УДК 539.12

РЕГУЛЯРНЫЕ СУПЕРМАТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ КВАНТОВОГО УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

С.А. Дуплий, А.С. Садовников
Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
E-mail: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua. *Internet*: http://www.math.uni-mannheim.de/~duplij
Поступила в редакцию 29 августа 2002 г.

Рассмотрены "теоретико-множественные"решения квантового уравнения Янга-Бакстера, играющего важную роль в теории квантовых групп и статистической физике. Исследованы суперматричные необратимые решения в линейном суперпространстве, которые определяют регулярную R-матрицу. Получены регулярные отображения Янга-Бакстера для случаев суперпространств размерности (1| 0) и (1|1) и необратимые блочные решения, которые строятся над обратимым блоком с помощью ослабления условий обратимости до регулярности, также приведены примеры.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: уравнение Янга-Бакстера, суперматрица, грассманова алгебра, регулярность.

Квантовое уравнение Янга-Бакстера [1, 2] является одним из основных уравнений математической физики и представляет собой фундамент современной теории квантовых групп [3, 4, 5, 6, 7]. Первоначально квантовое уравнение Янга-Бакстера появилось в статистической механике [8, 9], а затем в работах, посвященных квантовому методу обратной задачи рассеяния (см. например, [10]), что и послужило мотивацией термина "квантовая группа"[11]. Кроме того, квантовое уравнение Янга-Бакстера тесно связано с теорией узлов и инвариантами трехмерных многообразий [12], где оно эквивалентно уравнению кос [13].

Решениями квантового уравнения Янга-Бакстера с использованием формализма алгебр Хопфа [14, 15] являются "деформации"единичного решения (см. например, [2, 3, 16]). Однако возможен и другой тип решений, "теоретико-множественные"[17], которые являются перестановками (в конечном случае см. [18]) или отображениями множеств [19, 20, 21, 22]. Такие решения рассматривались в теории симплектических группоидов [23] и теории геометрических кристаллов [24]. Для них применялись термины "теоретико-множественные решения квантового уравнения Янга-Бакстера"[19, 20, 25], "рациональная теоретико-множественная R-матрица"[24], "преобразования Янга-Бакстера"[26] и "отображения Янга-Бакстера"[27], для краткости здесь мы будем использовать последний вариант.

В данной работе рассматриваются суперматричные линейные решения квантового уравнения Янга-Бакстера в классе регулярных R-матриц (см. [28, 29, 30]). Получен общий вид компонентных уравнений, рассмотрены различные частные случаи, а также одномерный предельный случай. Решения анализируются раскладыванием входящих в уравнение величин по степеням идеала, порожденного нечетной частью. Данный подход позволяет в принципе решить уравнения для любой размерности грассмановой алгебры (см., например [31, 32]).

РЕГУЛЯРНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

Пусть X — непустое множество, тогда определяем *двумерное* R-отображение $\mathsf{R} : X\times X \to X\times X$ как $\mathsf{R}\circ\{x,y\} = \{p(x,y), q(x,y)\}$, где компоненты $p(x,y)$, $q(x,y)$ являются бинарными операциями на X. Пара (X,R) называется *невырожденной*, если отображения $X \to X$, определяемые $x \to p(x,y)$ и $y \to q(x,y)$ являются биекциями. *Тривиальное* R-отображение определяется как $\mathsf{R}_{\mathrm{tr}} \circ \{x,y\} = \{x,y\}$, т.е. $p_{\mathrm{tr}}(x,y) = x$ и $q_{\mathrm{tr}}(x,y) = y$. Определим обратное R-отображение по формуле $\mathsf{R}^{21} = \sigma \circ \mathsf{R} \circ \sigma$, тогда $\mathsf{R}^{21} \circ \{x,y\} = \{q(y,x), p(y,x)\}$. Отображение R называется *унитарным* (обратимым), если

$$\mathsf{R}^{21} \circ \mathsf{R} = \mathrm{id}_{X\times X}. \tag{1}$$

В компонентах условие обратимости (1) имеет вид

$$q(q(x,y), p(x,y)) = x, \tag{2a}$$
$$p(q(x,y), p(x,y)) = y. \tag{2b}$$

Соотношения кроссинга определяются формулами

$$\mathsf{R}^{t_1} \circ \{q(x,y), y\} = \{p(x,y), x\},\quad \mathsf{R}^{t_2} \circ \{x, p(x,y)\} = \{y, q(x,y)\} \tag{3a}$$
$$\left(\mathsf{R}^{21}\right)^{t_1} \circ \{p(y,x), y\} = \{q(y,x), x\},\quad \left(\mathsf{R}^{21}\right)^{t_2} \circ \{x, q(y,x)\} = \{y, p(y,x)\}. \tag{3b}$$

Для обратимых невырожденных R-отображений имеет место кроссинг-симметрия

$$\mathsf{R}^{t_1} \circ \left(\mathsf{R}^{21}\right)^{t_1} = \mathsf{R}^{t_2} \circ \left(\mathsf{R}^{21}\right)^{t_2} = \mathrm{id}_{X \times X}. \tag{4}$$

Отметим, что операции t_i могут быть определены для всех отображений R, а не только таких, что компоненты $p(x,y)$ и $q(x,y)$ обратимы. Для этого R нужно трактовать не как отображение множества $X \times X$ в себя, а как линейный оператор на векторном пространстве $V \times V$, где V — линейная оболочка X [19].

