УДК 539.12

НЕОБРАТИМОСТЬ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СИММЕТРИИ НА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СУПЕРПЛОСКОСТИ

С. А. Дуплий
Лаборатория ядерной физики, физико-технический факультет
Харьковский государственный университет, пл. Свободы, 4, г. Харьков, 310077, Украина
E-mails: Steven.A.Duplij@univer.kharkov.ua duplij@member.ams.org
Internet: http://gluon.physik.uni-kl.de/~duplij
Поступила в редакцию 26 октября 1999 г.

Исследованы необратимые свойства матриц, содержащих четные нильпотентные элементы и делители нуля и возникающих в N-расширенной суперконформной геометрии. Найдена дуальность между перманентом и детерминантом и между минорами и алгебраическими дополнениями, предложена новая формула для обратной матрицы через перманенты и миноры. В дополнение к обратимым изучены и необратимые дробно-линейные преобразования суперплоскости $\mathbb{C}^{1|0}$, для которых введен новый тип симметрии. Построена необратимая гиперболическая геометрия на суперплоскости, в которой имеется *два* различных инвариантных двойных отношения и *два* расстояния, найден аналог производной Шварца и других формул.
КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: нильпотентность, перманет, дробно-линейное преобразование, двойное отношение, гиперболическая геометрия.

В данной работе изучаются необратимые свойства матриц, содержащих нильпотентные элементы и делители нуля, определенный тип которых возникает при анализе N-расширенных редуцированных преобразований [1–3]. Показывается, что перманенты играют для них дуальную (по отношению к детерминантам) роль в большинстве принципиальных формул и утверждений (даже в нахождении обратной матрицы). Найденные дуальные свойства изучаются в общем случае матриц содержащих нильпотентные элементы, что может быть применено в моделях элементарных частиц, использующих суперсимметрию в качестве основополагающего принципа. Введенные матрицы используются для определения обратимых и необратимых дробно-линейных преобразований суперплоскости специального вида, для которых найден новый вид симметрии. Далее строится необратимая гиперболическая геометрия на четной части суперплоскости, в которой имеется два различно определенных инвариантных двойных отношения и два гиперболических расстояния, аналог производной Шварца и других классических формул [4].

ПЕРМАНЕНТЫ И SCF-МАТРИЦЫ

Свойства перманентов обычных матриц существенно отличаются от свойств детерминантов, что до сих пор существенно ограничивало их применение комбинаторными построениями и вероятностными задачами [5], а также теорией инвариантов [6] и перманентных идеалов [7]. Однако, если матрицы содержат нильпотентные элементы и делители нуля, то для некоторого типа таких матриц, возникающего при анализе N-расширенных суперконформных преобразований (см. [8,9]), перманенты начинают играть дуальную (по отношению к детерминантам) роль [2].

Рассмотрим вначале для иллюстрации идеи 2×2 матрицы с четными элементами из грассмановой алгебры $\Lambda=\Lambda_0\oplus\Lambda_1$, т. е. $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{\Lambda_0}(2)$ (Λ_0 и Λ_1 содержат четные и нечетные элементы: см. обозначения в [10]). Перманент в этом случае имеет вид [5]

