УДК 539.12

О СТРОЕНИИ ГЛАДКИХ ПОЛУСУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

С. А. Дуплий [1], М. В. Чурсин [2]

[1] *Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. Internet: http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij
[2] *Механико-математический факультет, Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
Поступила в редакцию 28 апреля 2000 г.

Рассматриваются возможности обобщения модельных супермногообразия Роджерс на необратимый случай. Показано, что определенным образом редуцированная модель на $B_2^{1,2}$ не сводится к супермногообразию Роджерс на $B_1^{1,2}$, которая однако после некоторого отображения является обратимым супермногообразием. Исследовано необратимое обобщение модели Роджерс, на $B_1^{1,2}$ вводится полугрупповая структура, идеальные свойства которой изучены. Это приводит к полусупермногообразию, в котором необратимость является результатом многозначности функций перехода.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: супермноогообразие, карта, функция перехода, необратимость, полугруппа, многозначность.

Теория супермногообразий [1–4] с одной стороны является математической основой современных объединенных теорий элементарных частиц (см. напр. [5]), а с другой стороны предствляет самостоятельный интерес как одно из важнейших направлений суперматематики [1, 6, 7]. Необратимые аналоги супермногообразий были введены в [8] и частично исследованы в [9–11]. В данной работе изучаются свойства и возможные необратимые обобщения модельных супермногообразий Роджерс [12], которые являются важным ингредиентом всего функционального подхода [13–15].

МОДЕЛЬНОЕ РЕДУЦИРОВАННОЕ СУПЕРМНОГООБРАЗИЕ

Пусть $B_2^{1,2}$ — алгебра Грассмана-Банаха вида $B_2^{1,2} = \{\langle x, \xi, \eta\rangle\}$, где

$$x = a_1\mathbf{1} + a_2\beta_1\beta_2, \tag{1}$$
$$\xi = b_1\beta_1 + b_2\beta_2, \tag{2}$$
$$\eta = c_1\beta_1 + c_2\beta_2. \tag{3}$$

и $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}$, $\mathbf{1}$ — единица алгебры и β_i — антикоммутирующие нечетные нильпотентные образующие $\beta_1\beta_2 = -\beta_2\beta_1$. Для того, чтобы ввести операцию, сопоставим алгебре $B_2^{1,2}$ (по аналогии с [13]) множество верхнетреугольных матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & x & \xi \\ 0 & 1 & \eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Легко видеть, что произведение матриц сохраняет грассманову структуру (то есть оставлет на четном месте четный элемент x, а на нечетных местах — нечетные ξ, η). Это позволяет ввести на множестве $B_2^{1,2}$ корректную операцию умножения $(*)$ вида

$$\langle x, \xi, \eta\rangle * \langle y, \rho, \sigma\rangle = \langle x + y, \xi + \rho + x\sigma, \eta + \sigma\rangle\,, \tag{5}$$

порожденную произведением матриц (4). Эта операция ассоциативна в силу ассоциативности произведения матриц. Поскольку для каждого элемента $\langle x, \xi, \eta\rangle$ существует единственный обратный $\langle -x, -\xi + x\eta, -\eta\rangle$, то множество $B_2^{1,2}$ с опрерацией $(*)$ является группой, которую мы обозначим $\mathbf{G}$. Для группы $\mathbf{G}$ выполняются следующие глобальные свойства:

$$x^2 \neq 0, x\xi \neq 0, x\eta \neq 0, \xi\eta \neq 0, \tag{6}$$

если все вещественные коеэффициенты отличны от 0 и $\det \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{pmatrix} \neq 0$.

Другое представление $\mathcal{T}_G$ группы $\mathbf{G}$ может быть введено с помощью прямоугольных матриц из вещественных коэффициентов. Элемент $\langle x, \xi, \eta\rangle$ с коэффициентами (1)–(3) представляется матрицей

$$t_{x,\xi,\eta} = \mathcal{T}_G\left(\langle x, \xi, \eta\rangle\right) = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right\}, \tag{7}$$

а произведение порождается произведением элементов (5)

$$t_{x,\xi,\eta} \circledast t_{y,\rho,\sigma} = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{array} \right\} \circledast \left\{ \begin{array}{cc} d_1 & d_2 \\ e_1 & e_2 \\ f_1 & f_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 + d_1 & a_2 + d_2 \\ b_1 + e_1 + a_1 f_1 & b_2 + e_2 + a_1 f_2 \\ c_1 + f_1 & c_2 + f_2 \end{array} \right\}. \tag{8}$$

Данное представление рассматриваемое как обычное 6-мерное многообразие является частным примером "скелета" супермногообразия [16]. В общем случае размерность "скелета" $(m|n)$-мерного супермногообразия на грассмановой алгеброй B_L равна $2^{L-1}(m+n)$.