Здесь мы ослабим обратимость и определим *регулярные* R-отображения (по фон Нейману [33], см. также [34, 35, 36, 37]), для которых вместо (1) имеем

$$\mathsf{R}_{reg} \circ \mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \mathsf{R}_{reg} = \mathsf{R}_{reg}, \tag{5}$$

или в компонентах

$$p\left(q\left(q\left(x,y\right), p\left(x,y\right)\right), p\left(q\left(x,y\right), p\left(x,y\right)\right)\right) = p\left(x,y\right), \tag{6a}$$

$$q\left(q\left(q\left(x,y\right), p\left(x,y\right)\right), p\left(q\left(x,y\right), p\left(x,y\right)\right)\right) = q\left(x,y\right). \tag{6b}$$

Соотношение (5) говорит о том, что R-отображение R_{reg}^{21} является *внутренним инверсным* для R_{reg} (см. например, [34, 35, 38]). Одновременно R_{reg}^{21} и *внешний инверсный*

$$\mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \mathsf{R}_{reg} \circ \mathsf{R}_{reg}^{21} = \mathsf{R}_{reg}^{21}, \tag{7}$$

поскольку компонентное разложение (7) отличается от (6) только заменой $x \leftrightarrow y$. В регулярном случае роль единицы $\mathrm{id}_{X \times X}$ играют два отображения

$$\mathsf{E} = \mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \mathsf{R}_{reg} = \begin{pmatrix} q\left(q\left(x,y\right), p\left(x,y\right)\right) \\ p\left(q\left(x,y\right), p\left(x,y\right)\right) \end{pmatrix}, \tag{8a}$$

$$\overline{\mathsf{E}} = \mathsf{R}_{reg} \circ \mathsf{R}_{reg}^{21} = \begin{pmatrix} p\left(q\left(y,x\right), p\left(y,x\right)\right) \\ q\left(q\left(y,x\right), p\left(y,x\right)\right) \end{pmatrix}, \tag{8b}$$

поскольку из (5)–(7) следует

$$\mathsf{R}_{reg} \circ \mathsf{E} = \mathsf{R}_{reg}, \quad \overline{\mathsf{E}} \circ \mathsf{R}_{reg} = \mathsf{R}_{reg}, \tag{9a}$$

$$\mathsf{E} \circ \mathsf{R}_{reg}^{21} = \mathsf{R}_{reg}^{21}, \quad \mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \overline{\mathsf{E}} = \mathsf{R}_{reg}^{21}, \tag{9b}$$

и это означает, что E — правая единица для R_{reg} и левая для R_{reg}^{21}, а $\overline{\mathsf{E}}$ —наоборот. Более того, E и $\overline{\mathsf{E}}$ — идемпотенты, потому что, например, $\mathsf{E} \circ \mathsf{E} = \mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \mathsf{R}_{reg} \circ \mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \mathsf{R}_{reg} = \mathsf{R}_{reg}^{21} \circ \mathsf{R}_{reg} = \mathsf{E}$.

Каждому двумерному R-отображению R можно сопоставить три *трехмерных* R-отображения $R^{ij} : X \times X \times X \to X \times X \times X$, которые изменяют только i-й и j-й сомножители, по формулам

$$R^{12} \circ \{x,y,z\} = \{p\left(x,y\right), q\left(x,y\right), z\}, \tag{10a}$$

$$R^{13} \circ \{x,y,z\} = \{p\left(x,z\right), y, q\left(x,z\right)\}, \tag{10b}$$

$$R^{23} \circ \{x,y,z\} = \{x, p\left(y,z\right), q\left(y,z\right)\}, \tag{10c}$$

что можно представить как $R^{12} = \mathsf{R}^{12} \times \mathrm{id}_X$ и т.д.

Двумерное R-отображение R назывется *отображением Янга-Бакстера* (или теоретико-множественной R-матрицей [24]), если соответствующие трехмерные R-отображения R^{ij} удовлетворяют *квантовому уравнению Янга-Бакстера*

$$R^{12} \circ R^{13} \circ R^{23} = R^{23} \circ R^{13} \circ R^{12}. \tag{11}$$

Если, в дополнение, отображение R удовлетворяет условию регулярности (5), то назовем его *регулярным* отображением Янга-Бакстера (или, для краткости, регулярной R-матрицей). В этом случае для R^{ij} вместо соотношений обратимости

$$R^{12} \circ R^{21} = \mathrm{id}_{X \times X \times X}, \quad R^{23} \circ R^{32} = \mathrm{id}_{X \times X \times X}, \quad R^{13} \circ R^{31} = \mathrm{id}_{X \times X \times X} \tag{12}$$

имеем соотношения регулярности

$$R_{reg}^{12} \circ R_{reg}^{21} \circ R_{reg}^{12} = R_{reg}^{12}, \quad R_{reg}^{23} \circ R_{reg}^{32} \circ R_{reg}^{23} = R_{reg}^{23}, \quad R_{reg}^{13} \circ R_{reg}^{31} \circ R_{reg}^{13} = R_{reg}^{13}. \tag{13}$$

В компонентном виде для (11) получаем

$$p\left(p\left(x,y\right),z\right)=p\left(p\left(x,q\left(y,z\right)\right),p\left(y,z\right)\right), \tag{14a}$$
$$p\left(q\left(x,y\right),q\left(p\left(x,y\right),z\right)\right)=q\left(p\left(x,q\left(y,z\right)\right),p\left(y,z\right)\right), \tag{14b}$$
$$q\left(q\left(x,y\right),q\left(p\left(x,y\right),z\right)\right)=q\left(x,q\left(y,z\right)\right). \tag{14c}$$

Решения этих уравнений зависят от природы множества X и функций $p\left(x,y\right), q\left(x,y\right)$. В простейшем нетривиальном случае (пример Любашенко из [17] — разделение переменных)

$$\mathsf{R}_{Lyubash}\circ\{x,y\}=\{p\left(x\right),q\left(y\right)\} \tag{15}$$

