УДК 512.8+517.5+539.12

СУПЕРМАТРИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ И ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ

С.А. Дуплий [1], О.И. Котульская [2]

[1] *Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: http://www.math.uni-mannheim.de/~duplij
[2] *Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
Поступила в редакцию 23 февраля 2002

Рассматриваются обобщения суперматричных структур, играющих важную роль в построении суперсимметричных моделей в физике высоких энергий. Изучение супергравитаций с необратимым репером нуждается в обобщении понятий обратимости суперматрицы и супердетерминанта на суперматрицы, необратимые в каноническом смысле. В работе для необратимых суперматриц из полугруппы $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$ определяются различные типы обобщенных обратных подобно теории обобщенных обратных Мура-Пенроуза и приводятся примеры решения уравнений регулярности для конкретного случая $\mathrm{Mat}_{\Lambda_2}(1|1)$. Построен необратимый аналог супердетерминанта, который справедлив не только для группы, но и для полугруппы суперматриц.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: суперматрица, супердетерминант, грассманова алгебра, необратимость, полугруппа, обобщенные обратные, регулярность.

В настоящее время построение последовательной единой теории всех фундаментальных взаимодействий — электромагнитных, слабых, сильных и гравитационных — прочно ассоциируется [1, 2] с использованием суперсимметричных теорий [3, 4, 5]. Это позволяет разрешить или обойти такие трудности предшествующих суперсимметрии калибровочных теорий фундаментальных взаимодействий (квантовой электродинамики, квантовой хромодинамики и модели Вайнберга-Салама), как проблема иерархий, устойчивости хиггсовского бозона, а также непротиворечивое включение гравитации [6, 7] и рассмотрение процессов при планковских энергиях [8]. Дальнейший прогресс, в свою очередь, требует интенсивных поисков [9] нестандартных путей разрешения известных проблем [10], привлечения принципиально новых теоретических идей [11] и математических обобщений [12].

Первоначально математические аспекты групп и алгебр с антикоммутирующими переменными рассматривались [13, 14, 15] лишь в рамках формального правила "протаскивания знака" и предписания "о возможности обобщения всех основных понятий анализа, при котором образующие грассмановой алгебры стали бы играть роль, равноправную с вещественными или комплексными переменными" [16]. Именно в этой широко известной фразе (перепечатанной в [17, с. 9]) отразилось сознательное ограничение на дальнейшее развитие суперматематики в абстрактном направлении: "равноправие" подразумевало в качестве "супераналогов" тривиально подобные (с точностью до замены некоторых знаков с минуса на плюс и четных величин на нечетные) объекты и не позволяло интересоваться более абстрактными алгебраическими и геометрическими структурами. Тем не менее, необратимость рассматривалась в теории супермногообразий [18, 19] и суперконформной геометрии [20, 21] с полугрупповой точки зрения, в теории супероператоров [22, 23], а также в теории категорий [24, 25] и квантовых группах [26, 27] и теории кобордизмов [28]. Кроме того, ранее чисто нечетные многообразия рассматривались в [29, 30], также вводились экзотические супермногообразия с нильпотентными четными координатами [31], рассматривалась супергравитация [32] с необратимым репером. Список проблем по многообразиям с нечетными направлениями и, следовательно, так или иначе связанных с необратимостью, приведен в [33].

Основой этих и других суперсимметричных конструкций является суперматричное исчисление и линейная супералгебра [17, 34], поэтому именно здесь следует искать возможности нетривиальных обобщений (см. например, построение некоторых полугрупп суперматриц в [35, 36]). Необходимый аппарат для некоторых из таких обобщений — теория обобщенных обратных [37, 38] — был уже давно построен для обычных прямоугольных матриц (обратимость для них не определена из-за несовпадения размеров) [39, 40]. В данной работе мы применяем элементы этой теории для суперматричных структур, определяем типы обобщенных обратных, рассматриваем конкретные примеры и приводим необратимый аналог супердетерминанта.

СТРУКТУРА СУПЕРМАТРИЦ

Изложим необходимые сведения из линейной супералгебры и теории суперматриц [41, 17, 34]. *Линейным суперпространством* называется $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство $\mathbf{\Lambda}$, разложенное в прямую сумму $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_{\bar{0}} \oplus \Lambda_{\bar{1}}$. Элементы из $\Lambda_{\bar{0}}$ и $\Lambda_{\bar{1}}$ называются *однородными* (*четными* и *нечетными* соответственно) элементами. Если $a \in \Lambda_i$, где $i \in \mathbb{Z}_2$, то будем писать $\mathrm{p}(a) = \mathrm{i}$ и называть $\mathrm{p}(a)$ четностью элемента a. Любой элемент (за исключением нуля) может быть единственным образом представлен в виде $a = a_{\bar{0}} + a_{\bar{1}}$, где $a_{\mathrm{i}} \in \Lambda_i$. *Линейное подсуперпространство* — это такое $\mathbb{Z}_2$-градуированное подпространство $\mathrm{L} \subset \mathbf{\Lambda}$, что $\mathrm{L_i} = \mathrm{L} \cap \Lambda_i$. *Размерностью* $\mathbb{Z}_2$-градуированного линейного пространства называется пара $(p|q)$, где p — размерность четного и q — размерность нечетного подпространств. Будем обозначать $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство с фиксированной четность как $\mathbf{\Lambda}^{p|q}$. Тогда четные и нечетные подсуперпространства будут обозначаться $\mathbf{\Lambda}^{p|0}$ и $\mathbf{\Lambda}^{0|q}$ соответственно. Отметим, что размерность $(p|q)$ не связана с числом образующих Λ.

Пусть $\mathbf{\Lambda}^{p|q}$ и $\mathbf{\Lambda}^{m|n}$ — линейные суперпространства. На $\mathbf{\Lambda}^{p|q} \oplus \mathbf{\Lambda}^{m|n}$, $\mathbf{\Lambda}^{p|q} \otimes \mathbf{\Lambda}^{m|n}$ и $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{m|n}\right)$ структура суперпространства вводится естественным образом [34], и элементы $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{m|n}\right)$ называются *гомоморфизмами* из $\mathbf{\Lambda}^{p|q}$ в $\mathbf{\Lambda}^{m|n}$. Четные гомоморфизмы, т. е. элементы из $\mathrm{Hom}_{\bar{0}}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{m|n}\right)$, называются *морфизмами суперпространств*. Обозначим через $\mathbf{\Pi}(\mathbf{\Lambda})$ суперпространство, определенное формулами $\mathbf{\Pi}\left(\Lambda_{\bar{0}}\right) = \Lambda_{\bar{1}}$, $\mathbf{\Pi}\left(\Lambda_{\bar{1}}\right) = \Lambda_{\bar{0}}$, т. е. $\mathbf{\Pi}$ — оператор смены четности, а гомоморфизм $\mathbf{\Pi} : \mathbf{\Lambda} \to \Pi(\mathbf{\Lambda})$ называется *каноническим нечетным гомоморфизмом суперпространства* $\mathbf{\Lambda}$ в $\mathbf{\Pi}(\mathbf{\Lambda})$. *Супералгеброй* называется суперпространство A вместе с морфизмом суперпространств $\mathrm{A} \oplus \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Каждая супералгебра является также и алгеброй. *Идеал* в супералгебре A — идеал алгебры A, являющийся одновременно подсуперпространством. Для супералгебры A определяется *коммутирование* (или *скобка*) $[,] : \mathrm{A} \oplus \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ по правилу о знаках, положив $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \mathrm{ab} - (-1)^{\mathrm{p(a)p(b)}} \mathrm{ba}$. Элементы $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ называются *коммутирующими*, если $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = 0$. Супералгебра называется *коммутативной*, если любые два ее элемента коммутируют.

Обозначим через $\Lambda(n)$ внешнюю (грассманову) алгебру от n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — образующих, которые удовлетворяют соотношениям $\xi_i \xi_j + \xi_j \xi_i = 0$, $1 \leq i, j \leq n$. В частности $\xi_i^2 = 0$. Произвольный элемент $f \in \Lambda(n)$ можно единственным образом представить в виде

$$f = f_0 + \sum_{1 \leq r \leq n} \sum_{1 < i_1 < \ldots < i_r \leq n} f_{i_1 \ldots i_r} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r}, \tag{1}$$

где $f_0, f_{i_1 \ldots i_r} \in \mathbb{K}$, и $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ в вещественной случае, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ в комплексном случае. Определим на $\Lambda(n)$ структуру супералгебры, полагая $\mathrm{p}(\xi_i) = \bar{1}$. Супералгебра $\Lambda(n)$ коммутативна и называется *супералгеброй Грассмана*.

Каждой коммутативной супералгебре $\mathrm{C} = \mathrm{C}_{\bar{0}} \oplus \mathrm{C}_{\bar{1}}$ соответствует *каноническая проекция* $\varepsilon : \mathrm{C} \to \mathrm{C}/\mathrm{id}\, \mathrm{C}_{\bar{1}} = \mathrm{C}_{\bar{0}}/\left(\mathrm{id}\, \mathrm{C}_{\bar{1}}\right)^2$, где $\mathrm{id}\, \mathrm{X}$ обозначает идеал, порожденный множеством X. Пусть C — коммутативная супералгебра. Тогда элемент $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$ обратим в том случае, когда обратим $\varepsilon[\mathrm{c}]$.

