ der gegeben ist durch die G-äquivariante Projektion H_1 von U auf den Orbit $Gx = G/G_x$ oder mittels Eigenschaft (*iii*) als:

$$U = G \times^{G_x} S \to G/G_x, \qquad [g, s] \mapsto [g]$$

Damit haben wir dann das folgende kommutierende Diagramm von Lie-Funktoren:

$$
\begin{tikzcd}
S//G_x \arrow[r] \arrow[d] & M//G \arrow[d] \\
BG_x \arrow[r] & Gx//G
\end{tikzcd}
$$

Die obere Abbildung ist eine schwache Äquivalenz wie wir gesehen hatten. Die untere ist offensichtliche auch eine, denn volltreu ist sie aufgrund der Definition des Zentralisiators G_x und essentiell surjektiv ist sie, weil die Abbildung $G \to Gx, g \mapsto gx$ ein surjektive Submersion ist. Nun hatten wir im letzen Kapitel gesehen, dass man jede Gerbe über $S//G_x$ bis auf Isomorphie als Pullback einer Gerbe entlang der Abbildung $S//G_x \to BG_x$. Mit dem Diagramm folgt daraus dass sich jede Gerbe über $Gx//G$ als Pullback einer Gerbe über $Gx//G$ schreiben lässt. Wir müssen uns also überlegen, wie wir für die zentrale Erweiterung $\hat{G}$ eine Gerbe über $G//G_x$ konstruieren können sodass der Pullback entlang der unteren Abbildung, also die Einschränkung auf den Punkt $x \in Gx$ die Erweiterung $\hat{G}$ ist. Wir faktorisieren die Abbildung also gemäß dem Faktoriserungeslemma und erhalten dann .... weiterschreiben

5.5 Gerben auf einfachen, einfach zusammenhängenden Lie-Gruppen

Wir kommen nun zum Fall einer beliebigen kompakten, einfachen, einfach zusammenhängenden Lie Gruppe G. Diese kann also gleich

$$\mathrm{SU}(n),\ \mathrm{Spin}(n),\ \mathrm{Sp}(2n)$$

oder eine der 5 exzeptionellen Gruppen

$$E_6,\ E_7,\ E_8,\ F_4 \text{ und } G_2$$

sein.

Wir betrachten nun die Konjugationswirkung der Lie-Gruppe G auf sich selbst. Wie in Kapitel ... angesprochen ist die Fundamentale, äquivariante Gerbe auf G dann dadurch definiert, dass ihre Dixmier-Douady-Klasse dem Erzeuger in der dritten ganzzahligen Kohomologie entspricht. Die Idee in unserer Konstruktion dieser Gerbe ist es nun eine offene Überdeckung von G mit Tuben-Umgebungen von Bahnen mit nicht generischem Stabilisator zu wählen. Die Einschränkung der Gerbe auf diese Umgebungen ist dann nach Satz [...] durch eine zentrale Erweiterung des Stabilisators gegeben.

Im Folgenden sei, wenn wir von der Wirkung sprechen stets die Konjugationswirkung von G auf sich selbst gemeint. Außerdem werden wir, einige Tatsachen aus der Theorie kompakter Lie-Gruppen verwenden, ohne jedes mal explizit darauf einzugehen. Diese können in [BTD85] oder [Bou79] gefunden werden.
Wir bezeichnen die Lie-Algebra von G mit $\mathfrak{g}$. Weiter wählen wir einen maximalen Torus T von G mit Lie-Algebra $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ vom Rang n. Zusätzlich wählen wir eine Menge von einfachen Wurzeln $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ und bezeichnen die zugehörige positive Weyl-Kammer mit $\mathscr{C}$. Sei α_0 das höchste Wurzel und damit der Weyl-Alkoven