$$\mathrm{per}\,\mathrm{A}=ad+bc. \tag{1}$$

Если определить скалярное произведение стандартным образом $\mathrm{A}\times\mathrm{B}\stackrel{def}{=}\mathrm{tr}\,\mathrm{AB}^T$, то для перманента суммы матриц получаем $\mathrm{per}\,(\mathrm{A}+\mathrm{B})=\mathrm{per}\,\mathrm{A}+\mathrm{per}\,\mathrm{B}+\mathrm{A}\times\mathrm{B}^M$, где B^T — транспонированная матрица и B^M — матрица миноров. Отсюда следуют важные частные случаи, которые будут использованы в дальнейших выкладках, $\mathrm{per}\,(\mathrm{A}-k\mathrm{I})=k^2-k\cdot\mathrm{tr}\,\mathrm{A}+\mathrm{per}\,\mathrm{A}$, $\mathrm{per}\left(\mathrm{A}-\mathrm{A}^{MT}\right)=2\mathrm{per}\,\mathrm{A}-\mathrm{tr}\,\mathrm{A}^2$, где $k\in\Lambda_0$ и I — единичная матрица. Отсюда следует определение перманента матрицы в терминах скалярного произведения $\mathrm{per}\,\mathrm{A}=\frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\mathrm{A}\times\mathrm{A}^M$, которое справедливо для матриц любого порядка. Отметим, что, если A не содержит нильпотентных составляющих и положительна и $\mathrm{per}\,\mathrm{A}=1$, то матрица $\mathrm{B}=\mathrm{A}-\mathrm{I}$ нильпотентна [11]. Введем еще одну матричную функцию $\mathrm{scf}_\pm\mathrm{A}$, которая играет важную роль при рассмотрении свойств матриц, содержащих нильпотентные элементы, по формулам

$$\mathrm{scf}_+\mathrm{A}\stackrel{def}{=}ac,\quad \mathrm{scf}_-\mathrm{A}\stackrel{def}{=}bd, \tag{2}$$

т. е. $\mathrm{scf}_\pm\mathrm{A}$ определяет степень ортогональности элементов первого и второго столбца матрицы A соответственно. Необходимость введения функции $\mathrm{scf}_\pm\mathrm{A}$ видна из следующего ключевого соотношения

$$\mathrm{A}^{MT}\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\mathrm{per}\,\mathrm{A} & 2\mathrm{scf}_-\mathrm{A}\\ 2\mathrm{scf}_+\mathrm{A} & \mathrm{per}\,\mathrm{A}\end{pmatrix}. \tag{3}$$

Сравним это соотношение с подобным для детерминанта $\mathrm{A}^{DT}\cdot\mathrm{A}=\begin{pmatrix}\det\mathrm{A} & 0\\ 0 & \det\mathrm{A}\end{pmatrix}=\det\mathrm{A}\cdot\mathrm{I}$, где A^{D} — матрица алгебраических дополнений. Тогда естественным является определение $N=2$ scf-матрицы как 2×2 четной матрицы с элементами из Λ_0, у которой элементы столбцов ортогональны

$$\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=0. \tag{4}$$

Отметим, что для $N=2$ scf-матриц выполняется соотношение, аналогичное стандартному

$$\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{MT}\cdot\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\begin{pmatrix}\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}} & 0\\ 0 & \mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\end{pmatrix}=\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{I}, \tag{5}$$

и, следовательно, имеет место дуальность $\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\leftrightarrow\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}},\ \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{M}\leftrightarrow\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{D}$. Тогда понятно, что при $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]\neq 0$ для scf-матриц можно ввести другое *дуальное* определение обратной матрицы, использующей не детерминант, а перманент: для $N=2$ scf-матрицы, удовлетворяющей условию $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]\neq 0$, per-обратная матрица определяется следующей формулой

$$\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1per}\stackrel{def}{=}\frac{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{MT}}{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}, \tag{6}$$

что можно сравнить со стандартной формулой $A^{-1}=A^{DT}/\det A$. Отсюда видно, что для per-обратной матрицы выполняется соотношение $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1per}\cdot\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\mathrm{I}$. Отметим некоторые свойства $N=2$ scf-матриц, следующие из их определения, которые, однако, не выполняются для обычных матриц, например: $\mathrm{tr}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{n}=a^n+d^n+\left[1+(-1)^n\right](bc)^{\frac{n}{2}}$, $\binom{\mathrm{per}}{\det}^{n}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\binom{\mathrm{per}}{\det}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{n}=(ad)^n+(\pm 1)^n(bc)^n$. Отсюда, в частности, следуют связи между перманентом и детерминантом scf-матриц $\mathrm{per}^{\,2n}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\det^{2n}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}},\ \mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{2n}=\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{2n}$, а также $\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=a^2d^2-b^2c^2$ и нетривиальная связь между перманентом и следом scf-матрицы $\left(2\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}-\mathrm{tr}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{2}\right)\left(2\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}+\mathrm{tr}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{2}-\mathrm{tr}^{\,2}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right)=0$, где каждый из сомножителей отличен от нуля, а их ортогональность достигается за счет scf-условий (4). Одной из причин, почему перманенты не применялись широко в приложениях, как детерминанты, служит тот факт, что в общем случае перманент не мультипликативен, т. е. формула Бине-Коши $\det(\mathrm{AB})=\det\mathrm{A}\cdot\det\mathrm{B}$ не выполняется без дополнительных условий для перманентов [5] (также, как и инвариантность при линейных операциях над матрицами). Замечательно, что именно уравнения (4) и являются требуемыми дополнительными условиями, и тогда $\mathrm{per}\,\left(\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{B}_{\mathrm{scf}}\right)=\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{per}\,\mathrm{B}_{\mathrm{scf}}$. Отметим также и другие важные формулы, справедливые для детерминантов и *только* для scf-матриц [2] $\mathrm{per}\,\left(\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{B}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1}\right)=\mathrm{per}\,\mathrm{B}_{\mathrm{scf}},\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1}=\mathrm{per}^{\,-1}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$, где $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1}$ — обратная матрица в обычном определении.