Выделим в группе $\mathbf{G}$ дискретную подгруппу $\mathbf{D} = \{\langle p, \mu, \nu \rangle\}$ с целыми коэффициентами, определяющуюся следующими условиями

$$p = m_1 \mathbf{1} + m_2 \beta_1 \beta_2, \tag{9}$$
$$\mu = n_1 \beta_1 + n_2 \beta_2, \tag{10}$$
$$\nu = k_1 \beta_1 + k_2 \beta_2. \tag{11}$$

где $m_i, n_i, k_i \in \mathbb{Z}$. Построим фактор-группу $\mathbf{G} \diagup \mathbf{D}$. Классы элементов $\langle x, \xi, \eta \rangle$ и $\langle x', \xi', \eta' \rangle$ совпадают $[\langle x, \xi, \eta \rangle] = [\langle x', \xi', \eta' \rangle]$, если существует такой элемент $\langle p, \mu, \nu \rangle \in \mathbf{D}$, что

$$x = x' + p, \tag{12}$$
$$\xi = \xi' + \mu + x'\nu, \tag{13}$$
$$\eta = \eta' + \nu. \tag{14}$$

Таким образом множество $B_2^{1,2}$ приобретает дополнительную (порожденную факторизацией) нетривиальную топологию. Можно показать, что полученное топологическое пространство является G^∞-супермногообразием размерности $(1|2)$ над грассмановой алгеброй B_2 с соответствующими картами, как было упомянуто в работе [17], где также было рассмотрено редуцированное (по отношению к (7)) следующее представление

$$\mathcal{T}_G^{Rogers}(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \left\{ \begin{array}{cc} a_1 & 0 \\ b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{array} \right\}, \tag{15}$$

соответствующее алгебре $B_1^{1,2}$. Выясним, приводит ли другие редуцирования (пророждающиеся уравнениями на коэффициенты, а не на переменные супермногообразия) к супермногообразиям. Рассмотрим подмножество $\mathbf{G}'$ группы $\mathbf{G}$, полученное из $\mathbf{G}$ при помощи следующего редуцирования

$$\mathcal{T}_{G'}(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & a \\ b & 0 \\ 0 & c \end{array} \right\}. \tag{16}$$

В таком представлении координаты равны

$$x = a\beta_1\beta_2, \tag{17}$$
$$\xi = b\beta_1, \tag{18}$$
$$\eta = c\beta_2, \tag{19}$$

а произведение в $\mathbf{G}'$определяется формулой

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & a \\ b & 0 \\ 0 & c \end{array} \right\} \circledast \left\{ \begin{array}{cc} 0 & d \\ e & 0 \\ 0 & f \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & a+d \\ b+e & 0 \\ 0 & c+f \end{array} \right\}. \tag{20}$$

В терминах "скелета" операция редуцирования является пересечением трех гиперплоскостей. Полученное подпространство инвариантно относительно действия $\circledast$.

Понятно, что множество $\mathbf{G}'$ является подгруппой группы $\mathbf{G}$, так как опрерация $(*)$ и взятие обратного не выводят за пределы $\mathbf{G}'$, а единица $\mathbf{G}$ принадлежит $\mathbf{G}'$ и, очевидно, равна $\langle 0,0,0 \rangle$, которая представляется нулевой матрицей (16). Из (20) следует, что $\mathbf{G}'$ изоморфна $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, но неизоморфна группе над $B_1^{1,2}$, представление которой задано в (15), а действие (в наших обозначениях) имеет вид

$$\left\{ \begin{array}{cc} a & 0 \\ b & 0 \\ c & 0 \end{array} \right\} \circledast \left\{ \begin{array}{cc} d & 0 \\ e & 0 \\ f & 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} a+d & 0 \\ b+e+af & 0 \\ c+f & 0 \end{array} \right\}. \tag{21}$$

Для $\mathbf{G}'$, в отличие от группы $\mathbf{G}$, глобальные свойства таковы:

$$x^2 = 0, \quad x\xi = 0, \quad x\eta = 0, \quad \xi\eta \neq 0. \tag{22}$$

Первые три соотношения можно считать уравнениями редуцированной группы $\mathbf{G}'$, а последнее свойство выполняется только при условии $bc \neq 0$.

