УДК 539.12

СТРУКТУРА СУПЕРМАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

С.А. Дуплий, О.И. Котульская

Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: http://www.math.uni-mannheim.de/~duplij

Поступила в редакцию 25 октября 2004 г.

В работе представлены основные направления теории матричных моделей. Приведен метод ортогональных полиномов и вычислены суперматричные модели для различных видов суперматриц. Сформулировано утверждение о виде модели (функции распределения) как для треугольных суперматриц, так и антитреугольных суперматриц, образующих полугруппу. Рассмотрен случай чисто фермионной модели.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: матричная модель, ортогональный полином, суперматрица, полугруппа

Хорошо известно, что теория матричных моделей связана с теорией эффективных действий [1, 2], а также со следующими разделами теории струн: конформные модели, теория Янга-Милса в любом измерении (сформулированная в терминах петлевых уравнений) и теория $N = 2$ суперсимметрии. По аналогии с теорией Янга-Милса сюда же можно отнести и эйнштейновскую гравитацию, однако ее связь с матричными моделями еще недостаточно выяснена. Конформная модель и $N = 2$ суперсимметрия служат источниками концепции "топологических моделей" [3–5].

ТЕОРИЯ МАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Применение матрично-модельного метода обычно предполагает два этапа: формулировку и изучение "дискретной" модели и взятие "непрерывного предела", результатом чего является "непрерывная матричная модель", которая иногда снова может быть представлена в форме матричного интеграла.

Непрерывные модели, исходно возникающие из описания произвольно равносторонних триангуляций простейших струнных моделей, в конечном итоге совпадают с простейшими моделями топологической гравитации: оба (класса) теорий идентичны [4–8].

Только в случае струнных моделей, основанных на минимальных конформных теориях с < 1 (более того, только для $q = 1$ в (p, q)-серии), действительно построены и в какой-то мере изучены непрерывные модели. Конформные модели с $c \geqslant 1$, пригодные для описания калибровочных теорий в пространственно-временном измерении $d \geqslant 2$ должны дать начало дискретным матричным моделям с "нефакторизуемым" интегрированием по "угловым" переменным, простейшим решаемым примером которых служит модель Казакова-Мигдала [9]. Вопрос о непрерывном пределе для таких моделей еще не решен.

Изучение матричных моделей имеет троякую цель. Прежде всего — это поиск непертурбативных (точных) результатов для физических амплитуд в данной модели. Столь же важно понять математическую структуру матричных моделей — и это требует разработки таких направлений, как общая теория интегрируемых иерархий, геометрическое квантование и т.д. Не менее важно для целей теории струн использование результатов изучения матричных моделей для объединения априорно разных моделей.

Наиболее изученный раздел области матричных моделей связан с двумерными струнными моделями. Примером матричной модели служит одноматричный интеграл

$$z_N\{t\} = C_N \int_{N\times N} dH \exp(\sum_{k=0}^{\infty} t_k TrH^k), \tag{1}$$

где интегрирование производится по $N \times N$ –эрмитовым матрицам H, а $dH = \prod_{i,j} dH_{ij}$. Исходя из этого, дальше можно действовать в трех направлениях.

Первое состоит в рассмотрении инвариантной формулировки свойств функционала $z_N\{t\}$. Он удовлетворяет бесконечному множеству дифференциальных уравнений, которое известно под именем "дискретных условий (связей) Вирасоро". Функционал $z_N\{t\}$ можно представить как коррелятор экранирующих операторов во вспомогательной конформной модели, а условия Вирасоро естественно связаны с алгеброй Вирасоро в этой конформной модели. Как следствие $z_N\{t\}$ является τ-функцией интегрируемой иерархии "цепочки Тоды". Следующий шаг – взять непрерывный предел иерархии цепочки Тоды [10, 11].

Другое направление, ведущее от дискретной одноматричной модели, состоит в том, чтобы идентично переписать ее в форме модели Концевича [14], на этот раз с $V(X) = X^2$ и дополнительным фактором $(\det X)^N$ под интегралом в $F_{V,n}\{L\}$. Тогда двойной скейлинговый предел можно изучать в терминах модели Концевича.

Третий путь ведет к мультиматричным моделям. В непрерывном варианте они должны давать τ-функции редуцированных КР-иерархий. Матричные модели для таких τ-функцией — это модели Концевича с $V(X) \sim X^{p+1}$ [15, 16]. На дискретном уровне мультиматричные модели служат частными примерами картановских моделей со скалярным произведением и за исключением одноматричного ($p = 2$) и двухматричного ($p = 3$) случаев практически никак не выделены среди моделей такого типа. Это находит отражение в отсутствии каких-либо разумных тождеств Уорда и интегрируемых структур для этих моделей.

