УДК 539.12

СУПЕРКОНФОРМНО-ПОДОБНЫЕ СПЛЕТАЮЩИЕ ЧЕТНОСТЬ МОРФИЗМЫ, ДЕФОРМАЦИИ И НЕЧЕТНЫЕ КОЦИКЛЫ

С. А. Дуплий
Лаборатория ядерной физики, физико-технический факультет
Харьковский государственный университет, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 310077, Украина
Поступила в редакцию 26 августа 1999 г.

На (1|1) полусупермногообразиях вводятся аналоги суперконформных морфизмов — сплетающие четность касательного пространства (TPt) преобразования. С учетом их вклада найдены смешанные условия согласованности для нечетных коциклов, которые можно трактовать как нечетный суперaналог якобиана, а также TPt деформации и нечетные аналог препятствий.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: суперконформное преобразование, коцикл, препятствие, деформация.

Идея суперконформной симметрии [1] играет ключевую роль в построении суперструнных моделей элементарных частиц [2], в рамках которых удается объединить непротиворечивым образом все фундаментальные взаимодействия (см. напр., [3]). В последнее время значение суперконформной симметрии было переосмыслено из-за ее исключительной роли в построении M-теории [4], описании D-бран [5] и черных дыр [6], а также в ее связи с предельными теоремами в пространствах анти-Де Ситтера [7]. С другой стороны, теория деформаций супермногообразий [8, 9] представляет собой необходимую составляющую анализа суперструн и суперконформных теорий поля в терминах суперримановых поверхностей [10, 11] и, в то же время, интересна с математической точки зрения [12] как суперобобщение соответствующей теории для обычных комплексных многообразий [13]. В работах [14, 15] рассматривалось необратимое расширение $N = 1$ суперконформной геометрии на суперплоскости и изучались новые полугрупповые свойства подобных конструкций [16, 17]. Здесь мы изучим некоторые особенности координатного описания и деформаций полусупермногообразий [18], возникающие при учете сплетающих четность преобразований [16, 19], а также проследим, каким образом возникают новые типы условий согласованности и коциклов.

СМЕШАННЫЕ УСЛОВИЯ СОГЛАСОВАННОСТИ И НЕЧЕТНЫЕ АНАЛОГИ КОЦИКЛОВ

Пусть имеется (1|0)-мерное комплексное полусупермногообразие $\mathscr{M}$ (в смысле [18]), представленное в виде полуатласа $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{\alpha} \{\mathscr{U}_\alpha\}$ с локальными координатами z_α. Тогда многие основные формулы и теоремы, связанные с деформациями и коциклами, будут повторять соответствующие формулы несуперсимметричного случая [13]. Единственное добавление состоит в учете наряду с обратимыми необратимых преобразований в качестве функций перехода $z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta)$ с ненулевым, но необратимым нильпотентным якобианом $J_{\alpha\beta} = \partial z_\alpha / \partial z_\beta$, т. е. $J_{\alpha\beta} \neq 0$, но $\epsilon\,[J_{\alpha\beta}] = 0$, где ϵ представляет собой числовое отображение [20], зануляющее все нильпотентные генераторы подстилающей супералгебры. Этот случай является промежуточным между стандартным обратимым, когда $J_{\alpha\beta} \neq 0$, и предельным необратимым, когда $J_{\alpha\beta} = 0$. На пересечении трех суперобластей $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ для последовательных переходов $z_\gamma \to z_\beta \to z_\alpha$ имеем стандартное условие согласования $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$ или в локальных координатах $f_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma))$. При этом соответствующие якобианы преобразуются мультипликативно (с поточечным умножением)

$$J_{\alpha\gamma} = J_{\alpha\beta} \cdot J_{\beta\gamma}, \tag{1}$$

что отвечает касательному расслоению на $\mathscr{M}$ [13]. Для (1|1)-мерного полусупермногообразия с локальными координатами $Z_\alpha = (z_\alpha, \theta_\alpha)$ роль якобиана в обратимом суперконформном случае играет березиниан перехода $Z_\beta \to Z_\alpha$ (см. напр. [21]). Однако для выполнения условия коцикличности, аналогичного (1), необходимо рассматривать редуцированные преобразования. Здесь мы покажем, что при ослаблении обратимости возникает не один вариант суперобобщения условия коцикличности (1) [22], а два [17] в соответствие с двумя типами редуцированных преобразований [19, 23]. Для этого запишем общее преобразование (1|1)-мерного касательного вектора $T\mathscr{M}|_\beta \to T\mathscr{M}|_\alpha$ в матричном виде