Важным свойством scf-матриц является их связь с ортогональными матрицами при смене базиса, что использовалось ранее при рассмотрении необратимых редуцированных $N=2$ и $N=4$ преобразований [1,2]. Так, если $\mathrm{A}_0=\mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{U},\ \mathrm{B}_0=\mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{U}$, где $\mathrm{U}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & i\\ 1 & -i\end{pmatrix}$— матрица перехода в комплексный базис, то для произведения двух матриц в разных базисах можно получить $\mathrm{A}_0^{T}\cdot\mathrm{B}_0=\mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{MT}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{U}$. Если выбрать $\mathrm{A}_0=\mathrm{B}_0$, то получим связь ортогональности в координатном базисе со свойствами scf-матриц в комплексном базисе [2]

$$\mathrm{A}_0^{T}\cdot\mathrm{A}_0=\mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{MT}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{U}=\mathrm{per}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{I}+\mathrm{scf}_{+}\mathrm{A}\cdot\sigma^{+}+\mathrm{scf}_{-}\mathrm{A}\cdot\sigma^{-}, \tag{7}$$

где I — единичная 2×2 матрица, $\sigma^{\pm}=\sigma_3\pm i\sigma_1$. Поэтому в обратимом случае $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}\right]\neq 0$ нормированные на $\sqrt{\mathrm{per}\,\mathrm{A}}$ scf-матрицы (с $\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=0$) $\mathrm{N}_{0,\mathrm{scf}}=\mathrm{A}_{0,\mathrm{scf}}/\sqrt{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}$ подобны ортогональным матрицам, т. е. $\mathrm{N}_{0,\mathrm{scf}}^{T}\cdot\mathrm{N}_{0,\mathrm{scf}}=\mathrm{I}$, следовательно $\mathrm{N}_{0,\mathrm{scf}}\in O_{\Lambda_0}$ (2). Для нормированных scf-матриц ортогональность в одном базисе связана с per-обратимостью в другом $\mathrm{N}_{0,\mathrm{scf}}^{T}\cdot\mathrm{N}_{0,\mathrm{scf}}=\mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{N}_{\mathrm{scf}}^{-1per}\cdot\mathrm{N}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{U}$, где $\mathrm{N}_{\mathrm{scf}}=\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}/\sqrt{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}$ и $\mathrm{N}_{\mathrm{scf}}^{-1per}$ определено формулой (6).