К числу главных нерешенных загадок во всей этой области относится описание общих (p, q)-моделей. Формально обобщенная модель Концевича дает такое описание, однако на самом деле статистическая сумма (τ-функция) становится сингулярной при приближении к точке "фазового перехода", где изменяется q, и модель Концевича с $V(X)$ =(полином степени $p + 1$) дает удовлетворительное описание только $(, 1)$-моделей. Интеграл Концевича описывает преобразование дуальности между (p, q)- и (q, p)-моделями: $(p, q) > (q, p)$, но ни одну из этих моделей порознь. Единственным исключением служат $(p, 1)$-модели, поскольку они связаны указанным преобразованием с $(1, p)$-моделями, которые вполне тривиальны [17].

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ

Перепишем статистический интеграл в следующей форме [19]

$$e^z = \int dMe^{-trV(M)} = \int \prod_{i=1}^{N} d\lambda_i \Delta^2(\lambda) e^{-\sum_i V(\lambda_i)}, \tag{2}$$

где $V(M)-$ полиномиальный потенциал, $\lambda_i - N$ собственных значений эрмитовой матрицы M, а детерминант Вандермонда $\Delta(\lambda) = \prod\limits_{i<j} (\lambda_i - \lambda_j)$.

Этот переход мы можем осуществить используя метод Фаддеева-Попова: пусть U_0 — унитарная матрица, такая что $M = U_0^+ \Lambda U_0$, где Λ — диагональная матрица, элементами которой являются собственные числа λ_i. Тогда, подставив $1 = \int dU \delta(UMU^+ - \Lambda)\Delta^2(\lambda)$, где $\int dU \equiv 1$ в равенство (2), и, сделав ряд преобразований, мы получаем правую часть данного соотношения (2).

Теперь рассмотрим стандартный метод для вычисления полученного интеграла методом ортогональных полиномов. Полиномы называются ортогональными с соответствующей мерой, если выполняется следующее равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda e^{-V(\lambda)} P_n(\lambda) P_m(\lambda) \quad = \quad h_n \delta_{nm},$$

где $P_n(\lambda)$ — многочлен степени n .

Тогда справедливо следующее соотношение

$$\Delta(\lambda) = \det \lambda_i^{j-1} = \det P_{j-1}(\lambda_i). \tag{3}$$

Подставим его в первоначальную формулу (2), тогда интеграл раскладывается на множители. Из-за ортогональности полиномов остаются только члены, содержащие произведение многочленов одинаковой степени, которых $N!$ штук. В результате преобразований интеграл преобретает вид

$$\begin{aligned} e^z &= N! \prod_{i=0}^{N-1} h_i = N! h_0^N \prod_{k=1}^{N-1} f_k^{N-k}, \\ f_k &= \frac{h_k}{h_{k-1}}. \end{aligned}$$

При переходе к пределу для больших N, отношение $\frac{k}{N}$ становится непрерывной переменной, изменяющейся в интервале от 0 до 1, а $\frac{f_k}{N}$ −непрерывной функцией. При переходе к пределу $N \to \infty$, статистический интеграл сводится к одномерному интегралу

$$\frac{1}{N^2} z = \frac{1}{N} \sum_k (1 - \frac{k}{N}) \ln f_k \sim \int_0^1 d\xi (1 - \xi) \ln f(\xi). \tag{4}$$

ТИПЫ СУПЕРМАТРИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ

Рассмотрим следующую простую суперматричную модель [18]

$$z(N|M) \equiv \int D\Phi \exp(-V(\Phi)), \tag{5}$$

где $z(N|M)$ - функциональный интеграл матричной модели (функция распределения), Φ - суперматрица, $V(\Phi)-$ кубический потенциал.

Выделим наиболее элементарный случай — *чисто бозонная суперматрица* $N = 1, M = 0$ вида $\Phi = \lambda$. В результате интегрирования функция $z(1|0)$ приобретает вид

$$z(1|0) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{g\lambda^3-\lambda^2} d\lambda = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda^2}(1+\sum_{p=1}^{\infty}\frac{g^p\lambda^{3p}}{p!})d\lambda = \sqrt{\pi} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{g^{2p}(6p-1)!!}{2^{3p}(2p)!}\sqrt{\pi}. \tag{6}$$

Для суперматрицы размерности $N = M = 1$ модель может быть вычислена непосредственно. Выделим три подслучая: модель для полной, треугольной и антитреугольной суперматриц. При этом антитреугольные суперматрицы являются необратимыми, их подмножества образуют различные полугруппы, свойства которых рассмотрены в [12, 13].