$$\begin{pmatrix} \partial_\beta \\ D_\beta \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ D_\alpha \end{pmatrix}, \mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Q_{\alpha\beta} & \partial_\beta\theta_\alpha \\ \varDelta_{\alpha\beta} & D_\beta\theta_\alpha \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \partial_\beta z_\alpha - \partial_\beta\theta_\alpha \cdot \theta_\alpha, \quad \varDelta_{\alpha\beta} = D_\beta z_\alpha - D_\beta\theta_\alpha \cdot \theta_\alpha, \tag{3}$$

где $D_\alpha = \partial/\partial\theta_\alpha + \theta_\alpha\partial_\alpha, \partial_\alpha = \partial/\partial z_\alpha$ (нет суммирования). При двух последовательных преобразованиях $Z_\gamma \to Z_\beta \to Z_\alpha$ на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ для суперматриц $\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}$ из (2) имеем условие коцикличности

$$\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\gamma} = \mathrm{P}^{SA}_{\beta\gamma} \cdot \mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}. \tag{4}$$

Отсюда следуют выражения для нечетной и четной производных конечной нечетной координаты

$$D_\gamma\theta_\alpha = D_\gamma\theta_\beta \cdot D_\beta\theta_\alpha + \varDelta_{\beta\gamma} \cdot \partial_\beta\theta_\alpha, \ \partial_\gamma\theta_\alpha = \partial_\gamma\theta_\beta \cdot D_\beta\theta_\alpha + Q_{\beta\gamma} \cdot \partial_\beta\theta_\alpha. \tag{5}$$

Легко видеть, что зануление вторых слагаемых в (5)

$$\Delta_{\beta\gamma} = 0, \ (\mathsf{SCf}) \tag{6}$$

$$Q_{\beta\gamma} = 0, \ (\mathsf{TPt}) \tag{7}$$

приводит к двум (!), а не к одному, как в стандартном случае [22], условиям коцикла и соответствующим двум редукциям суперматрицы $\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}$ (см. [17, 19]). Уравнения (6)–(7) определяют суперконформные (SCf) и сплетающие четность (TPt) преобразования соответственно [15, 19]. Действие сплетающих четность преобразований в касательном и кокасательном (1|1)-пространствах определяется как

$$\begin{cases} \partial_\beta = \partial_\beta \theta^{TPt}_\alpha \cdot D_\alpha, \\ dZ_\alpha = d\theta_\beta \cdot \Delta^{TPt}_{\alpha\beta}, \end{cases} \tag{8}$$

где $\Delta^{TPt}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \Delta_{\alpha\beta}|_{Q_{\alpha\beta}=0}$ — является нечетной и нильпотентной величиной. Поэтому соотношения (8) свидетельствуют о том, что TPt преобразования, удовлетворяющие условию $Q_{\alpha\beta} = 0$, действительно изменяют четность касательного и кокасательного суперпространств $T\mathbb{C}^{1|0} \to T\mathbb{C}^{0|1}$ и $T^*\mathbb{C}^{0|1} \to T^*\mathbb{C}^{1|0}$ [17]. Тогда вместо одного условия коцикличности для суперматриц $\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}$ (4) имеем два условия

$$\mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\gamma} = \mathrm{P}^{SCf}_{\beta\gamma} \cdot \mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta}, \quad \mathrm{P}^{TPt}_{\alpha\gamma} = \mathrm{P}^{TPt}_{\beta\gamma} \cdot \mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta}. \tag{9}$$

для редуцированных различным образом (треугольных и антитреугольных) суперматриц

$$\mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Q^{SCf}_{\alpha\beta} & \partial_\beta \theta^{SCf}_\alpha \\ 0 & D_\beta \theta^{SCf}_\alpha \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P}^{TPt}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\beta \theta^{TPt}_\alpha \\ \Delta^{TPt}_{\alpha\beta} & D_\beta \theta^{TPt}_\alpha \end{pmatrix}, \tag{10}$$

где $Q^{SCf}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} Q_{\alpha\beta}|_{\Delta_{\alpha\beta}=0}$. Таким образом, из (5)–(9) следует, что при ослаблении обратимости для условия коцикличности (1) имеется два возможных суперобобщения — четное и нечетное

$$\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\gamma} = \boldsymbol{J}^{SCf}_{\beta\gamma} \cdot \boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} \tag{11}$$

$$\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\gamma} = \mathcal{J}^{TPt}_{\beta\gamma} \cdot \boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} \tag{12}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} D_\beta \theta^{SCf}_\alpha, \tag{13}$$

$$\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \partial_\beta \theta^{TPt}_\alpha. \tag{14}$$