Пусть A — супералгебра с единицей, M — некоторое суперпространство. *Левым действием* супералгебры A на M (или *левым* A*-действием*) называется морфизм суперпространств $\mathrm{A} \otimes M \to M$, удовлетворяющий условиям $\mathrm{a}(\mathrm{b}m) = (\mathrm{ab})m, \mathrm{a}, \mathrm{b}, 1 \in \mathrm{A}$, $m \in M, 1m = m$. *Левым (правым) модулем* над A, или левым (правым) A-модулем, называется суперпространство M, на котором задано левое (правое) A-действие. Пусть C — коммутативная супералгебра. Тогда каждый левый C-модуль можно превратить в правый C-модуль (и наооборот)

$$m\mathrm{c} = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{p}(m)\mathrm{p(c)}}\, \mathrm{c}m \\ (-1)^{\left(\mathrm{p}(m)+1\right)\mathrm{p(c)}}\, \mathrm{c}m \end{cases}, \tag{2}$$

где $\mathrm{c} \in \mathrm{C}, m \in M$. Структуры левого и правого модуля на M согласованы в следующем смысле:

$$(\mathrm{a}m)\,\mathrm{b} = \mathrm{a}(m\mathrm{b}), \quad \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{C},\ m \in M. \tag{3}$$

Множество C-гомоморфизмов из M в N является подсуперпространством $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)$ в $\mathrm{Hom}\,(M, N)$. Когда $M = N$, суперпространство $\mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M, N)$ обозначается через $\mathrm{End}_{\mathrm{C}}(M)$ называются *автоморфизмами* M, и они образуют группу $GL_{\mathrm{C}}(M)$. Пусть I-множество, представленное в виде объединения непересекающихся подмножеств $I_{\bar{0}}$ и $I_{\bar{1}}$. *Базисом* C-модуля M называется набор однородных элементов $m_i \in M$, где $i \in I$, такой, что $\mathrm{p}(m_i) = \bar{0}$ при $i \in I_{\bar{0}}$ и $\mathrm{p}(m_i) = \bar{1}$ при $i \in I_{\bar{1}}$, причем каждый элемент m однозначно записывается в виде суммы $\sum_i \mathrm{c}_i m_i$, где все $\mathrm{c}_i \in \mathrm{C}$, кроме конечного числа, равны нулю. C-модуль называется *свободным*, если в нем можно выбрать базис, соответствующий некоторому набору индексов.

Суперматричной структурой называется матричная структура с приписанной каждой строке и каждому столбцу четностью. Четность i-й строки обозначим $\mathrm{p}_{row}(i)$, четность j-столбца — $\mathrm{p}_{col}(j)$. Обычно суперматричная структура будет выбираться так, чтобы все четные строки и столбцы шли сначала, а нечетные — потом. Такая суперматричная структура будет называться *стандартной* [17]. Нестандартные суперматричные структуры (когда нечетные элементы располагаются не блоками, а по диагоналям) рассматривались, например, в [42]. Стандартную суперматричную структуру можно записывать в блочном 2×2 виде:

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где A_{ij} — матричные структуры, согласованные с делением строк и столбцов на четные и нечетные (т.е. состоящие из однородных — четных или нечетных — элементов). В случае обобщенной $\mathbb{Z}_3$ суперсимметрии [43] суперматричная структура описывается блочной 3×3 матрицей [44]. Если суперматричная структура содержит p четных и q нечетных строк и m четных и n нечетных столбцов, то размер этой структуры равен $(p|q)\times(m|n)$. *Порядком* суперматричной структуры размера $(p|q)\times(p|q)$ называется пара натуральных чисел $(p|q)$. Суперматричные структуры порядка $(p|q)$ соответствуют элементам $\operatorname{Hom}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q},\mathbf{\Lambda}^{p|q}\right)$.

Матрицей с элементами из $\mathbf{\Lambda}$ называется множество $\left\{A_{ij} \mid A_{ij}\in\mathbf{\Lambda}\right\}$, соответствующее клеткам суперматричной структуры $\mathcal{A}$. Определим на линейном пространстве матриц с элементами из $\mathbf{\Lambda}$ четность следующим образом: $\mathrm{p}(A)=\bar{0}$, если $\mathrm{p}\left(A_{ij}\right)+\mathrm{p}_{row}(i)+\mathrm{p}_{col}(j)=\bar{0}$, и $\mathrm{p}(A)=\bar{1}$, если $\mathrm{p}\left(A_{ij}\right)+\mathrm{p}_{row}(i)+\mathrm{p}_{col}(j)=\bar{1}$, для всех i, j. Относительно таким образом введенной четности линейное пространство матриц превращается в суперпространство [41]. Если суперматричная структура стандартна, то определение четности матриц (4) можно переписать в виде $\mathrm{p}(A)=\bar{0}$, если $\mathrm{p}(A_{11})=\mathrm{p}(A_{22})=\bar{0}$, $\mathrm{p}(A_{12})=\mathrm{p}(A_{21})=\bar{1}$, и $\mathrm{p}(A)=\bar{1}$, если $\mathrm{p}(A_{11})=\mathrm{p}(A_{22})=\bar{1}$, $\mathrm{p}(A_{12})=\mathrm{p}(A_{21})=\bar{0}$.

Введем на суперпространстве матриц (которое обозначим $\operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$) размера $(p|q)$ с элементами из коммутативной суперрфлгебры C структуру C-модуля, полагая

$$(M\mathrm{c})_{ij}=(-1)^{\mathrm{p(c)}\mathrm{p}_{col}(j)}M_{ij}\mathrm{c},\quad (\mathrm{c}M)_{ij}=(-1)^{\mathrm{p}(c)\mathrm{p}_{row}(i)}\mathrm{c}M_{ij}. \tag{5}$$

Эту структуру можно задать, определив для каждой пары целых чисел $(p|q)$ гомоморфизм суперaлгебр $\mathrm{C}\to\operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$, который каждому элементу $\mathrm{c}\in\mathrm{C}$ ставит в соответствие диагональную матрицу

$$\operatorname{scalar}_{p|q}(\mathrm{C})=\operatorname{diag}\left(\mathrm{c},\ldots,\mathrm{c},(-1)^{\mathrm{p(c)}}\mathrm{c},\ldots,(-1)^{\mathrm{p(c)}}\mathrm{c}\right) \tag{6}$$

со стандартной суперматричной структурой. Теперь структуру C-модуля на суперпространстве матриц размера (p,q) можно ввести по формуле

$$\mathrm{c}M=\operatorname{scalar}_{p|q}(\mathrm{C})\cdot M. \tag{7}$$

Из ассоциативности матричного умножения следует, что

$$(\mathrm{c}A)\,B=\mathrm{c}\,(AB)\,,\ (A\mathrm{c})\,B=A\,(\mathrm{c}B)\,,\ A\,(B\mathrm{c})=(AB)\,\mathrm{c} \tag{8}$$

при $A,B\in\operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$, поэтому суперaлгебра $\operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$ является C-алгеброй. Пусть $A=\left(A_{ij}\right)$ — матрица размера $(p,q)\times(m,n)$ с элементами из суперпространства $\mathbf{\Lambda}$. *Супертранспонированной* к суперматрице $\mathcal{A}=\left(A_{ij}\right)\in\operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$ назовем матрицу с элементами

$$\left(\mathcal{A}^{\mathrm{st}}\right)_{ij}=(-1)^{\left(\mathrm{p}_{row}(i)+\mathrm{p}_{col}(j)\right)\left(\mathrm{p}(X)+\mathrm{p}_{row}(i)\right)}A_{ji}=(-1)^{\left(\mathrm{p}_{row}(i)+\mathrm{p}_{col}(j)\right)\left(\mathrm{p}(X)+\mathrm{p}_{col}(j)\right)}A_{ji}, \tag{9}$$

а суперматричная структура определяется естественным образом [41, 45]. В формуле (9) четности $\mathrm{p}_{row}(i)$, $\mathrm{p}_{col}(j)$ берутся согласовано с суперматричной структурой матрицы $\mathcal{A}$. Если суперматричная структура имеет стандарный вид, то формула (9) дает

$$\mathcal{A}^{\mathrm{st}}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{\mathrm{st}}=\begin{pmatrix}A_{11}^T & A_{12}^T\\ -A_{21}^T & A_{22}^T\end{pmatrix}, \tag{10}$$

если $\mathrm{p}(\mathcal{A})=\bar{0}$, и

$$\mathcal{A}^{\mathrm{st}}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{\mathrm{st}}=\begin{pmatrix}A_{11}^T & -A_{12}^T\\ A_{21}^T & A_{22}^T\end{pmatrix}, \tag{11}$$

если $\mathrm{p}(\mathcal{A})=\bar{1}$.