при $p\circ q=q\circ p$ отображение R является отображением Янга-Бакстера, т.е. соответствующие R^{ij} удовлетворяют (11). Если представить $\mathsf{R}_{Venkov}\circ\{x,y\}=\{x,x\circledast y\}$, где $\circledast$ — некоторая операция на множестве X, то уравнения Янга-Бакстера (11) дают дистрибутивное тождество (пример Венкова из [17]) $x\circledast(y\circledast z)=(x\circledast y)\circledast(x\circledast z)$. С другой стороны, теоретико-множественные решения уравнения Янга-Бакстера (11) на инверсных полугруппах изучались в [22, 39]. Так, если $X=S$ — инверсная полугруппа и $p:S\to S$, то для $\mathsf{R}_{Gu}\circ\{x,y\}=\left\{p\left(x\right),xyp\left(x\right)^{-1}\right\}$ уравнения Янга-Бакстера (11) эквивалентны условиям [39]

$$p\left(xyp\left(x\right)^{-1}\right)=p\left(x\right)p\left(y\right)p^{2}\left(x\right)^{-1},\quad xyzp\left(y\right)^{-1}p\left(x\right)^{-1}=xyp\left(y\right)^{-1}p\left(x\right)zp^{2}\left(x\right)^{-1}p\left(xyp\left(x\right)^{-1}\right)^{-1}. \tag{16}$$

Пусть S — полугруппа, и рассмотрим "скрученное"разделение переменных

$$\mathsf{R}_{opp}\circ\{x,y\}=\{p\left(y\right),q\left(x\right)\}. \tag{17}$$

Тогда для уравнений Янга-Бакстера (11) получаем

$$p\circ p=p, \tag{18a}$$
$$p\circ q\circ p=q\circ p\circ q \tag{18b}$$
$$q\circ q=q, \tag{18c}$$

т.е. p и q — идемпотентные отображения, связанные скрученным соотношением (18b). Регулярность (7) дает

$$p\circ p\circ p=p,\qquad q\circ q\circ q=q, \tag{19}$$

поэтому из (18a) и (18c) следует, что "скрученное"отображение Янга-Бакстера R_{opp} регулярно. В обратимом случае решение (18) равно $\mathrm{id}_{X\times X}$. Из первых уравнений (18a), (18c) следует, что отображения p и q являются проекторами и $p_{\mathrm{Im}\,p}=\mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,p}$, $q_{\mathrm{Im}\,q}=\mathrm{id}_{\mathrm{Im}\,q}$. Простейшим решением уравнений (18) будут коммутирующие отображения p и q, т.е. удолетворяющие $p\circ q=q\circ p$ (как и в примере Любашенко (15)). Другие решения можно получить, воспользовавшись тем, что p и q проекторы. Тогда уравнение (18b) можно записать на разбиении области определения и получить соответствующую совокупность уравнений

$-$	$\overline{h}$	id	$\overline{h}$	id
1	$\tilde{q}\cap\tilde{X}_{ph}$	p	$\tilde{p}\cap\tilde{X}_{qh}$	q
2	$\tilde{q}\cap\tilde{X}_{p}$	$q\circ p$	$\tilde{p}\cap\tilde{X}_{q}$	$p\circ q$
3	$\tilde{X}_{qh}$	q	$\tilde{X}_{ph}$	p
4	$q^{-1}(\tilde{X}_{ph})\cap\tilde{X}_{q}$	$p\circ q$	$p^{-1}(\tilde{X}_{qh})\cap\tilde{X}_{p}$	$q\circ p$
5	$q^{-1}(\tilde{X}_{p})\cap\tilde{X}_{q}$	$q\circ p\circ q$	$p^{-1}(\tilde{X}_{q})\cap\tilde{X}_{p}$	$p\circ q\circ p$

где $\overline{h}=\mathrm{Im}\,p\cap\mathrm{Im}\,q$, $\tilde{p}=\mathrm{Im}\,p\smallsetminus\overline{h}$, $\tilde{q}=\mathrm{Im}\,q\smallsetminus\overline{h}$, $\tilde{X}_{ph}=p^{-1}(\overline{h})$, $\tilde{X}_{p}=p^{-1}(\tilde{p})$, $\tilde{X}_{qh}=q^{-1}(\overline{h})$, $\tilde{X}_{q}=q^{-1}(\tilde{q})$.

ЛИНЕЙНЫЕ РЕГУЛЯРНЫЕ СУПЕРОТОБРАЖЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

Рассмотрим отображения Янга-Бакстера для случая, когда X представляет собой $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное суперпространство $\Lambda^{(n|m)}$ (над $\mathbb{K}$) с n четными и m нечетными координатами над грассмановой алгеброй $\Lambda_N=\Lambda_0\oplus\Lambda_1$ с N образующими (см. например, [31, 40]). Числовая часть a^0 элемента $a\in\Lambda_N$ определяется отображением $\varepsilon:\Lambda_N\to\mathbb{K}$. Отображение R — линейный морфизм пары суперпространств $\Lambda^{(n|m)}\times\Lambda^{(n|m)}\to\Lambda^{(n|m)}\times\Lambda^{(n|m)}$, который назовем *линейным суперотображением Янга-Бакстера*, если для соответствующих R^{ij} выполняется (11). Тогда имеем

$$p(x,y)=Cx+Dy,\qquad q(x,y)=Ax+By, \tag{20}$$

где $A,B,C,D \in \mathrm{Mat}_{\Lambda_N}(n|m)$ — суперматрицы размерности $(n|m)\times(n|m)$ над Λ_N, а x,y — элементы супермодуля размерности $(n|m)$. Отметим, что размерность $\Lambda^{(n|m)}$ как линейного пространства равна $2^{N-1}(m+n)$. Уравнение Янга-Бакстера (11) в терминах суперматриц A,B,C,D будет выглядеть так

$$BAC = A(1-A), \qquad CDB = D(1-D), \tag{21a}$$

$$[A,C] = DAC, \quad [D,B] = ADB, \quad [C,D] = CDA, \quad [B,A] = BAD, \tag{21b}$$

$$[B,C] = DAD - ADA, \tag{21c}$$

где $[X,Y] = XY - YX$. Условие обратимости (2) соответственно примет вид

$$A^2 + BC = 1, \quad D^2 + CB = 1, \quad AB + BD = 0, \quad CA + DC = 0. \tag{22}$$