Из (14) следует, что $\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta}$ является нечетным и, следовательно, нильпотентным. Назовем $\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta}$ и $\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta}$ четным и нечетным коциклом соответственно, а условие (12) — смешанным условием согласованности (условием коцикла). Все рассмотренные условия согласованности можно представить также в более наглядном виде, отражающем нетривиальную четно-нечетную симметрию между коциклами,

$$\partial_\gamma z_\alpha = \partial_\gamma z_\beta \cdot \partial_\beta z_\alpha \stackrel{SUSY}{\Longrightarrow} \begin{cases} D_\gamma \theta^{SCf}_\alpha = D_\gamma \theta^{SCf}_\beta \cdot D_\beta \theta^{SCf}_\alpha, & (\mathsf{SCf}) \\ \partial_\gamma \theta^{TPt}_\alpha = \partial_\gamma \theta^{TPt}_\beta \cdot D_\beta \theta^{SCf}_\alpha, & (\mathsf{TPt}) \end{cases} \tag{15}$$

где индексы SCf и TPt отвечают типу редуцированного преобразования $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ между соответствующими суперобластями $\mathscr{U}_\alpha$ и $\mathscr{U}_\beta$. По терминологии [24] коциклы, удовлетворяющие соотношениям типа (1) и (11)–(12) называются склеивающими коциклами соответствующего расслоения (в данном случае касательного).

Существенным для суперструнных приложений (см., напр., [25]) фактом является то, что четный коцикл $\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta}$ (13) совпадает с березинианом — четным супераналогом якобиана — суперконформного (SCf) $Z_\beta \to Z_\alpha$ преобразования $\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} = \operatorname{Ber} \mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta}$. Это позволяет построить каноническое расслоение с функциями перехода $\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta}$, а также соответствующее линейное расслоение [26, 27]. Рассматривая подобную трактовку и для (1), можно придать похожий смысл также и нечетному коциклу(14): нечетный коцикл $\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta}$ можно трактовать как нечетный супераналог якобиана для сплетающих четность (TPt) преобразований $Z_\beta \to Z_\alpha$ (в то время, как березиниан [21] есть четный супераналог якобиана). Формула (12) может рассматриваться не только как условие коцикличности, но и как закон умножения четного и нечетного супераналогов якобинана. Тогда соответствующие аналоги канонического и линейного расслоений будут обладать необычными свойствами, например, кручение четности и нильпотентность коциклов.

ДЕФОРМАЦИИ И СПЛЕТАЮЩИЕ ЧЕТНОСТЬ МОРФИЗМЫ

Возникновение дополнительного условия согласования (9) и нечетного условия коцикличности (12) приводит к соответствующей модификации стандартных условий деформации в локальном подходе [10,12]. Это, в свою очередь, играет важную роль в суперструнных вычислениях [28] для определения свойств пространства супермодулей [29] и формулировки суперобобщения фундаментальной теоремы Римана-Роха [26]. Здесь мы переформулируем стандартный подход, используя альтернативной параметризацию (см. [15]), что позволит учесть также и нечетные условия коцикличности (9) и (12). В несуперсимметричном случае [13] деформация условия согласованности $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$ в виде $z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta) + t b_{\alpha\beta}(z_\beta)$ приводит к тому же условию для недеформинрованных функций $f_{\alpha\beta}(z_\beta)$ и к уравнению для деформаций $b_{\alpha\beta}(z_\beta)$

$$b_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = b_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma)) + f'_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma)) \cdot b_{\beta\gamma}(z_\gamma). \tag{16}$$

Умножим это соотношение тензорно на $\partial/\partial z_\alpha$ и воспользуемся $f'_{\alpha\beta} = \partial z_\alpha / \partial z_\beta$, тогда получаем условие согласованности в виде

$$b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + b_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\beta} - b_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = 0, \tag{17}$$

которое показывает, что $\left\{ b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right\}$ действительно является коциклом [13]. При инфинитезимальных преобразованиях $z_\alpha \longmapsto z_\alpha + t s_\alpha(z_\alpha)$ коцикл (17) изменяется на кограницу

$$\left\{ b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right\} \longmapsto \left\{ b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + s_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - s_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right\}, \tag{18}$$