Аналогичным образом редуцируем дискретную группу $\mathbf{D}$, что можно представить матрицей с целыми элементами

$$\mathcal{T}_{D'}(\langle x, \xi, \eta \rangle) = \left\{ \begin{array}{cc} 0 & m \\ n & 0 \\ 0 & k \end{array} \right\}, \tag{23}$$

Видно, что $\mathbf{D}'$ является дискретной подгруппой группы $\mathbf{D}$ и представляется прямым произведением $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. По аналогии с (12)–(14) профакторизуем группу $\mathbf{G}'$по $\mathbf{D}'$: элементы $\langle x, \xi, \eta \rangle$ и $\langle x', \xi', \eta' \rangle$ совпадают $[\langle x, \xi, \eta \rangle] = [\langle x', \xi', \eta' \rangle]$, если существует такой элемент $\langle p, \mu, \nu \rangle \in \mathbf{D}'$, что

$$x = x' + p, \tag{24}$$
$$\xi = \xi' + \mu, \tag{25}$$

$$\eta = \eta' + \nu. \tag{26}$$

Покажем, что $\mathbf{G}' \diagup \mathbf{D}'$ — G^{∞}-супермногообразие размерности $(1|2)$ над грассмановой алгеброй B_1 с обратимыми картами. Рассмотрим следующие множества в $\mathbf{G}'$

$$S_1 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid \frac{1}{5} < a < \frac{4}{5} \right\}, \tag{27}$$

$$S_2 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid \frac{1}{5} < b < \frac{4}{5} \right\}, \tag{28}$$

$$S_3 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid \frac{1}{5} < c < \frac{4}{5} \right\}, \tag{29}$$

$$T_1 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid -\frac{2}{5} < a < \frac{2}{5} \right\}, \tag{30}$$

$$T_2 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid -\frac{2}{5} < b < \frac{2}{5} \right\}, \tag{31}$$

$$T_3 = \left\{ \langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \mid -\frac{2}{5} < c < \frac{2}{5} \right\} \tag{32}$$

и восемь их пересечений

$$\begin{array}{ll} V_1 = S_1 \cap S_2 \cap S_3, & V_5 = S_1 \cap T_2 \cap T_3, \\ V_2 = T_1 \cap S_2 \cap S_3, & V_6 = T_1 \cap S_2 \cap T_3, \\ V_3 = S_1 \cap T_2 \cap S_3, & V_7 = T_1 \cap T_2 \cap S_3, \\ V_4 = S_1 \cap S_2 \cap T_3, & V_8 = T_1 \cap T_2 \cap T_3. \end{array} \tag{33}$$