Решения уравнений (21)–(22) для различных случаев конечных, абелевых и матричных групп рассматривались в [18, 19, 41, 42]. Подобные рассуждения справедливы и для нашего случая. Так, если суперматрицы B,C обратимы (числовая часть их березинианов отлична от нуля [31]), то решением (21)–(22) является четверка (A_0,B_0,C_0,D_0) такая, что $1-A_0^2$ обратимо и

$$B_0A_0B_0^{-1} = A_0(A_0+1)^{-1}, \quad C_0 = B_0^{-1}\left(1-A_0^2\right), \quad D_0 = A_0(A_0-1)^{-1}. \tag{23}$$

Здесь мы рассмотрим возможные ослабления обратимости линейного суперотображения Янга-Бакстера в “минимальном” варианте: заменой обратимости (1) на регулярность (5) (см. [29, 30]). Тогда вместо (22) для суперматриц A,B,C,D получаем систему

$$A^3 + ABC + BCA + BDC = A, \quad BD^2 + BCB + A^2B + ABD = B, \tag{24a}$$

$$D^3 + DCB + CBD + CAB = D, \quad CA^2 + CBC + DCA + D^2C = C. \tag{24b}$$

Рассмотрим нахождение регулярного линейного суперотображения Янга-Бакстера, т.е. решение уравнений (21) и (24) в различных частных случаях.

РЕДУЦИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ

Линейный аналог решения Любашенко (15) приводит к условиям на суперматрицы $A = D = 0$ и

$$CB = BC, \quad BCB = B, \quad CBC = C, \tag{25}$$

тогда R-матрица равна $\mathsf{R}^{(lin)}_{Lyubash}\circ\{x,y\} = \{Cx, By\}$. Отсюда следует, что суперматрицы B,C коммутируют и взаимоинверсны (см. например, [43, 44]).

Для линейного “скрученного” решения (17) получаем $B = C = 0$ и

$$A = A^2, \quad D = D^2, \tag{26a}$$

$$ADA = DAD, \tag{26b}$$

т. е. суперматрицы A,D идемпотентны и связаны “скрученным” соотношением (26b), и $\mathsf{R}^{(lin)}_{opp}\circ\{x,y\} = \{Dy, Ax\}$.

Более сложным является решение типа $p(x,y) = q(y,x)$, для которого в линейном случае имеем $A = D$ и $B = C$, тогда $\mathsf{R}^{(lin)}_{pq}\circ\{x,y\} = \{Bx + Ay, Ax + By\}$, и суперматрицы A,B удовлетворяют соотношениям, следующим из уравнения Янга-Бакстера и регулярности

$$[AB] = A^2B = -BA^2, \quad BAB = A - A^2, \tag{27a}$$

$$ABA = B - B^3, \quad AB^2 + B^2A + BAB = A - A^3. \tag{27b}$$

Эти уравнения можно решить в частных случаях конкретного выбора вида суперматриц.

НЕРЕДУЦИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ В $\Lambda^{(1|0)}$ И $\Lambda^{(1|1)}$

Рассмотрим решения среди гомоморфизмов $\Lambda^{(1|0)}$, тогда для числовой части возможны такие случаи

$$\begin{aligned}
&1)\ a^0 = d^0 = c^0 = b^0 = 0;\ 2)\ a^0 = 1, d^0 = 0, c^0 = b^0 = 0;\ 3)\ a^0 = 1, d^0 = 0, c^0 \neq 0, b^0 = 0;\\
&4)\ a^0 = 1, d^0 = 0, c^0 = 0, b^0 \neq 0;\ 5)\ a^0 = 0, d^0 = 1, c^0 = b^0 = 0;\ 6)\ a^0 = 0, d^0 = 1, c^0 \neq 0, b^0 \neq 0;\\
&7)\ a^0 = 0, d^0 = 1, c^0 = 0, b^0 \neq 0;\ 8)\ a^0 = d^0 = 1, c^0 = b^0 = 0;\ 9)\ a^0 = d^0 = 0, c^0b^0 = 1.
\end{aligned} \tag{28}$$

Выделив числовую часть, получим систему нильпотентных уравнений, в которых вид числовой части определяет вид одночленов первой степени. Тогда решениями будут

$$\begin{aligned}
1)\ a &= b=c=d=0;\, 2)\ a=1,d=0,c=0,b\in\Lambda_0,\ \text{при}\ \varepsilon(b)\neq 0;\, 3)\ a=1,d=0,b=0,c\in\Lambda_0,\ \text{при}\ \varepsilon(c)\neq 0;\\
4)\ a &= 1,d=0,bc=0,\ \text{при}\ b,c\in\Lambda_0,\ \varepsilon(b)=\varepsilon(c)=0;\, 5)\ a=0,d=1,c=0,b\in\Lambda_0,\ \text{при}\ \varepsilon(b)\neq 0;\\
6)\ a &= 0,d=1,b=0,c\in\Lambda_0,\ \text{при}\ \varepsilon(c)\neq 0;\, 7)\ a=0,d=1,\ b,c\in\Lambda_0,\ \text{при}\ \varepsilon(b)=\varepsilon(c)=0;\\
8)\ a &= d=1,b=c=0;\, 9)\ a^2=0,c=b^{-1},d=-a,\ \text{при}\ a,b,c,d\in\Lambda_0,\ \varepsilon(b)=\varepsilon(c)=1,\varepsilon(a)=\varepsilon(d)=0;
\end{aligned} \tag{29}$$

Заметим, что решение 9) — обратимое невырожденное решение типа (23).