что определяет когомологический класс (Кодайры-Спенсера) деформаций первого порядка [13]. В суперконформном случае [10] рассматриваются недеформированные расщепленные преобразования, имеющие в стандартной параметризации [25] вид

$$\mathsf{SCf}_{split}\colon \begin{cases} z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta), \\ \theta_\alpha = \theta_\beta \cdot \sqrt{f'_{\alpha\beta}(z_\beta)}, \end{cases} \tag{19}$$

которые не содержат иных нечетных параметров, кроме θ_α. Поэтому расщепленные суперримановы поверхности, имеющие преобразования (19) в качестве функций склейки содержат ту же информацию, что и обычные римановы поверхности, наделенные спиновой структурой, которая определяется знаком квадратного корня [30]. Теперь суперконформные деформации определяются двумя параметрами — четным t и нечетным τ [10] — и двумя четными функциями $b_{\alpha\beta}(z_\beta)$ и $c_{\alpha\beta}(z_\beta)$ следующим образом

$$z_\alpha^{SCf}(t,\tau) = f_{\alpha\beta}(z_\beta) + t b_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\beta \cdot \tau c_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot F_{\alpha\beta}(z_\beta, t), \tag{20}$$

$$\theta_\alpha^{SCf}(t,\tau) = \tau c_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\beta \cdot F_{\alpha\beta}(z_\beta, t), \tag{21}$$

где $F_{\alpha\beta}(z_\beta, t) = \sqrt{f'_{\alpha\beta}(z_\beta) + t b'_{\alpha\beta}(z_\beta)}$. Четное условие согласованности (11) на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ записывается в компонентном виде

$$z_\alpha^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma) = z_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma), \theta_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma) \right), \theta_\alpha^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma) = \theta_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma), \theta_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma) \right), \tag{22}$$

что в первом порядке по t, τ (здесь эти дополнительные аргументы опущены, но подразумеваются) приводит к уравнениям $f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma}$ и (16) плюс дополнительное уравнение на функцию $c_{\alpha\beta}(z_\beta)$

$$c_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = c_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma)) + c_{\beta\gamma}(z_\gamma) \cdot \sqrt{f'_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma))}. \tag{23}$$

Тензорное умножение на $\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}$ в дополнение к (18) и использование (19) дает

$$c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + c_{\beta\gamma}\theta_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} - c_{\alpha\gamma}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} = 0. \tag{24}$$

Уравнения (17) и (24) свидетельствуют о том, что суперконформные деформации описываются двумя коциклами $\left\{ b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right\}$ и $\left\{ c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right\}$, которые при суперконформных репараметризациях

$$z_\alpha \overset{SCf}{\longmapsto} z_\alpha + t s_\alpha(z_\alpha) + \theta_\alpha \cdot \tau r_\alpha(z_\alpha) \cdot \sqrt{1 + t s'_\alpha(z_\alpha)}, \tag{25}$$

$$\theta_\alpha \overset{SCf}{\longmapsto} \tau r_\alpha(z_\alpha) + \theta_\alpha \cdot \sqrt{1 + t s'_\alpha(z_\alpha)}, \tag{26}$$

изменяются на кограницы (18) и

$$\left\{ c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} \right\} \longmapsto \left\{ c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + r_\alpha \theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - r_\beta \theta_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} \right\}, \tag{27}$$

что определяет соответствующие когомологические классы и пространство супермодулей [31].

Переформулируем теперь супердеформации таким образом, чтобы можно было учесть также и нечетные условия согласованности (12). Для этого воспользуемся альтернативной параметризацией (см. [15,19]) и запишем редуцированные SCf и TPt преобразования на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ в едином виде

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\alpha \cdot \chi_{\alpha\beta}(z_\beta), \tag{28}$$

$$\theta_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}(z_\beta), \tag{29}$$