Рассмотрим восемь координатных окрестностей $U_i = [V_i]$ на $\mathbf{G}' \diagup \mathbf{D}'$, состоящих из классов эквивалентности всех элементов, принадлежащих V_i, где $i = 1, 2, \ldots 8$. Так как размерность редуцированной группы равна трем, что совпадает с размерностью "скелета" супермногообразия $B_1^{1,2}$, то естественно рассматривать карты на соответствующей алгебре $B_1^{1,2}$. Введем на U_i локальные карты $\Psi_i : U_i \to \hat{V}_i$, где $\hat{V}_i$ — область в алгебре Грассмана-Банаха $B_1^{1,2}$. Сопоставим каждому множеству S_i в $B_2^{1,2}$ множество $\hat{S}_i$ в $B_1^{1,2}$ следующим образом: если елемент $\langle a\beta_1\beta_2, b\beta_1, c\beta_2 \rangle \in S_i, \beta_i \in B_2$, то элемент $\langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle \in \hat{S}_i, \beta \in B_1$. Точно также сопоставим каждому множеству $T_i \subset B_2^{1,2}$ множество $\hat{T}_i \subset B_1^{1,2}$. Обозначим это сопоставление f. Тогда области $\hat{V}_i \subset B_1^{1,2}$ являются образами отображения f, и определяются такими же формулами, что и (27)–(33). Этим преобразованием мы сохраняем линейную структуру "скелета", но не сохраняем операцию $\circledast$. Зададим Ψ_i явным образом в терминах классов эквивалентности. Пусть класс элемента $\mathbf{p} \in V_i$ принадлежит координатной окрестности U_i, тогда $\Psi_i([\mathbf{p}]) = f(\mathbf{p})$. Определение корректно, так как для каждого класса $[\mathbf{p}]$ существует его единственный представитель в V_i. Функции Ψ_i являются гомеоморфизмами. Функций перехода $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ между картами на $\mathbf{G}' \diagup \mathbf{D}'$ всего $8^2 - 8 = 56$. Приведем явный вид одной из них $\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1} : \Psi_1(U_1 \cap U_4) \to \Psi_4(U_1 \cap U_4)$. Класс элемент $\langle x, \xi, \eta \rangle = \langle (a+m)\mathbf{1}, (b+n)\beta, (c+k)\beta \rangle$, где $m, n, k \in \mathbb{Z}$, принадлежит пересечению $U_1 \cap U_4$ в двух вариантах, для которых функция перехода $\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1}$ выглядит следующим образом

$$\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1}(\langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle) = \langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle, \quad \frac{1}{5} < a < \frac{4}{5}, \frac{1}{5} < b < \frac{4}{5}, \frac{1}{5} < c < \frac{2}{5}, \tag{34}$$

$$\Psi_4 \circ \Psi_1^{-1}(\langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle) = \langle a\mathbf{1}, b\beta, (c-1)\beta \rangle, \quad \frac{1}{5} < a < \frac{4}{5}, \frac{1}{5} < b < \frac{4}{5}, \frac{3}{5} < c < \frac{4}{5}. \tag{35}$$

Функции перехода $\Psi_i \circ \Psi_j^{-1}$ являются G^{∞}-гладкими, таким образом $\mathbf{G}' \diagup \mathbf{D}'$ с соответствующими картами является супермнообразием, хотя введеная функция f не сохраняет операцию $\circledast$ на "скелете" и не является гомоморфизмом.

МНОГОЗНАЧНОСТЬ И ПОЛУСУПЕРМНОГООБРАЗИЯ

Рассмотрим теперь алгебру Грассмана-Банаха $B_1^{1,2}$ вида $B_1^{1,2} = \{\langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle, a, b, c \in \mathbb{R}\}$, где $\mathbf{1}$ — единица алгебры и β — нечетная образующая. Для того, чтобы ввести полугрупповую структуру на множестве $B_1^{1,2}$, сопоставим каждому элементу $\langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle$ необратимую матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & a\mathbf{1} & b\beta \\ 0 & 1 & c\beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Введем на $B_1^{1,2}$ операцию $(*)$, порожденную стандартным произведением матриц (36) следующим образом:

$$\langle a_1\mathbf{1}, b_1\beta, c_1\beta \rangle * \langle a_2\mathbf{1}, b_2\beta, c_2\beta \rangle = \langle (a_1+a_2)\mathbf{1}, (b_2 + a_1c_2)\beta, c_2\beta \rangle. \tag{37}$$

Операция $(*)$ введена корректно, поскольку, как и прежде, на нечетных местах остаются нечетные элементы, а на четном месте — четный элемент, то есть матрицы сохраняют свою грассманову структуру. В дальнейшем будем представлять элемент $\mathbf{s} = \langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle$ как $[a, b, c] = T_S(\langle a\mathbf{1}, b\beta, c\beta \rangle)$, где $a, b, c \in \mathbb{R}$, имея в виду одностолбцовый аналог (7) (то есть, для краткости в обозначениях будем отождествлять представление с элементом).

Множество $B_1^{1,2}$ с введенной на ней операцией $(*)$ образует полугруппу $\mathbf{S} = \bigcup \mathbf{s}$ (см. напр. [18, 19]), поскольку ассоциативность следует из ассоциативности умножения матриц.