Рассмотрим более подробно свойства обратимости scf-матриц. Так, числовые части детерминанта и перманента (отличных от нуля: $\mathrm{per}\,\mathrm{A}\neq 0$, $\det\mathrm{A}\neq 0$) обращаются в нуль одновременно $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}\right]=0\Leftrightarrow\epsilon\left[\det\mathrm{A}\right]=0$, что справедливо для матриц любого порядка, состоящих из четных элементов. Рассмотрим обратимый случай $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]\neq 0$, $\epsilon\left[\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]\neq 0$, тогда единственным решением scf-условий (4) могут быть варианты, когда один из сомножителей обращается в нуль, т. е. обратимые scf-матрицы диагональны или антидиагональны, и per-обратная матрица совпадает с обратной $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1per}=\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1}$. В необратимом случае $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]=0$ нормировка $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ невозможна. Поэтому нужно непосредственно пользоваться scf-условиями (4) и соответствующими ненормированными формулами. Тогда матрица $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ не обязательно будет диагональной или антидиагональной, и для нахождения *доопределенной* per-*обратной* матрицы $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1per}$ в этом случае необходимо избегать деления в (6) и решать уравнение $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1per}\cdot\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{MT}$с нильпотентными обеими частями. Если аналогично ввести *доопределенную обратную* матрицу $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1}$ по формуле $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1}\cdot\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{DT}$,то в общем случае $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1per}\neq\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1}$. Например, пусть $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\begin{pmatrix}\mu\nu & \alpha\beta\\ \mu\rho & \alpha\gamma\end{pmatrix}$— нильпотентная scf-матрица, для которой $\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\mu\nu\alpha\gamma+\alpha\beta\mu\rho=\mu\alpha\left(\gamma\nu+\beta\rho\right),\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}=\mu\nu\alpha\gamma-\alpha\beta\mu\rho=\mu\alpha\left(\gamma\nu-\beta\rho\right)$. Она необратима, поскольку $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]=\epsilon\left[\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]=0$. Тогда сравним две обратные матрицы $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1per} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$ и $\bar{\mathrm{A}}_{\mathrm{scf}}^{-1} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix}$. Из определений имеем 2(!) *различные* системы уравнений для нахождения элементов x_i и y_i

$$\left\{ \begin{array}{c} \mu\alpha\left(\gamma\nu+\beta\rho\right)x_1=\alpha\gamma, \\ \mu\alpha\left(\gamma\nu+\beta\rho\right)x_2=\alpha\beta, \\ \mu\alpha\left(\gamma\nu+\beta\rho\right)x_3=\mu\rho, \\ \mu\alpha\left(\gamma\nu+\beta\rho\right)x_3=\mu\nu, \end{array} \right. \nLeftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \mu\alpha\left(\gamma\nu-\beta\rho\right)y_1=\alpha\gamma, \\ \mu\alpha\left(\gamma\nu-\beta\rho\right)y_2=-\alpha\beta, \\ \mu\alpha\left(\gamma\nu-\beta\rho\right)y_3=-\mu\rho, \\ \mu\alpha\left(\gamma\nu-\beta\rho\right)y_3=\mu\nu, \end{array} \right. \tag{8}$$

которые могут быть решены разложением по образующим Λ.

Наряду с мультипликативностью перманента $N=2$ scf-матриц важным также является групповое поведение введенной матричной функции $\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A}$ при умножении матриц. Если рассмотреть функцию $\mathrm{scf}_{\pm}$ от произведения матриц A и $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} p_+ & p_- \\ q_+ & q_- \end{pmatrix}$, то, пользуясь определением (2), получаем $\mathrm{scf}_{\pm}(\mathrm{AB}) = p_{\pm}^2 \cdot \mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A} + q_{\pm}^2 \cdot \mathrm{scf}_{\mp}\mathrm{A} + 2\mathrm{per}\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{B}$, и, следовательно, $\mathrm{scf}_{\pm}(\mathrm{AB}) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A} = 0 \wedge \mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{B} = 0$. Поэтому множество 2×2 четных матриц, удовлетворяющих условию (4), $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}} = \bigcup \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ образует подполугруппу полной линейной полугруппы 2×2 четных матриц (поскольку $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}} \star \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}}$), которую назовем полугруппой $N=2$ scf-матриц $SCF_{\Lambda_0}(2)$. Обратимые элементы из полугруппы $SCF_{\Lambda_0}(2)$ образуют группу $N=2$ scf-матриц $GSCF_{\Lambda_0}(2)$. Небратимые элементы из полугруппы $SCF_{\Lambda_0}(2)$ образуют идеал $ISCF_{\Lambda_0}(2)$. Тогда в обратимом случае очевидно группа $GSCF_{\Lambda_0}(2)$ изоморфна ортогональной группе $O_{\Lambda_0}(2)$. Нетривиальным является необратимый случай $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right]=0$, когда scf-условия (2) выполняются не за счет зануления одного из сомножителей, а за счет ортогональности нильпотентных ненулевых сомножителей. Такие scf-матрицы принадлежат идеалу $ISCF_{\Lambda_0}(2)$ (см. (8)).