где независимыми являются функции $g_{\alpha\beta}(z_\beta), \psi_{\alpha\beta}(z_\beta)$ (в отличие от стандартной параметризации функциями $f_{\alpha\beta}(z_\beta), \psi_{\alpha\beta}(z_\beta)$ [11]), и через них выражаются остальные функции $g_{\alpha\beta}(z_\beta), \psi_{\alpha\beta}(z_\beta)$ по формулам

$$\mathsf{SCf} \quad : \quad \begin{cases} f_{\alpha\beta}^{SCf\,\prime}(z_\beta) = g^2_{\alpha\beta}(z_\beta) + \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \\ \chi_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta) = g_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \end{cases} \tag{30}$$

$$\mathsf{TPt} \quad : \quad \begin{cases} f_{\alpha\beta}^{TPt\,\prime}(z_\beta) = \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \\ \chi_{\alpha\beta}^{TPt\,\prime}(z_\beta) = g'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta) - g_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta), \end{cases} \tag{31}$$

которые можно объединить [17]

$$\begin{cases} f_{\alpha\beta,\mathrm{m}}^{SCf\,\prime}(z_\beta) = g_{\alpha\beta}^2(z_\beta) + \left(\mathrm{m} + \dfrac{1}{2}\right) \cdot \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \\ \chi_{\alpha\beta,\mathrm{m}}^{TPt\,\prime}(z_\beta) = g'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta) + 2\mathrm{m} \cdot g_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta), \end{cases} \tag{32}$$

где $\mathrm{m} = \begin{cases} +1/2, & \mathsf{SCf}, \\ -1/2, & \mathsf{TPt}, \end{cases}$ трактуется как проекция некоторого “спина редукции”, равного половине, который переключает тип преобразования [17, 19]. Отсюда следует, расщепленное SCf преобразование в альтернативной параметризации (19) имеет вид

$$\mathsf{SCf}_{split}\colon \begin{cases} z_\alpha = \displaystyle\int g_{\alpha\beta}^2(z_\beta)\, dz_\beta, \\ \theta_\alpha = \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}(z_\beta), \end{cases} \tag{33}$$

в то время как TPt аналогом (33) является вложение $2 \hookrightarrow 1$ [32], т. е.

$$\mathsf{TPt}_{split}\colon \begin{cases} z_\alpha = 0, \\ \theta_\alpha = \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}(z_\beta). \end{cases} \tag{34}$$

Теперь смешанные как SCf, так и TPt деформации будут определяться теми же параметрами t, τ, но уже парой четных функций $p_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ (вместо $b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ в (20)–(21)) следующим образом

$$z_\alpha(t,\tau) = f_{\alpha\beta}(z_\beta, t, \tau) + \theta_\beta \cdot \chi_{\alpha\beta}(z_\beta, t, \tau), \tag{35}$$

$$\theta_\alpha(t,\tau) = \tau c_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\beta \cdot (g_{\alpha\beta}(z_\beta) + t p_{\alpha\beta}(z_\beta)), \tag{36}$$

т. е. вместо $f_{\alpha\beta}(z_\beta)$ изначально деформируется $g_{\alpha\beta}(z_\beta)$, а остальные функции $f_{\alpha\beta}(z_\beta, t, \tau), \chi_{\alpha\beta}(z_\beta, t, \tau)$ находятся из соответствующих уравнений (31). Теперь с учетом (11)–(12) наряду с четными (22) получаем нечетные условия согласованности для деформированных функций (дополнительные аргументы t, τ снова опущены)

$$z_\alpha^{TPt}(z_\gamma, \theta_\gamma) = z_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{TPt}(z_\gamma, \theta_\gamma), \theta_\beta^{TPt}(z_\gamma, \theta_\gamma)\right),\ \theta_\alpha^{TPt}(z_\gamma, \theta_\gamma) = \theta_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{TPt}(z_\gamma, \theta_\gamma), \theta_\beta^{TPt}(z_\gamma, \theta_\gamma)\right). \tag{37}$$

Разложение этих уравнений по t, τ, аналогичное четному случаю (22), дает

$$g_{\alpha\gamma}^{TPt}(z_\gamma) = g_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta) \cdot g_{\beta\gamma}^{TPt}(z_\gamma), \tag{38}$$

$$c_{\alpha\gamma}^{TPt}(z_\gamma) = c_{\alpha\beta}^{SCf}\left(f_{\beta\gamma}^{TPt}(z_\gamma)\right) + g_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta) \cdot c_{\beta\gamma}^{TPt}(z_\gamma), \tag{39}$$

$$p_{\alpha\gamma}^{TPt}(z_\gamma) = p_{\alpha\beta}^{SCf}\left(f_{\beta\gamma}^{TPt}(z_\gamma)\right) \cdot g_{\beta\gamma}^{TPt}(z_\gamma) + g_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta) \cdot p_{\beta\gamma}^{TPt}(z_\gamma). \tag{40}$$