В $\Lambda^{(1|1)}$ имеем $\mathrm{Hom}_{\Lambda_N}(\Lambda^{(1|1)},\Lambda^{(1|1)})\simeq \mathrm{Mat}_{\Lambda_N}(1|1)$, тогда $X=\begin{pmatrix}x_{11} & x_{12}\\ x_{21} & x_{22}\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{\Lambda_N}(1|1) \iff x_{11},x_{22}\in\Lambda_0, x_{12},x_{21}\in\Lambda_1$, где $X=A,B,C,D$ и $x=a,b,c,d$. Для числовой части $\varepsilon(X)=\begin{pmatrix}x^0_{11} & 0\\ 0 & x^0_{22}\end{pmatrix}$ уравнения (для x^0_{11} и x^0_{22}) независимы и их решения совпадают с решениями для числовой части $\Lambda^{(1|0)}$ (29), что дает восемьдесят один класс решений. Используя симметрии $A\longleftrightarrow D, C\longleftrightarrow B$ и $X\to\sigma X\sigma$, где $\sigma=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, количество независимых классов решений уменьшается (поскольку есть инвариантные относительно симметрий классы). Выделим в элементах числовую часть для рассмотрения членов первой степени. Обозначим за i-j) решение, отвечающее случаям i и j на местах 11 и 22 в $\mathrm{Mat}_{\Lambda_N}(1|1)$ соответственно. Тогда имеем: 1-1) Из регулярности следует $A=D=C=B=0$; 8-8) Из регулярности следует $A=D=1, C=B=0$; 9-9) Обратимое невырожденное решение.

Пусть $D^0=0$. Из второго уравнения (21a) разложением матриц по степени идеала легко показать, что $D=0$ при условии одновременного отличия числовой части B и C от нуля. Тогда уравнение Янга-Бакстера будет иметь вид

$$\begin{aligned}
A^2 &= A, &(30a)\\
[A,C] &= 0, &(30b)\\
[A.B] &= 0, &(30c)\\
[B,C] &= 0, &(30d)\\
ABC &= 0, &(30e)\\
BCB+AB &= B, &(30f)\\
CBC+CA &= C &(30g)
\end{aligned}$$

Видно, что классы решений симметричны относительно замены $C\leftrightarrow B$.

2-1) Уравнение (30a) дает $A=\begin{pmatrix}1-a_{12}a_{21} & a_{12}\\ a_{21} & -a_{12}a_{21}\end{pmatrix}$, уравнение (30b) и (30c) совместно с (30e) дает $b_{11}c_{11}=0, a_{12}a_{21}b_{11}=0, a_{21}a_{12}c_{22}=0$. Отсюда следует, что $BC=0$. $C=\begin{pmatrix}c_{11} & a_{12}c_{22}\\ a_{21}c_{11} & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}b_{11} & a_{12}b_{11}\\ a_{12}b_{11} & 0\end{pmatrix}$

2-2) Из уравнения (30a) и (30e) следует $A=1$ и $BC=0$.

4-1) Имеем
$A=\begin{pmatrix}1 & b_{12}(b^0+b_{11})^{-1}\\ 0 & 0\end{pmatrix}, D=C=0, B=\begin{pmatrix}b^0+b_{11} & b_{12}\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

4-2) Получаем
$A=1, D=0, BC=0, CB=0 \Longrightarrow B=\begin{pmatrix}b^0+b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}0 & -b_{12}(b^0+b_{11})^{-1}c_{22}\\ 0 & c_{22}\end{pmatrix}, b_{22}c_{22}=0, b_{21}c_{22}=0.$

4-3) $A=E, D=0, b^0c^0\neq 1$,

$$B=\begin{pmatrix}b^0+\left(b^0\right)^{-1}b_{12}b_{21} & b_{12}\\ b_{21} & -\left(b^0\right)^{-1}b_{12}b_{21}\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}-\left(b^0\right)^{-1}b_{12}c_{21} & -c^0\left(b^0\right)^{-1}b_{12}\\ c_{21} & c^0+\left(b^0\right)^{-1}b_{12}c_{21}\end{pmatrix},$$

Случай $c^0b^0=1$ должен рассматриватся отдельно.

4-4) $A=E, D=C=0, B$ — любая обратимая матрица.