Дважды супертранспонированная матрица имеет вид $\left(\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{\mathrm{st}}\right)^{\mathrm{st}}=\begin{pmatrix}A_{11} & -A_{12}\\ -A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, т. е. $(\mathrm{st})^2\neq\mathrm{id}$, и порядок супертранспонирования равен четырем: $(\mathrm{st})^4=\mathrm{id}$. Для любых двух суперматриц выполняются соотношения $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^{\mathrm{st}}=\mathcal{A}^{\mathrm{st}}+\mathcal{B}^{\mathrm{st}}$, $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{\mathrm{st}}=(-1)^{\mathrm{p}(\mathcal{A})\mathrm{p}(\mathcal{B})}\mathcal{B}^{\mathrm{st}}\mathcal{A}^{\mathrm{st}}$. Оператор смены четности $\mathbf{\Pi}$ действует по формуле [45]

$$\mathcal{A}^{\mathbf{\Pi}}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{\mathbf{\Pi}}=\begin{pmatrix}A_{22} & A_{21}\\ A_{12} & A_{11}\end{pmatrix}, \tag{12}$$

являясь гомоморфизмом $(\mathcal{A}\mathcal{B})^{\mathbf{\Pi}}=\mathcal{A}^{\mathbf{\Pi}}\mathcal{B}^{\mathbf{\Pi}}$, при этом $\mathrm{p}\left(\mathcal{A}^{\mathbf{\Pi}}\right)=\mathrm{p}(\mathcal{A})+\bar{1}$ и $\mathbf{\Pi}^2=\mathrm{id}$, $\mathbf{\Pi}\circ\mathrm{st}\circ\mathbf{\Pi}=(\mathrm{st})^3$. Супераналог эрмитового сопряжения $(*)$ определяется формулой

$$\mathcal{A}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}^{*}=\begin{pmatrix}A_{11}^{*} & A_{12}^{*}\\ A_{21}^{*} & A_{22}^{*}\end{pmatrix}, \tag{13}$$

где a_{ik}^{*} означает инволюцию в $\mathbf{\Lambda}$ [17]. Любую суперматрицу $\mathcal{A}$ можно записать как сумму числовой и нильпотентной части (*body* и *soul* [46]) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{num} + \mathcal{A}_{nil}$, где $\mathcal{A}_{num} = \varepsilon_{body}(\mathcal{A}) = \mathcal{A}|_{\xi_i=0}$. Если $\mathrm{rank} A_{(num)11} = p$, и $\mathrm{rank} A_{(num)22} = q$, то $\mathcal{A}$ называется регулярной [41].

В общем случае множество суперматриц $\mathfrak{M} = \{\mathcal{A}\}$ (4) с элементами из $\mathbf{\Lambda}$ образуют полугруппу [47, 48] относительно обычного матричного умножения $(\cdot)$, обозначаемую $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q) \overset{def}{=} \{\mathfrak{M};\cdot\}$ [17]. Множество $\mathfrak{M}^{inv}$ обратимых элементов из $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$ (для которых уравнение $AX = I$ имеет решение) образуют группу $\mathrm{GMat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q) \overset{def}{=} \left\{\mathfrak{M}^{inv};\cdot\right\}$. Рассмотрим подробнее полугрупповую структуру суперматриц из $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$ [19]. Обозначим

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{M}' &= \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q) \,|\, \varepsilon(A_{11}) \neq 0\}, &(14)\\
\mathfrak{M}'' &= \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q) \,|\, \varepsilon(A_{22}) \neq 0\}, &(15)\\
\mathfrak{J}' &= \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q) \,|\, \varepsilon(A_{11}) = 0\}, &(16)\\
\mathfrak{J}'' &= \{\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q) \,|\, \varepsilon(A_{22}) = 0\}. &(17)
\end{aligned}
$$

Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{J}' = \mathfrak{M}'' \cup \mathfrak{J}''$ и $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{J}' = \varnothing$, $\mathfrak{M}'' \cap \mathfrak{J}'' = \varnothing$, поэтому $\mathfrak{M}^{inv} = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$. Для множеств (очевидно необратимых) суперматриц $\mathfrak{J}'$ (16) и $\mathfrak{J}''$ (17) использовались обозначения "полугруппы $\mathrm{G}'\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$ и $\mathrm{G}''\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$" [17, сс. 89,97], хотя в английском переводе они уже появились, как "subgroups $\mathrm{G}'\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$ and $\mathrm{G}''\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$" [49, pp. 95,103], что, по-видимому, и обусловило незамеченность нетривиальных полугрупповых свойств суперматричных структур (см. также [50, 51]). Так, подмножество $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}' \cap \mathfrak{J}''$ представляет идеал полугруппы $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$. Более того, отметим, что [19]: 1) Множества $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ и $\mathfrak{J}''$ представляют собой изолированные идеалы полугруппы $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$. 2) Множества $\mathfrak{M}^{inv}$, $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ — фильтры полугруппы $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$. 3) Множества $\mathfrak{M}'$ и $\mathfrak{M}''$ представляют подполугруппы полугруппы $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$, при этом $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{inv} \bigcup \mathfrak{J}'$ и $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}^{inv} \bigcup \mathfrak{J}''$, где соответствующие изолированные идеалы $\mathfrak{K}' = \mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{M}^{inv} = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{J}''$ и $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{M}'' \setminus \mathfrak{M}^{inv} = \mathfrak{M}'' \cap \mathfrak{J}'$. 4) Идеал $\mathfrak{J}$ полугруппы $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$ представлен множеством $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}' \cup \mathfrak{K}' = \mathfrak{J}'' \cup \mathfrak{K}''$. Более подробно идеальная структура различных полугрупп суперматриц изложена в [36, 35, 52] (свойства полугрупп обычных матриц см. в [53, 54, 55]).

ОБОБЩЕННЫЕ ОБРАТНЫЕ

Рассмотрим суперматрицу $\mathcal{A}$ общего положения размерности $(p|q)$ (см. (4) и [17, 34]) и ее свойства обратимости. Обычная обратная суперматрица $\mathcal{A}^{-1}$ определяется как решение уравнений

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{I}, \qquad \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A} = \mathcal{I} \tag{18}$$

(см. напр. [17, 34]). Для необратимых (квадратных) суперматриц мы построим супераналог теории Мура-Пенроуза [56, 39] и теории обобщенных обратных [57, 58], применявшиеся при рассмотрении прямоугольных обычных матриц, для которых соотношения (18) вообще не имеют смысла. В суперсимметричном случае класс необратимых суперматриц возникает еще и по другой причине: из-за нильпотентности элементов грассмановой алгебры. Поскольку в суперсимметричных теориях применяются в основном квадратные суперматрицы вида (4), мы ограничимся только их рассмотрением и необратимостью за счет возможной нильпотентности элементов, а не за счет размеров.

Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$, тогда суперматрицу $\mathcal{A}^{-} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}}(p|q)$ назовем 1-*инверсной* (*внутренней инверсной* [57], *псевдообратной* [59], *обобщенной обратной* [39]) к $\mathcal{A}$, если выполняется

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^{-}\mathcal{A} = \mathcal{A} \quad \text{(1-инверсная)}. \tag{19}$$

Суперматрицы, имеющие 1-инверсную, назовем *регулярными*. Это понятие было введено еще Нейманом [60] для колец и является "наименьшим" ослаблением обратимости 18. Уравнения для блоков 1-инверсной суперматрицы имеют вид

$$
\begin{aligned}
A_{11}A_{11}^{-}A_{11} + A_{11}A_{12}^{-}A_{21} + A_{12}A_{21}^{-}A_{11} + A_{12}A_{22}^{-}A_{21} &= A_{11}, &(20)\\
A_{11}A_{11}^{-}A_{12} + A_{11}A_{12}^{-}A_{22} + A_{12}A_{21}^{-}A_{12} + A_{12}A_{22}^{-}A_{22} &= A_{12}, &(21)\\
A_{21}A_{11}^{-}A_{11} + A_{21}A_{12}^{-}A_{21} + A_{22}A_{21}^{-}A_{11} + A_{22}A_{22}^{-}A_{21} &= A_{21}, &(22)\\
A_{21}A_{11}^{-}A_{12} + A_{21}A_{12}^{-}A_{22} + A_{22}A_{21}^{-}A_{12} + A_{22}A_{22}^{-}A_{22} &= A_{22}. &(23)
\end{aligned}
$$

Если известна одна 1-инверсная суперматрица $\mathcal{A}^{-}$ для регулярной $\mathcal{A}$, то остальные 1-инверсные имеют следующий вид [39]

$$\mathcal{A}^{-} + \mathcal{V} - \mathcal{A}^{-}\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-} \text{ или } \mathcal{A}^{-} + (\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-}\mathcal{A})\mathcal{V} + \mathcal{W}(\mathcal{I} - \mathcal{A}^{-}\mathcal{A}\mathcal{A}^{-}), \tag{24}$$

где $\mathcal{V}, \mathcal{W}$ — произвольные $(p|q)$ суперматрицы. Суперматрицу $\mathcal{A}^\wedge \in \mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$ назовем 2-*инверсной* (*внешней инверсной* [57]) к $\mathcal{A}$, если выполняется

$$\mathcal{A}^\wedge \mathcal{A} \mathcal{A}^\wedge = \mathcal{A}^\wedge \quad \text{(2-инверсная)}\,. \tag{25}$$

Суперматрицы, имеющие 2-инверсную называются *антирегулярными*. Уравнения для блоков 2-инверсной суперматрицы имеют вид

$$A_{11}^\wedge A_{11} A_{11}^\wedge + A_{11}^\wedge A_{12} A_{21}^\wedge + A_{12}^\wedge A_{21} A_{11}^\wedge + A_{12}^\wedge A_{22} A_{21}^\wedge = A_{11}^\wedge, \tag{26}$$

$$A_{11}^\wedge A_{11} A_{12}^\wedge + A_{11}^\wedge A_{12} A_{22}^\wedge + A_{12}^\wedge A_{21} A_{12}^\wedge + A_{12}^\wedge A_{22} A_{22}^\wedge = A_{12}^\wedge, \tag{27}$$

$$A_{21}^\wedge A_{11} A_{11}^\wedge + A_{21}^\wedge A_{12} A_{21}^\wedge + A_{22}^\wedge A_{21} A_{11}^\wedge + A_{22}^\wedge A_{22} A_{21}^\wedge = A_{21}^\wedge, \tag{28}$$

$$A_{21}^\wedge A_{11} A_{12}^\wedge + A_{21}^\wedge A_{12} A_{22}^\wedge + A_{22}^\wedge A_{21} A_{12}^\wedge + A_{22}^\wedge A_{22} A_{22}^\wedge = A_{22}^\wedge. \tag{29}$$

Суперматрица называется 1-2-*инверсной* (просто *инверсной* или *слабой обобщенной обратной*) к $\mathcal{A}$ и обозначается $\mathcal{A}^+$, если она одновременно удовлетворяет (19) и (25), т. е.