Аналогичные свойства (но с более сложной структурой и нетривиальными условиями) имеют $N=4$ scf-матрицы [2], образующие полугруппу $SCF_{\Lambda_0}(4)$, которая состоит из групповой части $GSCF_{\Lambda_0}(4)$, изоморфной $O_{\Lambda_0}(4)$, и идеала $ISCF_{\Lambda_0}(4)$ [2,3].

НЕЭВКЛИДОВА СУПЕРПЛОСКОСТЬ И SCF-МАТРИЦЫ

Рассмотрим некоторые необычные свойства дробно-линейных преобразований, к которым приводят $N=2$ scf-матрицы. Поставим в соответствие матрице $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_{\Lambda_0}(2)$ дробно-линейное преобразование суперплоскости $f:\mathbb{C}^{1|0}\to\mathbb{C}^{1|0}$ (см. например, [4,12]) $f_{\mathrm{A}}(z) = \frac{az+b}{cz+d}$. Доопределим $f_{\mathrm{A}}(z)$ на необратимый случай, когда $cz+d\neq 0$, но $\epsilon\left[cz+d\right]=0$ по формуле

$$\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)\left(cz+d\right) = az+b\,. \tag{9}$$

Будем обозначать равенства для доопределенных величин знаком $\mathrel{\mathring{=}}$, а именно

$$\bar{f}_{\mathrm{A}}(z) \mathrel{\mathring{=}} \frac{az+b}{cz+d}\,. \tag{10}$$

Пусть $\bar{\mathbf{F}}$ —полугруппа всех обратимых и необратимых доопределенных преобразований $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)$, а $L_{\Lambda_0}(2)$ — полугруппа матриц $\mathrm{A}\in\mathrm{Mat}_{\Lambda_0}(2)$. Поскольку для любых двух матриц A и B имеет место $\bar{f}_{\mathrm{A}}\circ\bar{f}_{\mathrm{B}} = \bar{f}_{\mathrm{AB}}$, то отображение полугрупп $\varphi: L_{\Lambda_0}(2)\to\bar{\mathbf{F}}$ есть гомоморфизм полугрупп (точнее — эпиморфизм с ненулевым ядром $a\cdot\mathrm{I}$, $a\in\Lambda_0$ [12]). Интересно, что даже в несуперсимметричном случае произвольные (не дробно-линейные и неинфенитезимальные) голоморфные преобразования $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ в глобальном смысле не образуют группу (см. [13, с. 31]). Отметим, что доопределенные дробно-линейные преобразования $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)$ имеют дополнительную неподвижную точку с нильпотентной координатой. Неподвижная точка z_{fix} отображения $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)$ определяется формулой $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z_{\mathrm{fix}}) \mathrel{\mathring{=}} z_{\mathrm{fix}}$. Из (9) имеем $cz_{\mathrm{fix}}^2+(d-a)\,z_{\mathrm{fix}}-b=0$, откуда следует не одна, как в стандартном рассмотрении при $c\neq 0$ [14], а *две (!)* возможности, связанные с возможностью ненулевого индекса нильпотентности координаты на суперплоскости: 1) $\epsilon\left[b\right]\neq 0$, $\epsilon\left[z_{\mathrm{fix}}\right]\neq 0$, тогда $z_{\mathrm{fix}}^{(\pm)} \mathrel{\mathring{=}} \frac{a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4\det\mathrm{A}}}{2c}$ (стандартный случай); 2) $\epsilon\left[b\right]=0$, $\epsilon\left[z_{\mathrm{fix}}^{(0)}\right]=0$, $\left(z_{\mathrm{fix}}^{(0)}\right)^2=0$, тогда $z_{\mathrm{fix}}^{(0)} \mathrel{\mathring{=}} \frac{b}{d-a}$ (нильпотентный случай). Если выбрать в качестве матрицы A комплексную матрицу с единичным детерминантом, то $f_{\mathrm{A}}(z)$ — это преобразование Мёбиуса, играющее важную роль в теории струн и римановых поверхностей [15,16]. Выберем в качестве A введенные $N=2$ scf-матрицы $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$. Покажем, что наиболее ключевые соотношения будут иметь дуальные к стандартным, где детерминант заменяется на перманент [2]. Поскольку $N=2$ scf-матрицы $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ образуют полугруппу $SCF_{\Lambda_0}(2)$, то соответствующие дробно-линейные преобразования $\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z)$ образуют полугруппу $\bar{\mathbf{F}}_{\mathrm{scf}}\subset\bar{\mathbf{F}}$ относительно композиции, и отображение полугрупп $\varphi_{\mathrm{scf}}: SCF_{\Lambda_0}(2)\to\bar{\mathbf{F}}_{\mathrm{scf}}$ есть также гомоморфизм полугрупп. Назовем per-отображением дробно-линейное преобразование (10) с $N=2$ scf-матрицей $\mathrm{A}=\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$. Основным для дальнейшего рассмотрения будет тот факт, что per-отображения (и только они) удовлетворяют следующему тождеству