8-1) $A=D=\begin{pmatrix}1-a_{12}a_{21} & a_{12}\\ a_{21} & -a_{12}a_{21}\end{pmatrix}, B=C=0.$

БЛОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ЯНГА-БАКСТЕРА

Для дальнейшего анализа уравнения Янга-Бакстера с регулярностью рассмотрим линейное решение для блочно-антитреугольных суперматриц $\begin{pmatrix} 0 & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ с условиями

$$x_{12}y_{21} = 0, \qquad x_{21}y_{12} = 0, \tag{31}$$

где $x, y = a, b, c, d$ (исключением будут условия $b_{12}b_{21} = 0, b_{21}b_{12} = 0$ и $c_{12}c_{21} = 0, c_{21}c_{12} = 0$, т.к. в уравнениях такие произведения не появляются). Такие суперматрицы и их полугруппы рассматривались в [45, 46, 47]. Условия вида $x_{12}y_{21} = 0$ есть условие сохранения антитреугольного вида, а условия $x_{21}y_{12} = 0$ приводят к тому, что уравнения для членов x_{22} имеет тот же вид, что и для всей матрицы. Поэтому на последние имеет смысл наложить какое либо дополнительнок условие, приводящее или упрощающее нахождение решений. Одним из таких условий, совместных с регулярностью есть обратимость с невырожденностью. Такие решения изучены в [19, 21], и уравнения, описывающие их, имеют вид (см. (23))

$$b_{22}a_{22}b_{22}^{-1} = a_{22}(a_{22} + 1)^{-1}, d_{22} = a_{22}(a_{22} - 1)^{-1}, c_{22} = b_{22}^{-1}(1 - a_{22}^2). \tag{32}$$

Далее элементы x_{22} , будем обозначать как x. Тогда уравнения Янга-Бакстера для блоков 12 и 21 примут вид линейных блочно-матричных уравнений

$$\begin{pmatrix} -cd & 0 & -d & c \\ 0 & (1-a)d & 0 & -b \\ -c & 0 & (1-d)a & 0 \\ b & -a & 0 & -ba \\ 0 & -cd & 0 & 1-d \\ 1-a & 0 & -ba & 0 \\ -ad & c & -b & da \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{21} \\ b_{21} \\ c_{21} \\ d_{21} \end{pmatrix} = 0, \tag{33}$$

$$\begin{pmatrix} a_{12} & b_{12} & c_{12} & d_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -db & c & -b & 0 & 1-a & -da \\ 0 & -d & 0 & a(1-d) & 0 & -ac & -c \\ d(1-a) & 0 & -a & 0 & -db & 0 & b \\ -c & b & -ac & 0 & 1-d & 0 & ad \end{pmatrix} = 0. \tag{34}$$

В блоках 11 получатся условия, появление которых говорит о том, что уравнений (31) для блочно-антитреугольных матриц недостаточно, чтобы их множество было алгебраически замкнуто

$$c_{12}da_{21} = 0, a_{12}db_{21} = 0, d_{12}ac_{21} = 0, b_{12}ad_{21} = 0, c_{12}db_{21} = 0, b_{12}ac_{21} = 0, a_{12}da_{21} - d_{12}ad_{21} = 0. \tag{35}$$

Условие регулярности в блоках 12,21,22 выполнится из-за обратимости решения в блоках 22, и в блоках 11 выполняется условие, аналагичное (35)

$$\begin{pmatrix} b_{12} & a_{12} \\ d_{12} & c_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{21} & d_{21} \\ a_{21} & b_{21} \end{pmatrix} = 0. \tag{36}$$

Используя (32) в виде коммутационного соотношения для b и a, можно показать зависимость строк 2 и 5, 3 и 6, а также применяя строки 2 и 3 зависимость 1 и 4 в (33); столбцов 1 и 5, 4 и 6, столбцов 2 и 3, используя 1 и 4 в (34) (умножением слева в (33) и справа в (34)). Разрешая оставшиеся системы методом Гаусса получим выражения

$$d_{21} = -b^{-1}ab_{21},\ a_{21} = ab^{-1}b_{21},\ c_{21} = (1 - a^2)b^{-2}b_{21}, \tag{37}$$

и

$$a_{12} = b_{12}b^{-1}a,\ d_{12} = b_{12}ab^{-1},\ c_{12} = b_{12}b^{-2}(1 - a^2). \tag{38}$$

Как видно из (37) и (38), нахождение решений сводятся к нахождению двух матриц. Из условий (31) $b_{21}c_{12} = 0$ или $c_{21}b_{12} = 0$ следует $b_{21}b_{12} = 0$, а значит и всех $x_{21}y_{12} = 0$ из (31). Оставшиеся условия (31) и (35), используя (38) и (37), получим

$$b_{12}ab^{-2}ab_{21} = 0,\ \ b_{12}ab^{-1}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-1}ab^{-1}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-1}a^2b^{-1}b_{21} = 0, \tag{39a}$$

$$b_{12}(1 - a^2)b^{-2}b_{21} = 0,\ \ b_{12}a(1 - a^2)b^{-2}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-2}(1 - a^2)b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-2}(1 - a^2)a(a - 1)^{-1}b_{21} = 0, \tag{39b}$$

$$b_{12}b^{-1}a(1 - a^2)b^{-2}b_{21} = 0,\ \ b_{12}ab^{-1}(1 - a^2)b^{-2}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-2}(1 - a^2)b^{-1}ab_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-2}(1 - a^2)ab^{-1}b_{21} = 0, \tag{39c}$$

$$b_{12}b^{-1}ab^{-1}b_{21} = 0,\ \ b_{12}ab^{-2}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-1}ab_{21} = 0,\ \ b_{12}ab^{-1}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-1}b_{21} = 0,\ \ b_{12}b^{-1}(1 - a^2)b^{-2}b_{21} = 0, \tag{39d}$$

Все условия (39) имеют вид $b_{12}G_ib_{21} = 0$, где G_i — матрица, принадлежащая алгебре, порожденной $a, b, b^{-1}, 1-a^2$. Множители G_i, за исключением четырех $b^{-2}(1-a^2), (1-a^2)b^{-2}, b^{-1}, b^{-1}(1-a^2)b^{-2}$ — нильпотентны. Как видно из уравнения (32) при переносе b^{-1} через рациональное выражение (хотя с определенным видом знаменателя) степень a в числителе сохраняется, а, следовательно, и степень нильпотентости по a. Приведем конкретные примеры.