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^+\mathcal{A} = \mathcal{A}, \qquad \mathcal{A}^+\mathcal{A}\mathcal{A}^+ = \mathcal{A}^+ \quad \text{(инверсная)}\,, \tag{30}$$

и ее блоки удовлетворяют восьми уравнениям (20)–(29). Суперматрицы, имеющие единственную инверсную, образуют инверсную подполугруппу [61] полугруппы $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$. Общее решение уравнения (25) имеет вид [39]

$$\mathcal{A}^\wedge = \mathcal{P}\,(\mathcal{Q}\mathcal{A}\mathcal{P})^\wedge\,\mathcal{Q}, \tag{31}$$

где $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ — произвольные идемпотентые суперматрицы из $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$. Каждая слабая обобщенная обратная (1-2 инверсная) суперматрица $\mathcal{A}^+$ может быть выражена через любую фиксированную 1-инверсную $\mathcal{A}^-$ следующим образом [62] (ср. 24)

$$\mathcal{A}^+ = \left(\mathcal{A}^- + \mathcal{V} - \mathcal{A}^-\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{A}^-\right)\mathcal{A}\left(\mathcal{A}^- + \mathcal{V} - \mathcal{A}^-\mathcal{A}\mathcal{V}\mathcal{A}\mathcal{A}^-\right), \tag{32}$$

где $\mathcal{V}$ — произвольная суперматрица из $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$. Суперматрица $\mathcal{X}$, которая удовлетворяет

$$(\mathcal{A}\mathcal{X})^* = \mathcal{A}\mathcal{X} \quad \text{(3-инверсная) или} \quad (\mathcal{X}\mathcal{A})^* = \mathcal{X}\mathcal{A} \quad \text{(4-инверсная)} \tag{33}$$

называется 3-*инверсной* или 4-*инверсной* соответственно (суперэрмитово сопряжение определено в (13)). Уравнения (19), (25) и (33) назовем *суперсимметричными уравнениями Пенроуза* [56, 57], тогда суперматрицу $\mathcal{X}$, которая является инверсной и одновременно удовлетворяет дополнительным требованиям (33), т.е. является 1-2-3-4 инверсной, назовем *суперинверсной Мура-Пенроуза* $\mathcal{A}^\dagger$ (ср. [63, 56])

$$\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} = \mathcal{A}, \quad \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{A}^\dagger, \quad \left(\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\right)^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger, \quad \left(\mathcal{A}^\dagger\mathcal{A}\right)^* = \mathcal{A}^\dagger\mathcal{A} \quad \text{(суперинверсная Мура-Пенроуза).} \tag{34}$$

Перечислим некоторые свойства суперинверсной Мура-Пенроуза для различных комбинаций суперматриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ [57, 64]

$$(\mathcal{A}+\mathcal{B})^\dagger = \mathcal{A}^\dagger + \mathcal{B}^\dagger, \quad \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger\mathcal{B}\mathcal{B}^\dagger = \mathcal{B}\mathcal{B}^\dagger\mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger, \quad (\mathcal{A},\mathcal{B})^\dagger(\mathcal{A},\mathcal{B}) = \begin{pmatrix} \mathcal{A}\mathcal{A}^\dagger & 0 \\ 0 & \mathcal{B}^\dagger\mathcal{B} \end{pmatrix}. \tag{35}$$

Если заменить условие регулярности (19) на более общее

$$\mathcal{A}^k\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{A}^k \quad (1^k\text{-инверсная})\,, \tag{36}$$

то суперматрица $\mathcal{A}^{dr} = \mathcal{X}$ называется *инверсной Дразина* [65]. Слабая обобщенная обратная суперматрица $\mathcal{X} = \mathcal{A}^+$, (супер)коммутирующая с $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}\mathcal{X} = (-1)^{\mathrm{p}(\mathcal{A})\mathrm{p}(\mathcal{X})}\,\mathcal{X}\mathcal{A}$, называется *групповой инверсной* суперматрицей $\mathcal{A}^{gr}$ (ср. [37]).

Если произведение $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ обратимо, то для вычисления инверсной Мура-Пенроуза $\mathcal{A}^\dagger$ можно применить супермодификацию стандартной формулы [57]

$$\mathcal{A}^\dagger = (\mathcal{A}^*\mathcal{A})^{-1}\,\mathcal{A}^*, \tag{37}$$

где операция $(*)$ определена в (13). Если суперматрица $\mathcal{A}$ раскладывается на произведение $\mathcal{A} = \mathcal{S}\mathcal{R}$ суперматриц того же формата, то инверсную Мура-Пенроуза $\mathcal{A}^\dagger$ можно вычислить по формуле [37]

$$\mathcal{A}^\dagger = \mathcal{R}^\dagger\mathcal{S}^\dagger = \mathcal{R}^*\,(\mathcal{R}\mathcal{R}^*)^{-1}\,(\mathcal{S}^*\mathcal{S})^{-1}\,\mathcal{S}^*, \tag{38}$$

если произведения $\mathcal{R}\mathcal{R}^*$ и $\mathcal{S}^*\mathcal{S}$ обратимы. В нильпотентном случае произведение $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ может быть необратимо, и поэтому решение следует искать непосредственным разложением по грассмановой алгебре и решением соответствующих компонентных уравнений. Рассмотрим в качестве примера простейший случай $\mathrm{Mat}_{\Lambda_2}(1|1)$.

ВЫЧИСЛЕНИЯ В КОНЕЧНОМЕРНОЙ ГРАССМАНОВОЙ АЛГЕБРЕ

Пусть $\mathcal{A} = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}_2}(1|1)$. В $\mathbf{\Lambda}_2$ конкретный вид элементов есть

$$a = a_0 + a_{12}\xi_1\xi_2, \;\; b = b_0 + b_{12}\xi_1\xi_2, \;\; \alpha = n_1\xi_1 + n_2\xi_2, \;\; \beta = m_1\xi_1 + m_2\xi_2, \tag{39}$$

где все коэффициеты — в $\mathbb{K}$. Запишем суперматрицу $\mathcal{A}$ как сумму числовой и нильпотентной части

$$\mathcal{A}_{num} = \mathcal{A}_0 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 \\ 0 & b_0 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

$$\mathcal{A}_{nil} = \begin{pmatrix} 0 & n_1 \\ m_1 & 0 \end{pmatrix}\xi_1 + \begin{pmatrix} 0 & n_2 \\ m_2 & 0 \end{pmatrix}\xi_2 + \begin{pmatrix} a_{12} & 0 \\ 0 & b_{12} \end{pmatrix}\xi_1\xi_2 = \mathcal{A}_1\xi_1 + \mathcal{A}_2\xi_2 + \mathcal{A}_{12}\xi_1\xi_2, \tag{41}$$

здесь $\mathcal{A}_0$,$\mathcal{A}_{12}$ — четные диагональные суперматрицы, а $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ — нечетные антидиагональные суперматрицы [17]. Отметим отличие $\mathcal{A}_{12}$ как суперматрицы от A_{12} как блока из (4).

Разложение (39) позволяет ввести на $\mathbb{K}$ структуру полугруппы, обозначим ее $\mathbf{S}$, которая изоморфна $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}_2}(1|1)$ и ее действие определяется умножением суперматриц. Из (39) следует, что полугруппа $\mathbf{S}$ является 8-параметрической над $\mathbb{K}$, и ее элемент записывается в виде $\mathbf{S} \ni \mathbf{s} = \mathbf{s}(a_0, b_0, a_{12}, b_{12}, n_1, n_2, m_1, m_2)$. Умножение в $\mathbf{S}$ имеет следующий вид

$$\begin{aligned} & \mathbf{s}(a_0, b_0, a_{12}, b_{12}, n_1, n_2, m_1, m_2) * \mathbf{s}\left(a'_0, b'_0, a'_{12}, b'_{12}, n'_1, n'_2, m'_1, m'_2\right) \\ = \; & \mathbf{s}(a_0a'_0, b_0b'_0, a_{12}a'_0 + a_0a'_{12} + n_1m'_2 - n_2m'_1, b_{12}b'_0 + b_0b'_{12} + m_1n'_2 - m_2n'_1, \\ & a_0n'_1 + n_1b'_0, a_0n'_2 + n_2b'_0, m_1a'_0 + b_0m'_1, m_2a'_0 + b_0m'_2). \end{aligned} \tag{42}$$

Видно, что двусторонние нуль и единица полугруппы $\mathbf{S}$ определяются формулами

$$\mathbf{z} = \mathbf{s}(0,0,0,0,0,0,0,0), \qquad \mathbf{e} = \mathbf{s}(1,1,0,0,0,0,0,0), \tag{43}$$

а двусторонними идеалами являются объединения элементов вида

$$\mathbf{s}(0,0,a_{12},b_{12},n_1,n_2,m_1,m_2) \quad \text{и} \quad \mathbf{s}(0,0,a_{12},b_{12},0,0,0,0). \tag{44}$$

Найдем решение уравнений регулярности (19)–(25) и явный вид слабых обобщенных обратных для простейшего случая двумерной $\mathbf{\Lambda}_2$ грассмановой алгебры и (1|1)-мерных суперматриц. Пусть в уравнениях регулярности

$$\mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{A}, \tag{45}$$

$$\mathcal{X}\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{X} \tag{46}$$