$$n_1\cdot\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)+n_2\cdot\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2) \mathrel{\mathring{=}} \frac{(n_1+n_2)(z_1+z_2)\cdot\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{2\,(cz_1+d)(cz_2+d)} + \frac{(n_1-n_2)(z_1-z_2)\cdot\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{2\,(cz_1+d)(cz_2+d)}. \tag{11}$$

Действительно, обозначим разность между левой и правой частями в (11) за $\Delta f(z_1,z_2)$. Тогда для любой матрицы A непосредственно из (10) имеем $\Delta f(z_1,z_2) = (z_1 z_2 \cdot \mathrm{scf}_+\mathrm{A} + \mathrm{scf}_-\mathrm{A})(n_1+n_2)$, и в силу того, что в нашем случае $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ — $N=2$ scf-матрица, из scf-условий (4) $\mathrm{scf}_\pm \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} = 0$ получаем $\Delta f(z_1,z_2) = 0$, и следовательно тождество (11) выполняется. Из него явно прослеживается дуальная роль перманента $\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ и детерминанта $\det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$. Так, при per-отображениях разность координат преобразуется множителем, пропорциональным $\det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$, а сумма координат преобразуется множителем, пропорциональным $\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$

$$\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)+\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2) \doteq \frac{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{(cz_1+d)(cz_2+d)}(z_1+z_2),\ \bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)-\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2) \doteq \frac{\det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{(cz_1+d)(cz_2+d)}(z_1-z_2). \quad (12)$$

Последнее соотношение в (12) выполняется не только для scf-матриц, но и для любых матриц A (см. например, [12]). Первое соотношение в (12) говорит о появлении на суперплоскости $\mathbb{C}^{1|0}$ новой симметрии, связанной с scf-матрицами и перманентами. Если элементы $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ действительны, то из (12) находим дуальные формулы

$$\mathrm{Re}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z) \doteq \frac{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{|cz+d|^2}\cdot \mathrm{Re}\,z,\ \mathrm{Im}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z) \doteq \frac{\det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{|cz+d|^2}\cdot \mathrm{Im}\,z, \quad (13)$$

откуда следует, что можно определить *два (!)* “единичных круга” на суперплоскости $\mathbb{C}^{1|0}$

$$\mathrm{Re}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z) = \mathrm{Re}\,z \Leftrightarrow |cz+d| = \sqrt{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}},\ \mathrm{Im}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z) = \mathrm{Im}\,z \Leftrightarrow |cz+d| = \sqrt{\det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}. \quad (14)$$