В случае полной суперматрицы

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & \psi \\ \psi' & \omega \end{pmatrix}$$

функция $z(1|1)$ преобретает вид

$$\begin{aligned} z(1|1) &= 2\pi i(1+\sum_{p=1}^{\infty} g^{4p} A_p(\Gamma(6p+1) - 6p\Gamma(6p))) = 2\pi i, \\ \text{где } \; A_p &= \frac{3^{3p}}{4^{4p}}\frac{1}{p!(3p)!}. \end{aligned}$$

В случае антитреугольной суперматрицы имеется два варианта.

$$\begin{aligned} \text{1) Для } \; \Phi_1 &= \begin{pmatrix} \lambda & \psi \\ \psi' & 0 \end{pmatrix}, \\ \text{имеем } \; z(1|1) &= 2\sqrt{\pi} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{g^{2p}}{(2p)!}(2\Gamma(3p+1/2) - 3\frac{g^2}{2p+1}\Gamma(3p+2)). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{2) Для } \; \Phi_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \psi \\ \psi' & \omega \end{pmatrix}, \\ \text{имеем } \; z(1|1) &= i(2\sqrt{\pi} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{g^{2p}(-1)^p}{(2p)!}(2\Gamma(3p+1/2) + 3\frac{g^2}{2p+1}\Gamma(3p+2))). \end{aligned}$$

Можно заметить, что эти два случая могут быть представлены в едином виде

$$\begin{aligned} z(1|1) &= \sqrt{k}(2\sqrt{\pi} + \sum_{p=1}^{\infty}\frac{g^{2p}(k)^p}{(2p)!}(2\Gamma(3p+1/2) + 3k\frac{g^2}{2p+1}\Gamma(3p+2))), \\ \text{где } \; k &= \pm 1. \end{aligned}$$

В случае треугольной суперматрицы

$$\begin{aligned} \Phi &= \begin{pmatrix} \lambda & \psi \\ 0 & \omega \end{pmatrix}, \\ \text{получаем } \; z(1|1) &= \int d\lambda d\omega d\psi \exp(-\lambda^2 + \omega^2 + g(\lambda^3 - \omega^3)). \end{aligned}$$

Поскольку $\int d\psi = 0$, то функция распределения равна нулю $z = 0$.

Для суперматриц размерности $N = 1, M = 2$ и $N = 2, M = 1$ вычислены подслучаи для треугольных суперматриц и антритреугольных, образующих полугруппу. Непосредственное вычисление случая полной суперматрицы приводит к громоздким вычислениям.

Рассмотрим следующую *антитреугольную суперматрицу* размерности $N = 1$, $M = 2$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & \psi & \gamma \\ \psi' & 0 & 0 \\ \gamma' & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Такие суперматрицы образуют полугруппу при условии, что

$$\begin{aligned} \psi'\psi &= 0, \\ \gamma'\gamma &= 0, \\ \gamma'\psi &= 0, \\ \psi'\gamma &= 0. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим *антитреугольную суперматрицу* размерности $N = 2$, $M = 1$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & a & \psi \\ b & c & \gamma \\ \psi' & \gamma' & 0 \end{pmatrix}.$$

Эти суперматрицы образуют полугруппу при условии, что

$$\begin{aligned} \psi'\psi + \gamma'\gamma &= 0, \\ \lambda\psi'\psi + c\gamma'\gamma + a\psi'\gamma + b\gamma'\psi &= 0. \end{aligned}$$

И в том, и в другом случае, если выполняются эти условия, подынтегральное выражение не будет зависеть от $\psi, \psi', \gamma, \gamma'$. Следовательно,

$$\begin{aligned} z(1|2) &= 0, \\ z(2|1) &= 0. \end{aligned}$$

Если антитреугольные суперматрицы вида $\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & \psi & \gamma \\ \psi' & 0 & 0 \\ \gamma' & 0 & 0 \end{pmatrix}$ не образуют полугруппу, то функциональный интеграл имеет вид

$$z(1|2) = \sqrt{\pi}(4 + \frac{9}{2}g^2 + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{g^{2p}(6p-1)!!}{(2p)!2^{3p-1}} - 24\sum_{p=1}^{\infty} \frac{g^{2(p+1)}(6p+3)!!}{(2p+1)!2^{3p+1}} + 18\sum_{p=1}^{\infty} \frac{g^{2(p+1)}(6p+1)!!}{(2p)!2^{3p+2}}). \tag{7}$$

Для случаев *треугольной суперматрицы* $N = 1, M = 2$ имеем

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & \psi & \gamma \\ 0 & \omega & a \\ 0 & b & c \end{pmatrix}$$

и $N = 2, M = 1$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \lambda & a & \psi \\ b & c & \gamma \\ 0 & 0 & \omega \end{pmatrix}$$

подынтегральное выражение также не зависит от $\psi, \psi', \gamma, \gamma'$, тогда

$$\begin{aligned} z(1|2) &= 0, \\ z(2|1) &= 0. \end{aligned}$$

Можно сделать предположение, что суперматричная модель (функция распределения) для произвольной треугольной суперматрицы и для антитреугольных, образующих полугруппу равна 0.