искомая суперматрица $\mathcal{A}^+ = \mathcal{X}$ имеет вид $\mathcal{X} = \begin{pmatrix} x & \varkappa \\ \gamma & y \end{pmatrix}$. Уравнение $\mathcal{A}\mathcal{X}\mathcal{A} = \mathcal{A}$ (45) для внутренней инверсной $\mathcal{A}^- = \mathcal{X}$ сводится к системе

$$axa + \alpha\gamma a + a\varkappa\beta + \alpha y\beta = a, \tag{47}$$

$$ax\alpha + a\varkappa b + \alpha yb = \alpha, \tag{48}$$

$$\beta xa + b\gamma a + by\beta = \beta, \tag{49}$$

$$\beta x\alpha + b\gamma\alpha + \beta\varkappa b + byb = b, \tag{50}$$

которую мы будем решать в $\mathbf{\Lambda}_2$, где

$$x = x_0 + x_{12}\xi_1\xi_2, \;\; y = y_0 + y_{12}\xi_1\xi_2, \;\; \varkappa = r_1\xi_1 + r_2\xi_2, \;\; \gamma = s_1\xi_1 + s_2\xi_2. \tag{51}$$

Тогда из (47)–(50) получаем систему уравнений на коэффициенты

$$a_0(a_0x_0 - 1) = 0, \tag{52}$$

$$2a_0a_{12}x_0 + a_0^2x_{12} + a_0(n_1s_2 - n_2s_1) + a_0(r_1m_2 - r_2m_1) + y_0(n_1m_2 - n_2m_1) = a_{12}, \tag{53}$$

$$(a_0x_0 + b_0y_0)\,n_1 + a_0b_0r_1 = n_1, \tag{54}$$

$$(a_0x_0 + b_0y_0)\,n_2 + a_0b_0r_2 = n_2, \tag{55}$$

$$(a_0x_0 + b_0y_0)\,m_1 + a_0b_0s_1 = m_1, \tag{56}$$

$$(a_0x_0 + b_0y_0)\,m_2 + a_0b_0s_2 = m_2, \tag{57}$$

$$b_0(b_0y_0 - 1) = 0, \tag{58}$$

$$2b_0b_{12}y_0 + b_0^2y_{12} - b_0(n_1s_2 - n_2s_1) - b_0(r_1m_2 - r_2m_1) - x_0(n_1m_2 - n_2m_1) = b_{12}, \tag{59}$$

Уравнение $\mathcal{XAX} = \mathcal{X}$ (46) для внешней инверсной $\mathcal{A}^{\wedge} = \mathcal{X}$ сводится к системе

$$\begin{aligned} xax + \varkappa\beta x + x\alpha\gamma + \varkappa b\gamma &= x, & (60)\\ xa\varkappa + x\alpha y + \varkappa by &= \varkappa, & (61)\\ \gamma ax + y\beta x + yb\gamma &= \gamma, & (62)\\ \gamma a\varkappa + y\beta\varkappa + \gamma\alpha y + yby &= y, & (63)\end{aligned}$$

которую мы будем также решать в $\mathbf{\Lambda}_2$. Используя разложения (39),(51), получаем систему уравнений на коэффициенты

$$x_0 (x_0 a_0 - 1) = 0, \tag{64}$$

$$2x_0 x_{12} a_0 + x_0^2 a_{12} + x_0 (r_1 m_2 - r_2 m_1) + x_0 (n_1 s_2 - n_2 s_1) + b_0 (r_1 s_2 - r_2 s_1) = x_{12}, \tag{65}$$

$$(a_0 x_0 + b_0 y_0) r_1 + x_0 y_0 n_1 = r_1, \tag{66}$$

$$(a_0 x_0 + b_0 y_0) r_2 + x_0 y_0 n_2 = r_2, \tag{67}$$

$$(a_0 x_0 + b_0 y_0) s_1 + x_0 y_0 m_1 = s_1, \tag{68}$$

$$(a_0 x_0 + b_0 y_0) s_2 + x_0 y_0 m_2 = s_2, \tag{69}$$

$$y_0 (y_0 b_0 - 1) = 0, \tag{70}$$

$$2y_0 y_{12} b_0 + y_0^2 b_{12} - y_0 (r_1 m_2 - r_2 m_1) - y_0 (n_1 s_2 - n_2 s_1) - a_0 (r_1 s_2 - r_2 s_1) = y_{12}, \tag{71}$$

Основными уравнениями, которые определяют тип решения, являются (52) и (58). Из них следуют 4 случая выбора числовой части диагональных элементов:

$$a_0 = 0, \quad b_0 = 0, \tag{72}$$

$$a_0 = 0, \quad b_0 \neq 0, \tag{73}$$

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 = 0, \tag{74}$$

$$a_0 \neq 0, \quad b_0 \neq 0. \tag{75}$$

В первом — наиболее тривиальном — случае (72) система (52)–(59) совместна только при $\mathcal{A} = 0$ и $\mathcal{A}^{-}$ — любом, а система (64)–(71) совместна при $\mathcal{A}^{\wedge} = 0$ и $\mathcal{A}$ — любом. Последний случай (75) — стандартный [17] и отвечает обратимой суперматрице $\mathcal{A}$, поэтому единственным решением (45)–(46) является обратная суперматрица

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{a_0} + \left(\dfrac{n_1 m_2 - n_2 m_1}{a_0^2 b_0} - \dfrac{a_{12}}{a_0^2}\right)\xi_1\xi_2 & -\dfrac{n_1\xi_1 + n_2\xi_2}{a_0 b_0} \\ -\dfrac{m_1\xi_1 + m_2\xi_2}{a_0 b_0} & \dfrac{1}{b_0} + \left(\dfrac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{a_0 b_0^2} - \dfrac{b_{12}}{b_0^2}\right)\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{76}$$

Поскольку второй (73) и третий (74) случай симметричны, мы рассмотрим только один из них (73). Из (52)–(53) следует, что x — произвольно. Уравнения (53) и (58) дают $y_0 = 1/b_0$ и условие на элементы суперматрицы $\mathcal{A}$

$$(n_1 m_2 - n_2 m_1) = b_0 a_{12}. \tag{77}$$

Поскольку это условие сохраняется при умножении, если $a_0 = 0$ (разность преобразованных правой и левой частей пропорциональна $a_0 a_0' \left(m_1 n_2' - m_2 n_1'\right)$), то суперматрицы, удовлетворяющие (77) образуют подполугруппу $\mathbf{S}_{nm}$ полугруппы $\mathrm{Mat}_{\mathbf{\Lambda}_2}(1|1)$. При $a_{12} = 0$ условие (77) определяет подполугруппу антитреугольных суперматриц [36, 35], играющих важную роль в необратимый обобщениях суперконформной симметрии [20, 21] и супероператоров [22, 23].

Уравнения (54)–(57) не определяют искомых параметров r_1, r_2, s_1, s_2 из-за $a_0 = 0$, а представляют собой тождества, поскольку $y_0 b_0 = 1$. Из (59) и (77) следует решение для y_{12}

$$y_{12} = x_0 \frac{a_{12}}{b_0} - \frac{b_{12}}{b_0^2} + \frac{n_1 s_2 - n_2 s_1}{b_0} + \frac{r_1 m_2 - r_2 m_1}{b_0}. \tag{78}$$

Следовательно, в случае (73) определяется только один элемент y, а остальные произвольные, т.е. решение для $\mathcal{A}^{-}$ является 6-параметрическим.

Аналогично, решение уравнения (46) для $\mathcal{A}^{\wedge}$ в промежуточном случае (73) является 4-параметрическим с произвольными параметрами r_1, r_2, s_1, s_2 и

$$x_0 = 0, \quad x_{12} = b_0 (r_1 s_2 - r_2 s_1), \quad y_0 = \frac{1}{b_0},$$

а y_{12} определяется формулой (78), но без первого слагаемого. Таким образом, совместным решением двух уравнений (45)-(46) $\mathcal{X} = \mathcal{A}^{-} = \mathcal{A}^{\wedge}$ (которые определяют слабое обобщенное обратное [57]) будет суперматрица вида

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} b_0\left(ut - wv\right)\xi_1\xi_2 & u\xi_1 + v\xi_2 \\ w\xi_1 + t\xi_2 & \dfrac{1}{b_0} + \left(-\dfrac{b_{12}}{b_0^2} + \dfrac{n_1 t - n_2 w}{b_0} + \dfrac{u m_2 - v m_1}{b_0}\right)\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{79}$$

где $u, t, w, v \in \mathbb{K}$ — свободные параметры. Рассмотрим возможные нетривиальные решения уравнения $\mathcal{E}_L\mathcal{A} = \mathcal{A}$, т. е. когда $\mathcal{E}_L$ (левая единица для суперматрицы $\mathcal{A}$) не является единичной $(p|q)$-суперматрицей

$$\mathcal{I} = \begin{pmatrix} I_{p\times p} & 0_{p\times q} \\ 0_{q\times p} & I_{q\times q} \end{pmatrix}.$$