$$\mathscr{A} := \{c \in \mathscr{C} \mid \alpha_0(c) \leq 1\}.$$

definiert. Dieser wird von den Hyperebenen H_i senkrecht zu den Wurzeln α_i und der zusätzlichen affinen Hyperebene H_0 mit $H_0 = \{c \in \mathscr{C} \mid \alpha_0(c) = 1\}$ begrenzt. Also haben wir einen n-dimensionalen Simplex. Wir bezeichnen die Ecken dieses Simplexes mit $\mu_0, \dots, \mu_n$ wobei μ_i die Ecke sei, die der Hyperebene H_i gegenüberliegt. Insbesondere ist $\mu_0 = 0$. Im SU(n)-Fall hatten wir gesehen, dass die Ecken des Weyl-Alkovens genau die Elemente des Zentrums sind. Im Allgemeinen bilden die Elemente des Zentrums immer noch Ecken des Alkovens, aber die Umkehrung ist falsch.

Dieser Weyl-Alkoven parametrisiert bekanntlich Konjugationsklassen in dem Sinn, dass für jede Konjugationsklasse ein eindeutiges Element $\exp(a)$ mit $a \in \mathscr{A}$ existiert. Wir haben eine sogar stetige Abbildung

$$q : G \to \mathscr{A}$$

sodass $\exp(q(a))$ dieses eindeutige Element ist.
Mittels dieser Abbildung und der Exponentialabbildung $\exp : \mathscr{A} \to G$ sehen wir, dass offene Überdeckungen von $\mathscr{A}$ in 1-1 Beziehung zu Konjugations-invarianten offenen Überdeckungen von G stehen. Wir wählen also die offenen Mengen

$$\mathscr{A}_i := \mathscr{A} \setminus H_i$$

als Komplemente der Hyperebenen. Dann ist $\mu_i \in \mathscr{A}_i$. Diese bilden eine offene Überdeckung von $\mathscr{A}$ und daher bilden die Mengen

$$U_i := q^{-1}(\mathscr{A}_i)$$

eine G-invariante offene Überdeckung von G. Dann ist

$$U_{ij} = U_i \cap U_j = q^{-1}(\mathscr{A}_i \cap \mathscr{A}_j) = q(\mathscr{A}_{ij})$$

wobei $\mathscr{A}_{ij} := \mathscr{A}_i \cap \mathscr{A}_j$ bzw. allgemeiner $\mathscr{A}_I := \bigcap_{i \in I} \mathscr{A}_i$ für $I \subset \{0, \dots, n\}$. Nun sei

$$G_i := G_{\exp(\mu_i)}$$

der Zentralisator von $\exp(\mu_i)$. Für $I \subset \{0, \dots, n\}$ bezeichnen wir das Innere der Seite des Alkovens, die von den Elementen μ_i mit $i \in I$ aufgespannt wird mit F_I. Es sei insbesondere $F_i = \{\mu_i\}$. Unsere Wahl der F_I ist so, dass alle Gruppenelemente $\exp(c)$, mit $c \in F_I$ den gleichen Zentralisator haben. Diesen nennen wir G_I. Sei nun

$$S_I := G_I . \exp(\mathscr{A}_I)$$

der Orbit von $\exp(\mathscr{A}_I)$ unter der Konjugationswirkung mit G_I. Die Mengen S_I bilden nun per Konstruktion Slices für die offenen Mengen U_I. Wir haben nun für jedes I die Homotopien

$$h_I : \mathscr{A}_I \times [0,1] \to \mathscr{A}_i$$

die durch lineare Kontraktion auf einen beliebigen Punkt $f_i \in F_i$ gegeben sind. Insbesondere sind die h_i lineare Kontraktionen auf die Ecken μ_i. Diese können wir nun offensichtlich fortsetzen zu G_I äquivarianten Kontraktionen

$$H_I : S_I \times [0,1] \to S_I$$

von S_I auf $\exp(f_i)$.