1. Положим $b_{21} = 0$, b_{12} - любое, тогда

$$B = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} \\ 0 & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}b^{-2}(1-a^2) \\ 0 & b^{-1}(1-a^2) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}b^{-1}a \\ 0 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & b_{12}b^{-1} \\ 0 & a(a-1)^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Положим $b_{12} = 0$, b_{21} -любое, тогда

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ ab^{-1}b_{21} & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -b^{-1}ab_{21} & a(a-1)^{-1} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{21} & b \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ (1-a^2)b^{-2}b_{21} & b^{-1}(1-a^2) \end{pmatrix}.$$

3. $[a]_{ij} = \delta_{i+1,j}, [b]_{ij} = \binom{j}{i}, b_{12}(b-1) = 0, ab_{21} = 0 \Longrightarrow [b_{12}]_{ij} = e_i\delta_{jN}, [b_{21}]_{ij} = \delta_{i1}f_j, b_{12}b_{21} = 0, b_{21}b_{12} = 0 \Longrightarrow \sum_{i=1}^N j_ie_i = 0$ (N — размер матрицы a) $\Longrightarrow a_{21} = 0, d_{21} = 0, c_{21} = b_{21}, a_{12} = 0, d_{12} = 0, c_{12} = b_{12}.$

4. $[a]_{ij} = \delta_{i+1,j}, [b]_{ij} = \binom{j}{i}, ab_{21} = 0 \Longrightarrow [b_{21}]_{ij} = \delta_{i1}f_j, \sum_{i=1}^N j_i(b_{12}b^{-3})_ik = 0, (b_{12}b^{-3})_{i1} = 0 \wedge f_j = 0, a_{21} = d_{21} = 0,\ c_{21} = b_{21},\ a_{12} = b_{12}b^{-1}a, d_{12} = -b_{12}ab^{-1},\ c_{12} = b_{12}b^{-2}(1-a^2)$.

Таким образом, в данной работе мы рассмотрели необратимые "теоретико-множественные"решения квантового уравнения Янга-Бакстера в линейном суперпространстве. Введена регулярная R-матрица и исследованы ее свойства. Найдены отображения Янга-Бакстера для случаев $\Lambda^{(1|0)}$ и $\Lambda^{(1|1)}$, а также необратимые блочные решения, которые строятся над обратимым блоком с помощью ослабления условий обратимости до регулярности. Полученные решения могут быть использованы для исследования новых свойств квантового уравнения Янга-Бакстера, применения его в суперсимметричных расширениях квантовых групп [48, 49] и двумерных моделях теории поля [1, 50].

Один из авторов (С.Д.) благодарен Fang Li за плодотворные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baxter R. *Exactly Solved Models in Statistical Mechanics*. - London: *Academic Press*, 1982.

2. Lambe L. A., Radford D. E. *Introduction to the Quantum Yang-Baxter Equation and Quantum Groups: An Algebraic Approach*. - Dordrecht: *Kluwer*, 1997. - 292 p.

3. Kassel C. *Quantum Groups*. - New York: *Springer-Verlag*, 1995. - 531 p.

4. Shnider S., Sternberg S. *Quantum Groups*. - Boston: *International Press*, 1993. - 371 p.

5. Демидов Е. Е. *Квантовые группы*. - М.: *Факториал*, 1998. - 146 с.

6. Chari V., Pressley A. *A Guide to Quantum Groups*. - Cambridge: *Cambridge University Press*, 1996.

7. Majid S. *Foundations of Quantum Group Theory*. - Cambridge: *Cambridge University Press*, 1995.

8. Yang C. N. // *Some exact results for the many-body problem in one dimension with repulse delta-function interaction*. Phys. Rev. Lett. - 1967. - V. **19**. - P. 1312–1315.

9. Baxter R. J. // *Partition function for the eight-vertex model*. Ann. Phys. - 1972. - V. **70**. - P. 193–228.

10. Faddeev L. D., Reshetikhin N. Y., Takhtajan L. A. // *Quantum Lie groups and Lie algebras*. Leningrad Math. J. - 1990. - V. **1**. - P. 193–236.

11. Drinfeld V. G. // *Quantum groups*. Proceedings of the ICM, Berkeley. - Phode Island. *AMS*, 1987. - P. 798–820.

12. Turaev V. G. *Quantum Invariants of Knots and 3-Manifolds*. - Berlin: *W. de Greuter*, 1994.

13. Kauffman L. H. *Knots and Physics*. - Singapure: *World Sci.*, 1991.

14. Abe E. *Hopf Algebras*. - Cambridge: *Cambridge Univ. Press*, 1980. - 221 p.

15. Sweedler M. E. *Hopf Algebras*. - New York: *Benjamin*, 1969. - 336 p.

16. Luszig G. *Introduction to Quantum Groups*. - Boston: *Birkhдuser*, 1993.

17. Drinfeld V. G. // *On some unsolved problems in quantum group theory*. Lect. Notes. Math. - 1992. - V. **1510**. - P. 1–8.

18. Hietarinta J. // *Permutation-type solutions to the Yang-Baxter and other n-simplex equations*. J. Phys. - 1997. - V. **A30**. - P. 4757–4771.

19. Etingof P., Schedler T., Soloviev A. // *Set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*. Duke Math. J. - 1999. - № 2. - P. 169–209.

20. Lu J., Yan M., Zhu Y. // *On set-theoretical Yang-Baxter equation*. Duke. Math. J. - 2000. - V. **104**. - № 1. - P. 1–18.

21. Etingof P., Schedler T., Soloviev A. // *On set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*. - Cambridge, 1997. - 4 p. (*Preprint* / *MIT*, `q-alg/9707027`).