Из умножения (42) следует, что классификация решений для (1|1)-суперматрицы над $\mathbf{\Lambda}_2$ (см. разложение (39)) совпадает с (72)–(75). Очевидно, что обратимый случай (75) дает тривиальное решение $\mathcal{E}_L = \mathcal{I}$. Поскольку (73) и (74) симметричны, ограничимся рассмотрением (73). В подполугруппе $\mathbf{S}_{nm}$ суперматриц, удовлетворяющих (77), имеем 4-параметрическое решение

$$\mathcal{E}_L\left(t, u, v, w\right) = \begin{pmatrix} t + u\xi_1\xi_2 & \dfrac{1-t}{b_0}\left(n_1\xi_1 + n_2\xi_2\right) \\ v\xi_1 + w\xi_2 & 1 + \left(\dfrac{n_1}{b_0}w - \dfrac{n_2}{b_0}v\right)\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}, \tag{80}$$

где $u, t, w, v \in \mathbb{K}$. Видно, что $\mathcal{E}_L\left(1, 0, 0, 0\right) = \mathcal{I}$. При $t = 0$ левая единица для суперматрицы $\mathcal{A}$ становится необратимой. Без условия (77) левой единицей является 3-параметрическое решение $\mathcal{E}_L\left(1, u, v, w\right)$, которое обратимо всегда. Правая единица для конкретной суперматрицы $\mathcal{A}$, удовлетворяющая $\mathcal{A}\mathcal{E}_R = \mathcal{A}$, при условии (77) (в подполугруппе $\mathbf{S}_{nm}$) равна

$$\mathcal{E}_R\left(t, u, v, w\right) = \begin{pmatrix} t + u\xi_1\xi_2 & v\xi_1 + w\xi_2 \\ \dfrac{1-t}{b_0}\left(m_1\xi_1 + m_2\xi_2\right) & 1 - \left(\dfrac{m_1}{b_0}w - \dfrac{m_2}{b_0}v\right)\xi_1\xi_2 \end{pmatrix}. \tag{81}$$

Отсюда следует, что левая и правая единицы полугруппы $\mathbf{S}_{nm}$ совпадают и определяются одним свободным параметром

$$\mathcal{E}_L\left(1, u, 0, 0\right) = \mathcal{E}_R\left(1, u, 0, 0\right) = \begin{pmatrix} 1 + u\xi_1\xi_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{82}$$

Однако в $\mathbf{S}_{nm}$ имеются подполугруппы, в которых единицы недиагональны и определяются двумя параметрами. Действительно, из (42) следует, что условия пропорциональности коэффициентов нечетных элементов $\dfrac{n_1}{n_2} = k$ и $\dfrac{m_1}{m_2} = l$ сохраняются по отдельности при умножении, т. е. определяют подполугруппы $\mathbf{S}_{nm}^k \subset \mathbf{S}_{nm}$ и $\mathbf{S}_{nm}^l \subset \mathbf{S}_{nm}$. Левая единица в $\mathbf{S}_{nm}^k$ имеет вид

$$\mathcal{E}_L^k\left(u, w\right) = \begin{pmatrix} 1 + u\xi_1\xi_2 & 0 \\ w\left(k\xi_1 + \xi_2\right) & 1 \end{pmatrix}, \tag{83}$$

а правая единица в $\mathbf{S}_{nm}^l$ определяется формулой

$$\mathcal{E}_L^l\left(u, w\right) = \begin{pmatrix} 1 + u\xi_1\xi_2 & w\left(l\xi_1 + \xi_2\right) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{84}$$

Видно, что единица пересечения $\mathbf{S}_{nm}^k \cap \mathbf{S}_{nm}^l$ является однопараметрической и равна (82).

НЕОБРАТИМЫЙ АНАЛОГ СУПЕРДЕТЕРМИНАНТА

Для суперматрицы общего вида (4) введем *обобщенные дополнения Шура*

$$S_{11} = A_{22} - A_{21}A_{11}^{+}A_{12},\;\; S_{12} = A_{21} - A_{22}A_{12}^{+}A_{11},\;\; S_{21} = A_{12} - A_{11}A_{21}^{+}A_{22},\;\; S_{22} = A_{11} - A_{12}A_{22}^{+}A_{21} \tag{85}$$

и *обобщенные проекторы*

$$P_{11} = I - A_{11}A_{11}^{+}, \quad Q_{11} = I - A_{11}^{+}A_{11}, \quad P_{22} = I - A_{22}A_{22}^{+}, \quad Q_{22} = I - A_{22}^{+}A_{22}, \tag{86}$$

удовлетворяющие соотношениям ортогональности

$$P_{11}A_{11}=A_{11}Q_{11}=A_{11}^{+}P_{11}=Q_{11}A_{11}^{+}=0,\quad P_{22}A_{22}=A_{22}Q_{22}=A_{22}^{+}P_{22}=Q_{22}A_{22}^{+}=0. \tag{87}$$

Существование обобщенных дополнений Шура S_{11} и S_{22} следует из

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{+} & 0 \\ 0 & A_{22}^{+} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_{22} & 0 \\ 0 & S_{11} \end{pmatrix}.$$

Кроме того, S_{11} и S_{22} состоят из четных элементов, как это следует из (85). Понятно, что для обычных квадратных матриц, состоящих из четных элементов применим обычный детерминант [17]. В обратимом случае $A_{11}^{+}=A_{11}^{-1}$, $A_{22}^{+}=A_{22}^{-1}$, $S_{11}=S_{11}^{(0)}$, $S_{22}=S_{2}^{(0)}$, где

$$S_{11}^{(0)}=A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12},\qquad S_{22}^{(0)}=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} \tag{88}$$

— стандартные дополнения Шура, проекторы зануляются $P_{11}=Q_{11}=Q_{22}=P_{22}=0$, поэтому P_{11}, Q_{11}, P_{22}, Q_{22} представляют собой меру необратимости суперматрицы $\mathcal{A}$. Чтобы вычислить суперобратную Мура-Пенроуза $\mathcal{A}^{\dagger}$, воспользуемся методом блочных матриц [66]. Для элемента A_{22} определим *ранговое дополнение* $J\left(A_{22}\right)$ по формуле

$$J\left(A_{22}\right)=\left(I-\left(A_{21}Q_{11}\right)\left(A_{21}Q_{11}\right)^{\dagger}\right)\cdot S_{11}\cdot\left(I-\left(P_{11}A_{12}\right)^{\dagger}\left(P_{11}A_{12}\right)\right) \tag{89}$$

Разложим суперматрицу $\mathcal{A}$ на сумму

$$\mathcal{A}=\mathcal{A}_{(+)}+\mathcal{A}_{(-)}=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{pmatrix}, \tag{90}$$

где $\mathcal{A}_{(+)}$ и $\mathcal{A}_{(-)}$ отвечают четной и нечетной составляющей суперматрицы $\mathcal{A}$ как супероператора [17]. Тогда суперобратная Мура-Пенроуза может быть найдена из формулы

$$\mathcal{A}^{\dagger}=J^{\dagger}\left(\mathcal{A}_{(+)}\right)+J^{\dagger}\left(\mathcal{A}_{(-)}\right), \tag{91}$$

где $J\left(\mathcal{A}_{(\pm)}\right)$ — ранговые дополнения (89) элементов $\mathcal{A}_{(\pm)}$ в расширенной суперматрице $\begin{pmatrix} \mathcal{A}_{(+)} & \mathcal{A}_{(-)} \\ \mathcal{A}_{(-)} & \mathcal{A}_{(+)} \end{pmatrix}$.

Супердетерминант обратимой блочной суперматрицы $\mathcal{A}$ (4) (A_{11} и A_{22} обратимы) определяется формулой [67, 68]

$$\operatorname{sdet}\mathcal{A}=\det A_{11}\left(\det S_{11}^{(0)}\right)^{-1}=\det S_{22}^{(0)}\left(\det A_{22}\right)^{-1}. \tag{92}$$

Супердетерминант матрицы Якоби при замене переменных для функций на грассмановой алгебре называют березинианом [41, 34], а супердетерминант диагональной суперматрицы $\mathcal{A}$ называют также градуированным детерминантом [69, 70].

Здесь мы рассмотрим возможный аналог супердетерминанта при некотором ослаблении обратимости, а именно мы предположим, что A_{11} и A_{22} являются регулярными, т. е. существуют инверсные A_{11}^{+} и A_{22}^{+} как решения уравнений

$$A_{11}A_{11}^{+}A_{11}=A_{11},\qquad A_{11}^{+}A_{11}A_{11}^{+}=A_{11}^{+}, \tag{93}$$

$$A_{22}A_{22}^{+}A_{22}=A_{22},\qquad A_{22}^{+}A_{22}A_{22}^{+}=A_{22}^{+}. \tag{94}$$

Отсюда следует, что величины $E_{11}=A_{11}A_{11}^{+}$, $E_{22}=A_{22}A_{22}^{+}$ являются идемотентами $E_{11}^{2}=E_{11}$, $E_{22}^{2}=E_{22}$ и удовлетворяют условиям регулярности

$$E_{11}E_{11}^{+}E_{11}=E_{11},\qquad E_{11}^{+}E_{11}E_{11}^{+}=E_{11}^{+}, \tag{95}$$

$$E_{22}E_{22}^{+}E_{22}=E_{22},\qquad E_{22}^{+}E_{22}E_{22}^{+}=E_{22}^{+}. \tag{96}$$

В обратимом случае они совпадают с единичными матрицами $E_{11}=E_{22}=I$. Поскольку A_{11}, A_{22}, E_{11}, E_{22} являются обычными матрицами с четными элементами, то тем же соотношениям удовлетворяют и детерминанты $\det A_{11}$, $\det A_{22}$, $\det E_{11}$, $\det E_{22}$. Следует обратить внимание на отсутствие сокращений в необратимом случае как для (93)–(96), так и для детерминантов.