Die offenen Mengen U_I sind also Tubenumgebungen von der Bahn von f_i mit Slices S_I und Zentralisatoren G_I. Wie im letzen Kapitel gesehen, bedeutet dies dass die Gruppoide $S_I//G_I$ und $U_I//G$ schwach äquivalent sind. Außerdem gilt nach Konstruktion dass $G_{ij} \subset G_i$ für beliebige i, j oder allgemeiner $G_I \subset G_J$ für $I \subset J$. Weil in diesem Fall außerdem $\mathscr{A}_I \subset \mathscr{A}_J$ gilt, folgt auch $S_I \subset S_J$.

Wir haben nun, nach dem Satz über Äquivarianten-Abstieg 4.3.7 die folgende Äquivalenz:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}rb(M//G) &\cong \operatorname{holim}\left(\prod \mathcal{G}rb\,(U_i//G) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_1^*}{\rightrightarrows}} \prod \mathcal{G}rb\,(U_{ij}//G) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_2^*}{\Rrightarrow}} \prod \mathcal{G}rb\,(U_{ijk}//G) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_3^*}{\Rrightarrow}} \cdots\right)\\ &= \operatorname{holim}\left(\prod \mathcal{G}rb\,(S_i//G_i) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_1^*}{\rightrightarrows}} \prod \mathcal{G}rb\,(S_{ij}//G_{ij}) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_2^*}{\Rrightarrow}} \prod \mathcal{G}rb\,(S_{ijk}//G_{ijk}) \overset{\delta_0^*}{\underset{\delta_3^*}{\Rrightarrow}} \cdots\right)\end{aligned}$$

Nach dem Satz ... sind Objekte in $\mathcal{G}rb(S_I//G_I)$ aber durch zentrale Erweiterungen der G_I gegeben und Morphismen durch Morphismen zentraler Erweiterungen. Eine G-äquivariante Gerbe auf G entspricht also aus folgenden Daten:

- Für jedes i eine zentrale Erweiterung $\mathrm{U}(1) \to P_i \to G_i$.
- Für i, j ein Morphismus ϕ_{ij} von den auf G_{ij} zurückgezogenen Erweiterungen $P_i\big|_{G_{ij}}$ und $P_j\big|_{G_{ij}}$.
- Für Tripel (i, j, k) die Gleichheit der Morphismen $\varphi_{ij} \circ \varphi_{jk} = \varphi_{ik}$ auf G_{ijk} und Funktionen $g_{ijk} : S_{ijk} \to \mathrm{U}(1)$
- die Kozykelbedingung $g_{ijl} \cdot g_{jkl} = g_{ikl} \cdot g_{ijk}$ auf S_{ijkl}.

Die Funktionen g_{ijk} sind im Fall der Fundamentalen Gerbe gleich der konstanten Abbildung auf das neutrale Element. Wir wissen nun, dass die Zentralisatoren G_i immer zusammenhängend sind [DK00], Korollar 3.15. Sie sind aber im Allgemeinen nicht einfach zusammenhängend. Im Fall von $\mathrm{SU}(n)$ allerdings schon. Hier sind die Ecken des Alkovens nämlich zentral, also $G_i = G$ für alle i. Daher existieren keine zentralen Erweiterungen von G_i und die Konstruktion der fundamentalen Gerbe vereinfacht sich drastisch. Deswegen konnten wir in Kapitel (...) ein Konstruktion der fundamentalen Gerbe auf $\mathrm{SU}(n)$ geben die keine Erweiterungen beinhaltet.

Doch nun zum Allgemeinen Fall. Wir wollen die Reformulieren von zentralen Erweiterungen mittels Homomorphismen von der Fundmentalgruppe nach $\mathrm{U}(1)$ verwenden. Wir suchen also Morphismen $\pi_1(G_i) \to \mathrm{U}(1)$. Dazu werden wir nun folgende rein Lie-theoretische Konstruktion geben:

Wir betrachten zunächst für eine Ecke μ_i des Alkovens die lineare Abbildung

$$\mathfrak{t}_i \to \mathbb{R} \qquad \text{mit} \qquad t \mapsto \langle \mu_i, t \rangle$$

wobei t_i die Lie-Algebra des Torus von G_i und $\langle \ , \ \rangle$ das kanonische Skalarprodukt auf der Lie-Algebra $\mathfrak{g}$ sei. Durch Einschränken auf das Gitter

$$\Lambda_i := \ker\left(\exp^{G_i}\big|_{t_i}\right)$$

und komponieren mit der Projektion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathrm{U}(1)$ erhalten wir eine Abbildung

$$\Lambda_i \to \mathrm{U}(1).$$

Man kann nachrechnen, dass das Kowurzelgitter Γ_i von G_i im Kern dieser Abbildung liegt ([Mei02], Proposition 5.4). Wegen $\pi_1(G_i) = \Lambda_i/\Gamma_i$ ([BTD85], Theorem 7.1) gibt dies einen wohldefinierten Gruppenhomomorphismus

$$\rho_i : \pi_1(G_i) \to \mathrm{U}(1).$$

Die ρ_i liefern also die zentralen Erweiterungen der G_i.

Um Morphismen der auf G_{ij} eingeschränkten zentralen Erweiterungen G_i^ρ und G^{ρ_j} zu konstruieren, zitieren wir das folgende Lie-theoretische Lemma. Dieses basiert im wesentlichen darauf, dass die $\mu_i - \mu_j$ fix sind unter der adjungierten Wirkung von G_{ij}.

Lemma 5.5.1. *Die Differenzen $\mu_i - \mu_j$ liefern Charaktere*

$$\chi_{ij} : \qquad \widetilde{G_{ij}} \longrightarrow \mathrm{U}(1)$$

mit $\chi_{ij}\big|_{\pi_1(G_{ij})} = \rho_i \cdot \rho_j^{-1}$.

Die χ_{ij} bilden also nach ... Morphismen von zentralen Erweiterungen $G_i^\rho\big|_{G_{ij}} \to G_j^\rho\big|_{G_{ij}}$. Aus der Gleichheit $(\mu_i - \mu_j) + (\mu_j + \mu_k) = (\mu_i + \mu_k)$ folgt dann die Gleichheit

$$\chi_{ij} \cdot \chi_{jk} = \chi ik$$

auf G_{ijk}.
Zusammenfassend haben wir also:

- Die durch ρ_i gegebenen zentralen Erweiteungen G^{ρ_i} von G_i.
- Die Morphismen $\chi_{ij} : G^{\rho_i} \to G^{\rho_j}$ über G_{ij}
- Die Gleichheit $\chi_{ij} \cdot \chi_{jk} = \chi_{ik}$

Dies Daten definieren nun eine bezüglich der Konjugationswirkung äquivariante Gerbe $\mathcal{G}$ auf G. Es handelt sich bei $\mathcal{G}$ um die fundamentale Gerbe. Wir wollen dies in der Arbeit nicht im Detail nachrechnen, sondern nur kurz den Beweis skizzieren:

Die Idee ist, die Gerbe $\mathcal{G}$ mit einem Pseudo-Zusammenhang zu versehen, sodass die Krümmung dieses Pseudo-Zusammenhangs dem ganzzahligen Erzeuger in der de-Rham Kohomologiegruppe $\mathrm{H}^k_{dR}\big(G//G\big)$ entspricht. Da die Gruppe $H^3_G(M)$ keine Torsion hat, reicht dies um zu beweisen, dass es sich bei $\mathcal{G}$ um die fundamentale Gerbe handelt, wie wir uns in Abschnitt 5.1 überlegt haben.

Literatur

[Bou79] Bourbaki, N.: *Groupes et algebres de Lie, Chap. 7-8.* Hermann, 1979

[Bre72] Bredon, G.E.: *Introduction to compact transformation groups.* Academic Pr, 1972

[Bro73] Brown, K.S.: Abstract homotopy theory and generalized sheaf cohomology. In: *Transactions of the American Mathematical Society* (1973), S. 419–458

[Bry93] Brylinski, J.L.: *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization.* Springer, 1993

[Bry00] Brylinski, J.L.: Gerbes on complex reductive Lie groups. In: *Arxiv preprint math/0002158* (2000)