ФЕРМИОННАЯ МАТРИЧНАЯ МОДЕЛЬ

Чисто фермионная модель [20] имеет вид

$$z = \int d\psi d\psi' \exp\{N^2 tr(\psi'\psi + \frac{g_k(\psi'\psi)^k}{k})\}, \tag{8}$$

где z - функция распределения, ψ, ψ' — независимые комплексные грассмановы $N \times N$ - матрицы, $k = 2, 3$, т.е. рассматриваем кубический потенциал.

Посмотрим, какой вид будет иметь функция распределения на конкретном примере матриц 2×2. В этом случае для блоков

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{pmatrix}, \ \psi' = \begin{pmatrix} \psi'_{11} & \psi'_{12} \\ \psi'_{21} & \psi'_{22} \end{pmatrix},$$

отбрасывая слагаемые, интеграл по которым будет равен нулю, получаем следующее выражение для функции распределения

$$z = -N^8 - 4N^6 g_2 - 3N^4 g_2^2 + 4N^4 g_3. \tag{9}$$

ВЫВОДЫ

Таким образом, в работе сделан обзор основных направлений в теории матричных моделей. Приведен метод ортогональных полиномов. Вычислены функциональные интегралы для полной, антитреугольной и треугольной суперматриц размерности $N = M = 1$, для полной и антитреуголной суперматриц размерности $N = 2, M = 1$, и $N = 1, M = 2$. Сформулировано утверждение о виде функционального интеграла для треугольных суперматриц и антитреугольных, образующих полугруппу. На примере матриц 2×2 рассмотрена фермионная модель.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Gerasimov A., Lebedev D.et al. // Int. J. Mod. Phys.- 1991. - V. A6. - P. 977.
2. Morozov A. // Mod. Phys. Lett.- 1991. - V. A6. - P. 1525.
3. Witten E. // Comm. Math. Phys.- 1988. - V. 117. - P. 353.
4. Witten E. // Nucl. Phys.- 1990. - V. B340. - P. 281.
5. Witten E. // Surves Diff. Geom.- 1991. - V. 1. - P. 243.
6. Концевич М. // Функц. анализ и его прил.- 1991. - V. 25(2). - P. 50.
7. Witten E. // In Proc. of the NYC Conference.- 1991. - V. 1. - P. 243.
8. Marshakov A., Mironov A. et al. // Phys.Lett.- 1992. - V. B274. - P. 280.
9. Kazakov V., Migdal A. // Indused QCD at Large N.- 1992. - (Preprint PUPT-1322).
10. Gerasimov A., Marshakov A., Mironov A., Orlov A. et al. // Nucl. Phys.- 1991. - V. B357. - P. 565.
11. Makeenko Yu., Marshakov A., Mironov A. et al. // Nucl. Phys.- 1991. - V. B356. - P. 574.
12. Duplij S. // Linear Algebra Appl. - 2003. - V. 360. - P. 59.
13. Duplij S.A., Kotulska O.I. // J. Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2002. - V. 548. - N 1(17). - P. 3.
14. Kharchev S., Marshakov A., Mironov A. et al. // *Generalized Kontsevich Model versus Noda Hierarchy and Discrete Matrix Models.*- 1992.- (Preprint ITEP-M3/92, hep-th/9203043).
15. Dijkgraaf R. // *Intersection Yheory, Integrable Hierarchies and Topological Gield Theory.* - 1991.- (Preprint IASSNA-HEP-91/91, hep-th 9201003).
16. Kontsevich M. // Comm. Math. Phys.- 1992. - V. 147(1). - P. 1.
17. Kharchev S., Marshakov A. // *Topological versus Non-Topological Theories.*- 1992.- (Preprint FIAN/TD-15/92).
18. Alvarez-Gaume L., Manes J.// *Supermatrix Models.*- 1991.- (Preprint CERN-TH.6067/91).
19. Ginsparg P.//*Matrix Models.*-1991.-(Preprint LA-UR-91-4101).
20. Semenoff G., Szabo R. // Int. J. Mod. Phys.- 1997. - V. A12. - P. 2135.

STRUCTURE OF SUPERMATRIX MODELS

S.A. Duplij, O.I. Kotulska

Department of Physics and Technology

V. N. Karazin Kharkov National University, Svoboda Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine

The main directions of matrix models theory are presented. The orthohonal polynomial method is described. Supermatrix models for various types of supermatrices are described. The statement about shape of model for triangle and antitriangle supermatrices forming semigroup is formulated.

KEY WORDS: matrix model, orthohonal polynomial, supermatrix, semigroup