Построение необратимого аналога (для обычных матриц см. [71, 72, 73]) супердетерминанта sdet_{+} будем проводить таким образом, чтобы предельным случаем всегда был обратимый (92), поэтому различие между ними будет пропорционально проекторам (86). Роль единичной матрицы будет играть E_{22} . Тогда вместо $\operatorname{sdet}\mathcal{I} = 1$ постулируем

$$\operatorname{sdet}_{+}\begin{pmatrix} E_{22} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix} = \operatorname{sdet}\mathcal{I}_{E_{22}} = \det E_{22}\cdot\det E_{22}^{+} = \det A_{22}\cdot\det A_{22}^{+}, \tag{97}$$

где последнее равенство следует из (94). Такое же равенство можно принять (по аналогии с обратимым случаем) и для произвольной блочно-треугольной суперматрицы с произвольным недиагональным блоком

$$\operatorname{sdet}_{+}\begin{pmatrix} A_{11} & X \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det A_{11}\cdot\det A_{22}^{+}. \tag{98}$$

Отсюда следует, что необратимый аналог супердетерминанта sdet мультипликативен для блочно-треугольных суперматриц. Поэтому, следуя модифицированному для необратимого случая алгоритму Гаусса (см. напр. [59] и [17, с. 101]), умножим произвольную суперматрицу $\mathcal{A}$ на блочно-треугольную суперматрицу $\mathcal{M} = \begin{pmatrix} E_{22} & 0 \\ -A_{22}^{+}A_{11} & E_{22} \end{pmatrix}$, и рассмотрим выражение

$$\mathcal{I}_{E_{22}}\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{I}_{E_{22}} = \mathcal{I}_{E_{22}}\begin{pmatrix} A_{11}E_{22} - A_{12}A_{22}^{+}A_{21} & A_{12}E_{22} \\ A_{21}E_{22} - E_{22}A_{21} & A_{22}E_{22} \end{pmatrix}\mathcal{I}_{E_{22}}.$$

Пользуясь тем, что E_{22} идемпотент и $E_{22}\left(A_{21}E_{22} - E_{22}A_{21}\right)E_{22} = 0$, получаем произведение блочно-диагональных и блочно-треугольных суперматриц

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{E_{22}}\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{I}_{E_{22}} &= \begin{pmatrix} E_{22}A_{11}E_{22} - E_{22}A_{12}A_{22}^{+}A_{11}E_{22} & E_{22}A_{12}E_{22} \\ 0 & E_{22}A_{22}E_{22} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{22} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{22} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{22} & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{22} & A_{12} \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{22} & 0 \\ 0 & E_{22} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Тогда для необратимого аналога супердетерминанта можно принять

$$\operatorname{sdet}_{+}^{(22)}\mathcal{A} = \det S_{22}\cdot\det A_{22}^{+} = \det\left(A_{11} - A_{12}A_{22}^{+}A_{21}\right)\cdot\det A_{22}^{+}, \tag{99}$$

а также $1 \Leftrightarrow 2$ симметричный вариант

$$\operatorname{sdet}_{+}^{(11)}\mathcal{A} = \det A_{11}\cdot\det S_{11}^{+} = \det A_{11}\cdot\det\left(A_{22} - A_{21}A_{11}^{+}A_{12}\right)^{+}, \tag{100}$$

причем в обратимом случае, как это следует из (93)–(96), они совпадают между собой и равны обычному супердетерминанту $\operatorname{sdet}_{+}^{(11)}\mathcal{A} = \operatorname{sdet}_{+}^{(22)}\mathcal{A} = \operatorname{sdet}\mathcal{A}$. Отметим, что в (99) один детерминант применяется к матрице $p \times p$, а другой — к матрице $q\times q$, поэтому нельзя воспользоваться мультипликативностью обычного детерминанта, однако при $p = q$ можно получить необратимое суперобобщение стандартной *формулы Шура* [59]

$$\operatorname{sdet}_{+}^{(22)}\mathcal{A} = \det\left(A_{11}A_{22}^{+} - A_{12}A_{22}^{+}A_{21}A_{22}^{+}\right), \tag{101}$$

позволяющей свести вычисление супердетерминанта $(p|p)$ суперматрицы к вычислению обычного детерминанта $p \times p$ матрицы, состоящей из четных элементов, если известна инверсная для A_{22} матрица A_{22}^{+}. Из (99) видно, что выполняется свойство

$$\operatorname{sdet}_{+}^{(22)}\left(\mathcal{I}_{E_{22}}\mathcal{A}\mathcal{I}_{E_{22}}\right) = \operatorname{sdet}_{+}^{(22)}\mathcal{A}$$

(и $1 \Leftrightarrow 2$ симметричное). Кроме того, мультипликативность выполняется и для необратимых блочно-треугольных суперматриц. С другой стороны, воспользуемся аналогом разложения Гаусса необратимой суперматрицы $\mathcal{A}$ в виде [66]

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_L\mathcal{A}_0\mathcal{A}_R = \begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{+} \\ 0 & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} S_{22} & A_{12}Q_{22} \\ P_{22}A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{+}A_{21} & I \end{pmatrix}, \tag{102}$$

где S_{22}, P_{22} и Q_{22} определены в (85), (86). Из (87) следует, что $A_{12}Q_{22}A_{22}^{+}P_{22}A_{21} = 0$, поэтому обобщенное дополнение Шура четного блока A_{22} в суперматрице $\mathcal{A}_0$ совпадает с S_{22}, и мы снова приходим к единственному возможному виду необратимого аналога супердетерминанта (99). Подобные рассуждения справедливы и для (100). Все формулы этого параграфа остаются справедливыми, если заменить слабые обобщенные обратные A^{+} на суперобобщенные Мура-Пенроуза $A^{\dagger}$.

Таким образом, в работе проанализированы различные необратимые обобщения суперматричных структур, играющих важную роль в теории суперпредставлений современных суперсимметричных объединенных теорий фундаментальных взаимодействий. Полученные результаты могут быть полезны при построении новых типов супергравитаций и анализе нетривиальных аспектов суперсимметричных моделей элементарных частиц.

Авторы благодарны В. Г. Зиме, Г. Ч. Куринному, Б. В. Новикову за плодотворные обсуждения, а также Adi Ben-Israel и Yongge Tian за присланные работы и полезные комментарии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Mohapatra R. N. // *Supersymmetric Grandunification: An update*. - College Park, 1999. - 77 p. (*Preprint* / *Univ. Maryland*, hep-ph/9911272).
2. Haber H. E. // *The supersymmetric top-ten lists*. - Santa Cruz, 1993. - 26 p. (*Preprint* / *Univ. California*, hep-ph/9308209).
3. Wess J., Bagger J. Supersymmetry and Supergravity. - Princeton: *Princeton Univ. Press*, 1983. - 216 p.
4. van Nieuwenhuizen P., West P. Principles of Supersymmetry and Supergravity. - Cambridge: *Cambridge Univ. Press*, 1989. - 453 p.
5. Gates S. J., Grisaru M. T., Rocek M., Ziegel W. Superspace, or One Thousand and One Lessons in Supersymmetry. - Reading: *Benjamin*, 1983. - 546 p.
6. Chamseddine A. H., Arnowitt R., Nath P. // *Supergravity unification*. Nucl.Phys. Proc. Suppl. - 2001. - V. **101**. - P. 145–153.
7. Ferrara S. // *Supergravity and the quest for a unified theory*. - Geneva, 1994. - 15 p. (*Preprint* / *CERN*, hep-th/9405065).
8. Bailin D., Love A. Supersymmetric Gauge Field Theory and String Theory. - Bristol: *Institute of Physics*, 1994. - 322 p.
9. Tata X. // *What is supersymmetry and how do we find it?* - Honolulu, 1997. - 89 p. (*Preprint* / *Univ. Hawaii*, hep-ph/9706307).
10. Dienes K. R., Kolda C. // *Twenty open questions in Supersymmetric Particle Physics*. - Princeton, 1997. - 64 p. (*Preprint* / *Inst. Adv. Study*, hep-ph/9712322).
11. Seiberg N. // *The Superworld*. - Princeton, 1998. - 15 p. (*Preprint* / *Inst. Adv. Study*, hep-th/9802144).
12. Quantum Fields and Strings: A Cource for Mathematicians // Deligne P., Etingof P., Freed D. S., Jeffrey L. C., Kazhdan D., Morgan J. W., Morrison D. R., Witten E., *eds.* V. **1, 2** Providence. *American Mathematical Society* 1999.- 1495 p.
13. Березин Ф. А., Кац Г. И. // *Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами*. Мат. сборник. - 1970. - Т. **82**. - № 3. - С. 343–359.
14. Кац Г. И., Коронкевич А. И. // *Теорема Фробениуса для функций от коммутирующих и антикоммутирующих аргументов*. Функц. анализ и его прил. - 1971. - Т. **5**. - № 1. - С. 78–80.
15. Лейтес Д. А. // *Спектры градуированно коммутативных колец*. Успехи мат. наук. - 1974. - Т. **29**. - № 3. - С. 209–210.
16. Березин Ф. А. // *Математические основы суперсимметричных теорий поля*. Ядерная физика. - 1979. - Т. **29**. - № 6. - С. 1670–1687.
17. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. - М.: *Изд-во МГУ*, 1983. - 208 с.
18. Duplij S. // *On semi-supermanifolds*. Pure Math. Appl. - 1998. - V. **9**. - № 3-4. - P. 283–310.
19. Дуплий С. А. Полусупермногообразия и полугруппы. - Харьков: *Крок*, 2000. - 220 с.
20. Duplij S. // *Noninvertible N=1 superanalog of complex structure*. J. Math. Phys. - 1997. - V. **38**. - № 2. - P. 1035–1040.
21. Duplij S. // *On superconformal-like transformations and their nonlinear realization*. Supersymmetries and Quantum Symmetries. - Heidelberg. *Springer-Verlag*, 1998. - P. 243–251.
22. Duplij S. // *On supermatrix operator semigroups*. Quasigroups and Related Systems. - 2000. - V. **7**. - № 1. - P. 71–98.
23. Duplij S. // *Semigroups of supermatrices and one-parameter idempotent superoperators*. Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2001. - V. **510**. - № 1(13). - P. 11–23.
24. Duplij S., Marcinek W. // *Noninvertibility, semisupermanifolds and categories regularization*. Noncommutative Structures in Mathematics and Physics. - Dordrecht. *Kluwer*, 2001. - P. 125–140.
25. Duplij S., Marcinek W. // *Semisupermanifolds and regularization of categories, modules, algebras and Yang-Baxter equation*. Supersymmetry and Quantum Field Theory. - Amsterdam. *Elsevier Science Publishers*, 2001. - P. 110–115.
26. Duplij S., Li F. // *Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras*. Czech. J. Phys. - 2001. - V. **51**. - № 12. - P. 1306–1311.
27. Li F., Duplij S. // *Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation*. Commun. Math. Phys. - 2002. - V. **225**. - № 1. - P. 191–217.
28. Ботвинник Б. И., Бухштабер В. М., Новиков С. П., Юзвинский С. А. // *Алгебраические аспекты теории умножений в комплексных кобордизмах*. Успехи мат. наук. - 2000. - Т. **55**. - № 1. - С. 5–24.
29. Rabin J. M. // *Berezin integration on general fermionic supermanifolds*. Commun. Math. Phys. - 1986. - V. **103**. - P. 431–445.
30. Rabin J. M. // *Manifold and supermanifold: Global aspects of supermanifold theory*. Topological Properties and Global Structure of Space and Time. - New York. *Plenum Press*, 1985. - P. 169–176.
31. Konechny A., Schwarz A. // *On* ($k \oplus l \mid q$)*-dimensional supermanifolds*. - Davis, 1997. - 19 p. (*Preprint* / *Univ. of California*, hep-th/9706003).
32. Dragon N., Günter H., Theis U. // *Supergravity with a noninvertible vierbein*. - Hannover, 1997. - 8 p. (*Preprint* / *Univ. Hannover*; ITP-UH-21/97, hep-th/9707238).
33. Leites D. // *Selected problems of supermanifold theory*. Duke Math. J. - 1987. - V. **54**. - № 2. - P. 649–656.
34. Лейтес Д. А. // *Введение в теорию супермногообразий*. Успехи мат. наук. - 1980. - Т. **35**. - № 1. - С. 3–57.
35. Duplij S. // *Supermatrix representations of semigroup bands*. Pure Math. Appl. - 1996. - V. **7**. - № 3-4. - P. 235–261.
36. Duplij S. // *On an alternative supermatrix reduction*. Lett. Math. Phys. - 1996. - V. **37**. - № 3. - P. 385–396.
37. Ben-Israel A., Greville T. N. E. Generalized Inverses: Theory and Applications. - New York: *Wiley*, 1974.