Опишем основные свойства построенной полугруппы $\mathbf{S}$:

1. Левая разрешимость $\forall [s_1, s_2, s_3], [t_1, t_2, t_3] \in \mathbf{S}$, $\exists !$ $[u_1, u_2, u_3] \in \mathbf{S}$ такое, что $[s_1, s_2, s_3] * [u_1, u_2, u_3] = [t_1, t_2, t_3]$, поскольку соответствующие компонентные уравнения $t_1 = s_1 + u_1, t_2 = u_2 + s_1 u_3, t_3 = u_3$ имеют решение $[t_1 - s_1, t_2 - s_1 t_3, t_3]$, и оно единственно. В частности, $\forall \mathbf{s} \in \mathbf{S}, \exists !$ $\mathbf{t} \in \mathbf{S}$ такое, что $\mathbf{s} * \mathbf{t} = \mathbf{s}$, т. е. каждый элемент является левым нулем для единственного элемента.
2. Элемент $[0, 0, 0]$ является правым нулем полугруппы $\mathbf{S}$.
3. Левых нулей в полугруппе $\mathbf{S}$ не существует.
4. Для любого элемента полугруппы $\mathbf{S}$ имеем $[s_1, s_2, s_3]^{*n} = [ns_1, s_2 + (n-1) s_1, s_3]$.
5. Левыми единицами полугруппы $\mathbf{S}$ являются элементы вида $[0, s_2, s_3]$ и только они, следовательно $[0, s_2, s_3]^{*n} = [0, s_2, s_3]$, и такими элементами исчерпываются все идемпотенты полугруппы $\mathbf{S}$.
6. Правых единиц в полугруппе $\mathbf{S}$ не существует.
7. Полугруппа $\mathbf{S}$ — полугруппа с левым сокращением.
8. Центр полугруппы $\mathrm{Cent}\,(\mathbf{S}) = \varnothing$.
9. Каждый элемент $[s_1, s_2, s_3]$ обладает семейством $\{\mathbf{t} = [-s_1, t_2, t_3] \mid t_2, t_3 \in \mathbb{R}\}$ элементов, регулярных к нему ($\mathbf{s} * \mathbf{t} * \mathbf{s} = \mathbf{s}$), которые также являются инверсными ($\mathbf{t} * \mathbf{s} * \mathbf{t} = \mathbf{t}$), а идемпотенты строятся с помощью их произведений [18, 19].

Рассмотрим идеальную структуру полугруппы $\mathbf{S}$. Множества $\mathbf{I}_a = \{[s_1, s_2, a] \in \mathbf{S} \mid s_1, s_2 \in \mathbb{R}\}$, где $a \in \mathbb{R}$, являются левыми идеалами $\mathbf{S} * \mathbf{I}_a = \mathbf{I}_a$. Идеалы $\mathbf{I}_a$ не пересекаются $\mathbf{I}_a \cap \mathbf{I}_b = \varnothing$ при $a \neq b$ и покрывают всю полугруппу $\bigcup \mathbf{I}_a = \mathbf{S}$. Правых идеалов нет.

Множество $D = \{[m_1, m_2, m_3] \in \mathbf{S} \mid m_i \in \mathbb{Z}\}$ является подполугруппой полугруппы $\mathbf{S}$, но не идеалом.

Выделим в полугруппе $\mathbf{S}$ подмножество $\mathbf{T}$, заданное уравнением сферы в трехмерном пространстве вещественных коэффициентов

$$\mathbf{T} = \left\{ [x, y, z] \in \mathbf{S} \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x, y, z \in \mathbb{R} \right\}. \tag{38}$$