Первое уравнение (38) является условием коцикличности для функций $g_{\alpha\beta}(z_\beta)$ и говорит о том, что эти функции реализуют соответствующий смешанный (несимметричный) аналог линейного расслоения над суперримановыми поверхностями [27]. Уравнение (39) аналогично уравнению (23), если учесть, что преобразование $z_\beta \to z_\alpha$ как для четного условия согласованности, так и для нечетного (37) является SCf преобразованием, в котором выполняется соотношение

$$g_{\alpha\beta}^{SCf\,2}(z_\beta) = f_{\alpha\beta}^{SCf\,\prime}(z_\beta) \tag{41}$$

(см. также (19)). В четном случае (когда все три преобразования $z_\gamma \to z_\beta \to z_\alpha$ являются SCf преобразованиями) из уравнения (40) при $\epsilon\left[g_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta)\right] \neq 0$, если для всех трех преходов воспользоваться подстановкой

$$p_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta) = \frac{b_{\alpha\beta}^{SCf\,\prime}(z_\beta)}{2 g_{\alpha\beta}^{SCf}(z_\beta)}, \tag{42}$$

после интегрирования можно получить

$$b_{\alpha\gamma}^{SCf}(z_\gamma) = b_{\alpha\beta}^{SCf}\left(f_{\beta\gamma}^{SCf}(z_\gamma)\right) + g_{\alpha\beta}^{SCf}\left(f_{\beta\gamma}^{SCf}(z_\gamma)\right) \cdot b_{\beta\gamma}^{SCf}(z_\gamma), \tag{43}$$

что совпадает с (16) при учете (41). Применяя полученные соотношения можно построить TPt-аналоги спектральных последовательностей и соответствующих комплексов со сплетением четности по аналогии со стандартными SCf [33].

НЕЧЕТНЫЕ АНАЛОГИ ПРЕПЯТСТВИЙ И СМЕШАННЫЕ θ-КОЦИКЛЫ

Препятствия [34] играют важную роль в пониманиии внутренней структуры супермногообразий [21] и суперконформных многообразий [35].

Стандартное препятствие [34] можно вычислить как отклонение левой части соответствующей формулы согласованности (например, (17), (24)) от нуля. Для функций $b_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ (17) и $c_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ (24) имеем

$$\hat{\mathsf{D}}_{\alpha\beta\gamma}(b) = b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + b_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\beta} - b_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\alpha},\ \hat{\mathsf{D}}_{\alpha\beta\gamma}(c) = c_{\alpha\beta}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + c_{\beta\gamma}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial z_\beta} - c_{\alpha\gamma}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}. \tag{44}$$

В суперконформном случае для $b^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta)$ выполняется соотношение (43), тогда получаем для препятствия $\hat{\mathsf{D}}^{SCf}_{\alpha\beta\gamma}(b) = \left(g^{SCf\,2}_{\alpha\beta}(z_\alpha) \dfrac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} - 1 \right) \cdot b^{SCf}_{\beta\gamma}(z_\alpha) \dfrac{\partial}{\partial z_\beta}$. Отсюда следует, что, если преобразование $z_\beta \to z_\alpha$ является обратимым SCf преобразованием, то препятствие $\hat{\mathsf{D}}^{SCf}_{\alpha\beta\gamma}(b)$ равно нулю.

Рассмотрение редуцированных преобразований (SCf и TPt единым образом) в альтернативной параметризации приводит к возможности определения наряду с коциклами по четной переменной z (например, (17) и (24)) также коциклов по нечетной переменной θ. Назовем θ-коциклом конструкцию, аналогичную четному коциклу, в которой тензорное умножение производится на нечетное векторное поле $\partial/\partial\theta_\alpha$ вместо $\partial/\partial z_\alpha$. Тогда рассмотрим условия согласованности, связанные с деформациями $c_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ и $p_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ (39)–(40) в альтернативной параметризации, не конкретизируя вид редуцированного преобразования. Умножим тензорно уравнение (39) на $\partial/\partial\theta_\alpha$ и воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial}{\partial \theta_\beta} = g_{\alpha\beta}(z_\beta) \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}, \tag{45}$$

которое следует из вторых уравнений в (33)–(34), тогда получим

$$c_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} = c_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + c_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta_\beta}. \tag{46}$$