38. Boullion T. L., Odell P. L. Generalized Inverse Matrices. - New York: *Wiley*, 1971.
39. Rao C. R., Mitra S. K. Generalized Inverse of Matrices and its Application. - New York: *Wiley*, 1971. - 251 p.
40. Campbell S. L., Meyer C. D. Generalized Inverses of Linear Transformations. - Boston: *Pitman*, 1979. - 272 p.
41. Лейтес Д. А. Теория супермногообразий. - Петрозаводск: *Карельский филиал АН СССР*, 1983. - 199 с.
42. Delduc F., Gieres F., Gourmelen S., Theisen S. // *Non-standard matrix formats of Lie superalgebras*. - München, 1999. - 19 p. (*Preprint* / *Max-Planck-Inst.*; MPI-PhT/98-94, math-ph/9901017).
43. Abramov V., Kerner R., Le Roy B. // *Hypersymmetry: a $\mathbb{Z}_3$-graded generalization of supersymmetry*. J. Math. Phys. - 1997. - V. **38**. - P. 1650–1669.
44. Le Roy B. // *A $\mathbb{Z}_3$-graded generalization of supermatrices*. J. Math. Phys. - 1996. - V. **37**. - P. 474–483.
45. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. - М.: *Наука*, 1984. - 335 с.
46. Rogers A. // *A global theory of supermanifolds*. J. Math. Phys. - 1980. - V. **21**. - № 5. - P. 1352–1365.
47. Clifford A. H., Preston G. B. The Algebraic Theory of Semigroups. V. **1** - Providence: *Amer. Math. Soc.*, 1961.
48. Howie J. M. Fundamentals of Semigroup Theory. - Oxford: *Clarendon Press*, 1995. - 362 p.
49. Berezin F. A. Introduction to Superanalysis. - Dordrecht: *Reidel*, 1987. - 421 p.
50. Backhouse N. B., Fellouris A. G. // *Grassmann analogs of classical matrix groups*. J. Math. Phys. - 1985. - V. **26**. - № 6. - P. 1146–1151.
51. Urrutia L. F., Morales N. // *The Cayley-Hamilton theorem for supermatrices*. J. Phys. - 1994. - V. **A27**. - № 6. - P. 1981–1997.
52. Дуплий С. А. Полугрупповые методы в суперсимметричных теориях элементарных частиц. - Харьков: *Докторская диссертация, Харьковский госуниверситет*, math-ph/9910045, 1999. - 483 с.
53. Okniński J. Semigroups of Matrices. - Singapore: *World Sci.*, 1998. - 453 p.
54. Putcha M. S. // *Matrix semigroups*. Proc. Amer. Math. Soc. - 1983. - V. **88**. - P. 386–390.
55. Okniński J., Putcha M. S. // *Complex representation of matrix semigroup*. Trans. Amer. Math. Soc. - 1991. - V. **323**. - P. 563–581.
56. Penrose R. // *A generalized inverse for matrices*. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. - 1955. - V. **51**. - P. 406–413.
57. Nashed M. Z. Generalized Inverses and Applications. - New York: *Academic Press*, 1976. - 321 p.
58. Rabson G. The Generalized Inverses in Set Theory and Matrix Theory. - Providence: *Amer. Math. Soc.*, 1969. - 324 p.
59. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. - М.: *Наука*, 1988. - 548 с.
60. von Neumann J. // *On regular rings*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1936. - V. **22**. - P. 707–713.
61. Petrich M. Inverse Semigroups. - New York: *Wiley*, 1984. - 214 p.
62. Hartwig R. R. // *Block generalized inverses*. Arch. Rat. Mech. Anal. - 1976. - V. **61**. - № 1. - P. 197–251.
63. Moore E. H. General Analysis. - Philadelphia: *American Philosophical Soc.*, 1935. - 249 p.
64. Tian Y. // *How to characterize the Moore-Penrose inverses of a matrix*. Kyungpook Math. J. - 2001. - V. **41**. - № 1. - P. 1–15.
65. Drazin M. P. // *Pseudo inverses in associative rings and semigroups*. Amer. Math. Monthly. - 1958. - V. **65**. - P. 506–514.
66. Tian Y. // *The Moore-Penrose inverses of $m \times n$ block matrices and their applications*. Linear Algebra Appl. - 1998. - V. **283**. - № 1. - P. 35–60.
67. Пахомов В. Ф. // *Автоморфизмы тензорного произведения абелевой и грассмановой алгебр*. Мат. заметки. - 1974. - Т. **16**. - № 1. - С. 65–74.
68. Лейтес Д. А. // *Определенный аналог детерминанта*. Успехи мат. наук. - 1975. - Т. **30**. - № 3. - С. 156.
69. Arnowitt R., Nath P., Zumino B. // *Superfield densities and action principle in superspace*. Phys. Lett. - 1975. - V. **B56**. - № 1. - P. 81–86.
70. Rittenberg V., Scheunert M. // *Elementary constructions of graded Lie groups*. J. Math. Phys. - 1978. - V. **19**. - P. 709–713.
71. Good I. J. // *Generalized determinants and generalized generalized variance*. J. Statist. Comput. Simulation. - 1980/81. - V. **12**. - № 3-4. - P. 311–315.
72. Hawkins J. B., , Ben-Israel A. // *On generalized matrix functions*. Linear and Multilinear Algebra. - 1973. - V. **1**. - № 2. - P. 163–171.
73. Joshi V. N. // *A determinant for rectangular matrices*. Bull. Austral. Math. Soc. - 1980. - V. **21**. - № 1. - P. 137–146.

SUPERMATRIX STRUCTURES AND GENERALIZED INVERSES

S.A. Duplij [1], O.I. Kotulska [2]

[1] *Department of Physics and Technology, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*

[2] *Department of Mathematics and Mechanics, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*

We consider noninvertible generalization of supermatrix structures playing an important part in the modern supersymmetric high energy physics theories construction. Similarly the Moore-Penrose theory of generalized inverses we introduce various types of generalized inverses for noninvertible supermatrices from the semigroup $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(p|q)$. Examples of regular equation solutions for the case of $\mathrm{Mat}_{\Lambda_2}(1|1)$ are given. A noninvertible analog of superdeterminant which is valid not only for groups of supermatrices, but also for semigroups, is constructed.

KEY WORDS: supermatrix, superdeterminant, Grassmann algebra, noninvertibility, semigroup, generalized inverse, regularity