Поскольку $\mathbf{T}$ — подмножество топологического пространства $B_1^{1,2}$, то $\mathbf{T}$ — топологическое пространство с индуцированной топологией [20]. Выберем в $\mathbf{T}$ координатные окрестности $\mathbf{U}_a = \{[x, y, z] \in \mathbf{T} \mid z > a\}$, $|a| < 1$. Введем карты $\Psi_a : \mathbf{U}_a \to \Psi_a (\mathbf{U}_a) \subset \mathbf{I}_a$. Функция Ψ_a задана следующим условием: Ψ_a от аргумента $[x, y, z] \in \mathbf{U}_a$ равна произведению элемента $[x, y, z]$ и его проекции на плоскость $z = a$, являющуюся образом $\mathbf{I}_a$ в трехмерном пространстве вещественных коэффициентов

$$\Psi_a ([x, y, z]) = [x, y, z] * [x, y, a] = [2x, y + xa, a]. \tag{39}$$

Ясно, что $\Psi_a (\mathbf{U}_a)$ — область в $\mathbf{I}_a$. Функции Ψ_a взаимно-однозначны при $a \geq 0$. Поскольку функции, порождающие Ψ_a непрерывны, то и сама Ψ_a непрерывна. Рассмотрим обратную функцию Ψ_a^{-1} при $a \geq 0$. Из определения (39) следует явный вид этой функции

$$\Psi_a^{-1} ([x, y, a]) = \left[\frac{x}{2}, y - xa, \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - (y - xa)^2} \right]. \tag{40}$$

При $a \geq 0$ функция Ψ_a^{-1} непрерывна, поэтому Ψ_a — гомеоморфизм. Эти карты являются стандартными обратимыми картами на топологическом пространстве $\mathbf{T}$. Необратимые карты возникают при $a < 0$. Рассмотрим этот случай.

Функции Ψ_a склеивают точки $[x, y, z]$ и $[x, y, -z]$ при $|z| < -a$. Выбрав одну из ветвей однозначности, можно говорить об обратных функциях $\Psi_{a(\pm)}^{-1}$, где $\Psi_{a(+)}^{-1}$ означает верхнюю "верхнюю" ветвь, а $\Psi_{a(-)}^{-1}$ — "нижнюю". Области значения этих функций равны

$$\Psi_{a(+)}^{-1} (\Psi_a (\mathbf{U}_a)) = \{[x, y, z] \in \mathbf{T} \mid z > 0\}, \tag{41}$$

$$\Psi_{a(-)}^{-1} (\Psi_a (\mathbf{U}_a)) = \{[x, y, z] \in \mathbf{T} \mid z \in (a, 0) \cup (-a, 1)\}. \tag{42}$$

"Верхняя" ветвь $\Psi_{a(+)}^{-1}$ является непрерывной функцией, а "нижняя" ветвь $\Psi_{a(-)}^{-1}$ является непрерывной функцией на множестве $\Psi_a (\mathbf{U}_a) \backslash \mathbf{Z}$, где $\mathbf{Z}$ — множество меры 0, задаваемое объединением корней уравнений

$$1 - \frac{x^2}{4} - (y - xa)^2 = 0 \quad \text{и} \quad \sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - (y - xa)^2} = -a. \tag{43}$$

Выбрав одну из ветвей однозначности для необратимых карт, можно говорить о функциях перехода между картами $\mathbf{I}_a$ и $\mathbf{I}_b$, которые имеют вид

$$[2x, y + xa, a] \overset{\Psi_{a(\pm)}^{-1}}{\longmapsto} [x, y, \pm z] \overset{\Psi_b}{\longmapsto} [2x, y + xb, b]. \tag{44}$$

Таким образом, явный вид функций перехода $\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}$ задается формулой

$$[x, y, a] \stackrel{\Psi_{a(\pm)}^{-1}}{\longmapsto} \left[\frac{x}{2}, y - \frac{xa}{2}, \pm\sqrt{1 - \frac{x^2}{4} - \left(y - \frac{xa}{2}\right)^2}\right] \stackrel{\Psi_b}{\longmapsto} \left[x, y - \frac{xa}{2} + \frac{xb}{2}, b\right]. \tag{45}$$

Если рассматривать $\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}$ как функцию на $B_1^{1,1}$, то мы получим

$$\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}([x\mathbf{1}, y\beta]) = \left[x\mathbf{1}, \left(y - \frac{xa}{2} + \frac{xb}{2}\right)\beta\right], \tag{46}$$

то есть $\Psi_b \circ \Psi_{a(\pm)}^{-1}$ является G^∞-функцией. Поэтому топологическое пространство $\mathbf{S}$ с данным набором карт является гладким полусупермногообразием [8, 9], в котором необратимость возникает вследствие неднозначности.