Поэтому $\left\{ c_{\alpha\beta} \dfrac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \right\}$ является θ-коциклом. Аналогично, умножив (40) на $\theta_\alpha \partial/\partial\theta_\alpha$, получаем

$$p_{\alpha\gamma}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} = g_{\beta\gamma} \cdot p_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + g_{\alpha\beta} \cdot p_{\beta\gamma}\theta_\beta \frac{\partial}{\partial \theta_\beta}. \tag{47}$$

Отсюда следует, что $\left\{ p_{\alpha\beta}\theta_\alpha \dfrac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \right\}$ не является θ-коциклом из-за подкручивающих множителей $g_{\beta\gamma}$ и $g_{\alpha\beta}$ в (47). Для характеризации отличия набора функций на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ от θ-коцикла, введем θ-аналог препятствий (44). Назовем θ-препятствием степень незамкнутости набора соответствующих функций (с нечетным векторным полем $\partial/\partial\theta_\alpha$) на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$. Тогда для $\left\{ c_{\alpha\beta} \dfrac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \right\}$ и $\left\{ p_{\alpha\beta}\theta_\alpha \dfrac{\partial}{\partial \theta_\alpha} \right\}$ имеем θ-препятствия

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(c) = c_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + c_{\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} - c_{\alpha\gamma} \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}, \quad \hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p) = p_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha} + p_{\beta\gamma}\theta_\beta \frac{\partial}{\partial \theta_\beta} - p_{\alpha\gamma}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial \theta_\alpha}. \tag{48}$$

Из (46) следует, что θ-препятствие $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(c)$ равно нулю. Вычислим θ-препятствие $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p)$. Для этого воспользуемся (45) и получим

$$\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p) = \left[p_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot (g_{\beta\gamma}(z_\gamma) - 1) + p_{\beta\gamma}(z_\gamma) \cdot (g_{\alpha\beta}(z_\beta) - 1) \right] \cdot \theta_\beta \frac{\partial}{\partial \theta_\beta}. \tag{49}$$

Тогда в силу произвольности $p_{\alpha\beta}(z_\beta)$ справедливо, что θ-препятствие $\hat{\boldsymbol{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p)$ обращается в нуль для преобразований, не меняющих нечетную координату, т. е. для которых выполняется $g_{\alpha\beta}(z_\beta) = 1$. Таким образом, введенные θ-препятствия и θ-коциклы являются дополнительными характеристиками полусупермногообразий, для которых функциями склейки служат редуцированные преобразования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Книжник В. Г. // *Суперконформные алгебры в двух измерениях.* Теор. мат. физ. 1986. Т. **66**. № 1. С. 68–72.
2. Грин М., Шварц Д., Виттен Э. Теория суперструн. Введение. Т. **1**. М.. *Мир*, 1990. 518 с.
3. Schwarz J. H., Seiberg N. // *String theory, supersymmetry, unification, and all that.* Princeton, 1998. 22 p. (*Preprint* / *Inst. Adv. Study*; IASSNS-HEP-98/27, `hep-th/9803179`).
4. Kaku M. Introduction to Superstrings and M-Theory. Berlin. *Springer-Verlag*, 1998. 587 p.
5. de Wit B. // *Supermembranes and super matrix models.* Utrecht, 1999. 41 p. (*Preprint* / *Inst. Theor. Phys.*; THU-99/05, `hep-th/9902051`).
6. Kallosh R. // *Black holes, branes and superconformal symmetry.* Stanford, 1999. 9 p. (*Preprint* / *Stanford Univ.*; SU-ITP-99/4, `hep-th/9901095`).
7. Maldacena J. // *The large $\mathcal{N}$ limit of superconformal field theories and supergravity.* Cambridge, 1997. 20 p. (*Preprint* / *Harvard Univ.*; HUTP-97/A097, `hep-th/9711200`).
8. Rothstein M. // *Deformations of complex supermanifolds.* Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. **95**. № 2. P. 255–260.
9. Вайнтроб А. Ю. // *Деформации комплексных суперпространств и когерентных пучков на них.* Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. **9**. М.. *ВИНИТИ*, 1986. С. 125–211.