[BTD85] Bröcker, T. ; Tom Dieck, T.: *Representations of compact Lie groups.* Springer Verlag, 1985

[BX06] Behrend, K. ; Xu, P.: Differentiable stacks and gerbes. In: *Arxiv preprint math.DG/0605694* (2006)

[DK00] Duistermaat, J.J. ; Kolk, J.A.C.: *Lie groups.* Springer, 2000

[DS95] Dwyer, W.G. ; Spalinski, J.: Homotopy theories and model categories. In: *Handbook of algebraic topology* (1995), S. 73–126

[Dus89] Duskin, J.: An outline of a theory of higher dimensional descent. In: *Bull. Soc. Math. Bel. Serie A* 41 (1989), S. 249–277

[FSW08] Fuchs, J. ; Schweigert, C. ; Waldorf, K.: Bi-branes: Target space geometry for world sheet topological defects. In: *Journal of Geometry and Physics* 58 (2008), Nr. 5, S. 576–598

[Gaw05] Gawedzki, K.: Abelian and non-Abelian branes in WZW models and gerbes. In: *Communications in Mathematical Physics* 258 (2005), Nr. 1, S. 23–73

[GPS95] Gordon, R. ; Power, A.J. ; Street, R.: *Coherence for Tricategories.* American Mathematical Society, 1995

[GR02] Gawedzki, K. ; Reis, N.: WZW branes and gerbes. In: *Reviews in Mathematical Physics* 14 (2002), Nr. 12, S. 1281–1334

[GR04] Gawedzki, K. ; Reis, N.: Basic gerbe over non-simply connected Lie groups. In: *J. Geom. Phys* 50 (2004), Nr. 1-4, S. 28–55

[Gur06] Gurski, M.N.: *An Algebraic Theory of Tricategories*, University of Chicago, Dept. of Mathematics, Diss., 2006. – `http://www.math.yale.edu/ mg622/tricats.pdf`

[Kos74] Kostant, B.: On the definition of quantization. In: *Geometrie Symplectique et Physique Mathematique* 237 (1974)

[Lac04] Lack, S.: A Quillen model structure for bicategories. In: *K-theory* 33 (2004), Nr. 3, S. 185–197

[Lei98] Leinster, Tom: Basic Bicategories. In: *Arxiv preprint math.CT/9810017* (1998)

[Lur06] Lurie, J.: Higher topos theory. In: *Arxiv preprint math.CT/0608040* (2006)

[May92] May, J.P.: *Simplicial objects in algebraic topology.* University of Chicago Press, 1992

[Mei02] Meinrenken, E.: The basic gerbe over a compact simple Lie group. In: *Arxiv preprint math.DG/0209194* (2002)

[ML98] Mac Lane, S.: *Categories for the Working Mathematician.* Springer, 1998

[MS01] Murray, M.K. ; Stevenson, D.: Bundle gerbes: stable isomorphism and local theory. In: *Journal of the London Mathematical Society* 62 (2001), Nr. 03, S. 925–937

[Mur96] Murray, MK: Bundle gerbes. In: *Journal of the London Mathematical Society* 54 (1996), Nr. 2, S. 403

[SSW07] Schreiber, U. ; Schweigert, C. ; Waldorf, K.: Unoriented WZW models and holonomy of bundle gerbes. In: *Communications in Mathematical Physics* 274 (2007), Nr. 1, S. 31–64

[Ste00] Stevenson, D.: The geometry of bundle gerbes. In: *Arxiv preprint math/0004117* (2000)

[Vis04] Vistoli, A.: Notes on Grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. In: *Arxiv preprint math.AG/0412512* (2004)

[Wal07] Waldorf, K.: More morphisms between bundle gerbes. In: *Theory and Applications of Categories* 18 (2007), Nr. 9, S. 240–273

[War83] Warner, F.W.: *Foundations of differentiable manifolds and Lie groups.* Springer, 1983

[Wei95] Weibel, C.A.: *An introduction to homological algebra.* Cambridge Univ Pr, 1995