ВЫВОДЫ

Таким образом, дальнейшее изучение внутреннего строения необратимых аналогов супермногобразий представляется важным с точки зрения математически последовательной теории и является необходимым инструментом для построения новых суперсимметричных моделей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.. *Изд-во МГУ*, 1983. 208 с.
2. Bernstein J., Leites D. // *The supermanifolds.* Seminar on Supermanifolds. № 14. Stockholm. *Univ. Stockholm*, 1987. P. 1–44.
3. Лейтес Д. А. Теория супермногообразий. Петрозаводск. *Карельский филиал АН СССР*, 1983. 199 с.
4. Bartocci C., Bruzzo U., Hernandez-Ruiperez D. The Geometry of Supermanifolds. Dordrecht. *Kluwer*, 1991. 242 p.
5. Kaku M. Introduction to Superstrings and M-Theory. Berlin. *Springer-Verlag*, 1998. 587 p.
6. Воронов А. А., Манин Ю. И., Пенков И. Б. // *Элементы супергеометрии.* Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. **9**. М.. *ВИНИТИ*, 1986. С. 3–25.
7. Манин Ю. И. Калибровочные поля и комплексная геометрия. М.. *Наука*, 1984. 335 с.
8. Duplij S. // *Noninvertibility and "semi-" analogs of (super) manifolds, fiber bundles and homotopies.* Kaiserslautern, 1996. 30 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH-96/10, `q-alg/9609022`).
9. Duplij S. // *On semi-supermanifolds.* Pure Math. Appl. 1998. V. **9**. № 3-4. P. 283–310.
10. Дуплий С. А. Полугрупповые методы в суперсимметричных теориях элементарных частиц. Харьков. *Докторская диссертация, Харьковский госуниверситет*, `math-ph/9910045`, 1999. 483 с.
11. Duplij S., Marcinek W. // *Higher regularity properties of mappings and morphisms.* Wrocław, 2000. 12 p. (*Preprint / Univ. Wrocław*).
12. Rogers A. // *Some examples of compact supermanifolds with non-Abelian fundamental group*. J. Math. Phys. 1981. V. **22**. № 3. P. 443–444.
13. Rogers A. // *A global theory of supermanifolds.* J. Math. Phys. 1980. V. **21**. № 5. P. 1352–1365.
14. Владимиров В. С., Волович И. В. // *Суперанализ.* **I**. *Дифференциальное исчисление.* Теор. мат. физ. 1984. Т. **59**. № 1. С. 3–27.
15. Хренников А. Ю. Суперанализ. М.. *Наука*, 1997. 304 с.
16. De Witt B. S. Supermanifolds. Cambridge. *Cambridge Univ. Press*, 2nd edition. 1992. 407 p.
17. Rogers A. // *Graded manifolds, supermanifolds and infinite-dimensional Grassmann algebras.* Comm. Math. Phys. 1986. V. **105**. P. 374–384.
18. Clifford A. H., Preston G. B. The Algebraic Theory of Semigroups. V. **1** Providence. *Amer. Math. Soc.*, 1961.
19. Howie J. M. Fundamentals of Semigroup Theory. Oxford. *Clarendon Press*, 1995. 362 p.
20. Постников М. М. Гладкие многообразия. М.. *Наука*, 1987. 478 с.

ON STRUCTURE OF SMOOTH SEMISUPERMANIFOLDS

S. A. Duplij [1], M. V. Chursin [2]

[1] *Department of Physics and Technology, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*

[2] *Department of Mathematics and Mechanics, V. N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine*

Possibilities of noninvertible generalization of the Rogers modelled supermanifold are considered. It is shown, that a special reduction of the $B_2^{1,2}$ model does not lead to the Rogers $B_1^{1,2}$ supermanifold, nevertheless after some mapping it comes to the invertible supermanifold. Noninvertible generalization of the Rogers model is investigated, on $B_1^{1,2}$ a semigroup structure is introduced and its ideal properties are studied. That leads to the semisupermanifold in which noninvertibility is a result of many-valued transition functions.

KEY WORDS: supermanifold, mapping, transition function, noninvertibility, semigroup, many-valuedness,