10. Ninnemann H. // *Deformations of super Riemann surfaces*. Comm. Math. Phys. 1992. V. **150**. № 2. P. 267–288.
11. Crane L., Rabin J. M. // *Super Riemann surfaces: uniformization and Teichmüller theory*. Comm. Math. Phys. 1988. V. **113**. № 4. P. 601–623.
12. Falqui G., Reina C. // *A note on global structure of supermoduli spaces*. Comm. Math. Phys. 1990. V. **128**. № 2. P. 247–261.
13. Kodaira K. Complex Manifolds and Deformations of Complex Structure. Berlin. *Springer-Verlag*, 1986. 312 p.
14. Duplij S. // *On semigroup nature of superconformal symmetry*. J. Math. Phys. 1991. V. **32**. № 11. P. 2959–2965.
15. Duplij S. // *Ideal structure of superconformal semigroups*. Theor. Math. Phys. 1996. V. **106**. № 3. P. 355–374.
16. Duplij S. // *Some abstract properties of semigroups appearing in superconformal theories*. Semigroup Forum. 1997. V. **54**. № 2. P. 253–260.
17. Duplij S. // *Noninvertible N=1 superanalog of complex structure*. J. Math. Phys. 1997. V. **38**. № 2. P. 1035–1040.
18. Duplij S. // *On semi-supermanifolds*. Pure Math. Appl. 1998. V. **9**. № 3-4. P. 283–310.
19. Duplij S. // *Superconformal-like transformations and nonlinear realizations*. Southwest J. Pure and Appl. Math. 1998. V. **2**. P. 85–112.
20. Rogers A. // *A global theory of supermanifolds*. J. Math. Phys. 1980. V. **21**. № 5. P. 1352–1365.
21. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.. *Изд-во МГУ*, 1983. 208 с.
22. Friedan D. // *Notes on string theory and two dimensional conformal field theory*. Unified String Theories. Singapore. *World Sci.*, 1986. P. 118–149.
23. Дуплий С. А. // *Идеальное строение суперконформных полугрупп*. Теор. мат. физ. 1996. Т. **106**. № 3. С. 355–374.
24. Постников М. М. Дифференциальная геометрия. М.. *Наука*, 1988. 496 с.
25. Баранов М. А., Фролов И. В., Шварц А. С. // *Геометрия двумерных суперконформных теорий поля*. Теор. мат. физ. 1987. Т. **70**. № 1. С. 92–103.
26. Rosly A. A., Schwarz A. S., Voronov A. A. // *Geometry of superconformal manifolds*. Comm. Math. Phys. 1988. V. **119**. № 1. P. 129–152.
27. Giddings S. B., Nelson P. // *Line bundles on super Riemann surfaces*. Comm. Math. Phys. 1988. V. **118**. P. 289–302.
28. Danilov G. S. // *Unimodular transformations of the supermanifolds and the calculation of the multi-loop amplitudes in the superstring theory*. Nucl. Phys. 1996. V. **B463**. P. 443–488.
29. Натанзон С. М. // *Пространства модулей суперримановых поверхностей*. Мат. заметки. 1989. Т. **45**. № 4. С. 111–116.
30. Baranov A. M., Schwarz A. S. // *On the multiloop contribution to the string theory*. Int. J. Mod. Phys. 1987. V. **A2**. № 6. P. 1773.
31. LeBrun C., Rothstein M. // *Moduli of super Riemann surfaces*. Comm. Math. Phys. 1988. V. **117**. № 1. P. 159–176.
32. Hu P. // *Holomorphic mappings between spaces of different dimensions*. **I**. Math. Z. 1993. V. **214**. P. 567–577.
33. Bergvelt M. J., Rabin J. M. // *Super curves, their Jacobians, and super KP equations*. San Diego, 1996. 64 p. (*Preprint* / *Univ. California*, alg-geom/9601012).
34. Стинрод Н. Топология косых произведений. М.. *Мир*, 1953. 341 с.
35. Воронов А. А., Манин Ю. И., Пенков И. Б. // *Элементы супергеометрии*. Современные проблемы математики. Итоги науки и техники. Т. **9**. М.. *ВИНИТИ*, 1986. С. 3–25.

SUPERCONFORMAL-LIKE TWISTING PARITY MORPHISMS, DEFORMATIONS AND ODD COCYCLES

S. A. Duplij

Nuclear Physics Laboratory, Department of Physics and Technology
Kharkov State University, Kharkov 310077, Ukraine

On (1|1) semisupermanifolds analogs of superconformal morphisms — twisting parity of tangent space (TPt) tranformations — are introduced. Their contribution is took into account in deriving of mixed cocycle conditions for odd cocycles which could be treated as odd superanalog of Jacobian and TPt deformations and odd analogs of obstructions.

KEY WORDS: superconformal tranformation, cocycle, deformation, obstruction