22. Gu P. // *A set-theoretical solution of the Yang-Baxter equation and "metahomomorphisms" of groups*. Chinese Sci. Bull. - 1997. - V. **42**. - № 15. - P. 1602–1606.

23. Weinstein A., Xu P. // *Classical solutions of the quantum Yang-Baxter equation*. Comm. Math. Phys. - 1992. - V. **148**. - P. 309–343.

24. Etingof P. // *Geometric crystals and set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation*. - Cambridge, 2001. - 10 p. (*Preprint* / *MIT*, `math.QA/0112278`).

25. Odesskii A. // *Set-theoretical solutions to the Yang-Baxter relation from factorization of matrix polynomials and θ-functions*. - Bonn, 2002. - 9 p. (*Preprint* / *Max-Planck-Institut fьr Mathematik*, `math.QA/0205051`).

26. Бухштабер В. М. // *Преобразования Янга-Бакстера*. Успехи мат. наук. - 1998. - Т. **53**. - № 6. - С. 1343–1379.

27. Veselov A. P. // *Yang-Baxter maps and integrable dynamics*. - Loughborough, 2002. - 15 p. (*Preprint* / *Loughborough Univ.*, `math.QA/0205335`).

28. Duplij S., Li F. // *On regular solutions of quantum Yang-Baxter equation and weak Hopf algebras*. Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2001. - V. **521**. - № 2(14). - P. 15–30.

29. Li F., Duplij S. // *Weak Hopf algebras and singular solutions of quantum Yang-Baxter equation*. Commun. Math. Phys. - 2002. - V. **225**. - № 1. - P. 191–217.

30. Duplij S., Li F. // *Regular solutions of quantum Yang-Baxter equation from weak Hopf algebras*. Czech. J. Phys. - 2001. - V. **51**. - № 12. - P. 1306–1311.

31. Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*. - М.: *Изд-во МГУ*, 1983. - 208 с.

32. Лейтес Д. А. // *Введение в теорию супермногообразий*. Успехи мат. наук. - 1980. - Т. **35**. - № 1. - С. 3–57.

33. von Neumann J. // *On regular rings*. Proc. Nat. Acad. Sci. USA. - 1936. - V. **22**. - P. 707–713.

34. Nashed M. Z. *Generalized Inverses and Applications*. - New York: *Academic Press*, 1976. - 321 p.

35. Rabson G. *The Generalized Inverses in Set Theory and Matrix Theory*. - Providence: *Amer. Math. Soc.*, 1969. - 324 p.

36. Davis D. L., Robinson D. W. // *Generalized inverses of morphisms*. Linear Algebra Appl. - 1972. - V. **5**. - P. 329–338.

37. Ben-Israel A., Greville T. N. E. *Generalized Inverses: Theory and Applications*. - New York: *Wiley*, 1974.

38. Rao C. R., Mitra S. K. *Generalized Inverse of Matrices and its Application*. - New York: *Wiley*, 1971. - 251 p.

39. Li F. // *Set-theoretical solutions of the Yang-Baxter equation in inverse semigroup*. - Hangzhou, 1998. - 4 p. (*Preprint* / *Zhijang Univ.*).

40. Лейтес Д. А. *Теория супермногообразий*. - Петрозаводск: *Карельский филиал АН СССР*, 1983. - 199 с.

41. Etingof P., Guralnick R., Soloviev A. // *Indecomposable set-theoretical solutions to the quantum Yang-Baxter equation on a set with prime number of elements*. - Cambridge, 2000. - 9 p. (*Preprint* / *MIT*, `math.QA/0007170`).

42. Schedler T. // *Construction and properties of set-theoretical solutions of the quantum Yang-Baxter equation*. - Cambrшdge, 1999. - 20 p. (*Preprint* / *Harward Univ.*).

43. Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп*. Т. **1**. - М.: *Мир*, 1972. - 283 с.

44. Petrich M. *Inverse Semigroups*. - New York: *Wiley*, 1984. - 214 p.

45. Дуплий С. А. *Полусупермногообразия и полугруппы*. - Харьков: *Крок*, 2000. - 220 с.

46. Duplij S. // *On supermatrix operator semigroups*. Quasigroups and Related Systems. - 2000. - V. **7**. - № 1. - P. 71–98.

47. Duplij S. // *Semigroups of supermatrices and one-parameter idempotent superoperators*. Journal of Kharkov National University, ser. Nuclei, Particles and Fields. - 2001. - V. **510**. - № 1(13). - P. 11–23.

48. Manin Y. // *Multiparametric quantum deformation of the general linear supergroup*. Comm. Math. Phys. - 1989. - V. **123**. - P. 123–135.

49. Manin Y. I. *Topics in Noncommutative Differential Geometry*. - Princeton: *Princeton University Press*, 1991.

50. Di Francesco P., Mathieu P., Sénéchal D. *Conformal Field Theory*. - Berlin: *Springer-Verlag*, 1997. - 890 p.

REGULAR SUPERMATRIX SOLUTIONS FOR QUANTUM YANG-BAXTER EQUATION

S.A. Duplij, A.S. Sadovnikov

Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University, Kharkov 61077, Ukraine

The "set-theoretical" solutions of the quantum Yang-Baxter equation playing important role in the theory of quantum groups and statistical physics are considered. Supermatrix noninvertible solutions in the linear superspace defining regular R-matrix are analyzed. Regular Yang-Baxter maps for the case of the (1| 0) and (1|1)-dimensional superspaces are received. Also noninvertible block solutions are constructed over invertible block by means of the weakening invertibility till regularity, and some examples are given.

KEY WORDS: Yang-Baxter equation, supermatrix, Grassmann algebra, regularity