Кроме того, имеются такие полезные в дальнейшем дуальные ($\mathrm{Re} \leftrightarrow \mathrm{Im}$, “$+$” $\leftrightarrow$ “$-$”) формулы

$$\frac{\left|\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)+\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2)\right|^2}{\mathrm{Re}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)\cdot \mathrm{Re}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2)} \doteq \frac{|z_1+z_2|^2}{\mathrm{Re}\,z_1\cdot \mathrm{Re}\,z_2},\ \frac{\left|\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)-\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2)\right|^2}{\mathrm{Im}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1)\cdot \mathrm{Im}\,\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2)} \doteq \frac{|z_1-z_2|^2}{\mathrm{Im}\,z_1\cdot \mathrm{Im}\,z_2}. \quad (15)$$

ПРАВЫЕ И ЛЕВЫЕ ДВОЙНЫЕ ОТНОШЕНИЯ

Пусть $z_1,z_2,z_3,z_4 \in \mathbb{C}^{1|0}$ — четыре различные точки. Определим не одно (как в [12,17]), а два двойных доопределенных правых и левых отношения

$$\boldsymbol{D}^{\pm}(z_1,z_2,z_3,z_4) \doteq \frac{(z_1\pm z_3)(z_2\pm z_4)}{(z_1\pm z_4)(z_2\pm z_3)}. \quad (16)$$

В (16) прослеживаются такие отличия от стандартных определений [12]: **1)** наличие наряду с *левым* двойным отношением с разностями координат также и *правого* двойного отношения с их суммами; **2)** распространение определений (нового и известного) на нильпотентную область $\mathbb{C}^{1|0}$ с использованием доопределенного знака равенства $\doteq$ (9)–(10). Отметим, что, в частности, $\boldsymbol{D}^{\pm}(z,1,0,\infty) = z$. Относительно дробно-линейных преобразований общего вида левое двойное отношение (16) инвариантно [12,17] в силу второго соотношения в (12). Для per-отображений выполняются оба соотношения в (12), поэтому как правое, так и левое двойные отношения (16) инвариантны относительно per-отображений

$$\boldsymbol{D}^{\pm}\left(\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1),\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2),\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_3),\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_4)\right) \doteq \boldsymbol{D}^{\pm}(z_1,z_2,z_3,z_4) = \boldsymbol{r}^{\pm}. \quad (17)$$

Рассмотрим преобразованное правое двойное отношение с $\boldsymbol{D}^{+}\left(\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1),\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2),\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_3),\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_4)\right)$. Для различных сумм преобразованных координат воспользуемся (12) в следующем виде $\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_i) + \bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_j) \doteq \frac{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{(cz_i+d)(cz_j+d)}(z_i+z_j)$, после чего в числителе и знаменателе (16) сократим на $\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ от каждой суммы и на общее выражение $(cz_1+d)(cz_2+d)(cz_3+d)(cz_4+d)$, тогда получим искомое непреобразованное правое двойное отношение $\boldsymbol{D}^{+}(z_1,z_2,z_3,z_4)$. Поэтому, если для двух четверок точек z_i и w_i левые (или правые) двойные отношения совпадают, то существует per-отображение, которое переводит одну четверку в другую $w_i = \bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_i)$. Следовательно, per-отображения имеют дополнительный инвариант $\boldsymbol{r}_+$ — правое двойное отношение $\boldsymbol{D}^{+}(z_1,z_2,z_3,z_4) = \boldsymbol{r}_+$, которое зависит не от конкретного значения координат z_1,z_2,z_3,z_4, а от их перестановок $z_{\sigma 1},z_{\sigma 2},z_{\sigma 3},z_{\sigma 4}$, $\sigma \in S_4$, где S_4 — группа перестановок множества из 4 элементов. Введем правые и левые функции $p_\sigma^{\pm}(\boldsymbol{r}_{\pm})$ на правых и левых двойных отношениях соответственно по формуле $\boldsymbol{D}^{\pm}(z_{\sigma 1},z_{\sigma 2},z_{\sigma 3},z_{\sigma 4}) = p_\sigma^{\pm}\left(\boldsymbol{D}^{\pm}(z_1,z_2,z_3,z_4)\right)$. Тогда отображения группы перестановок $\omega^{\pm}: \sigma \to p_\sigma^{\pm}$ являются гомоморфизмами, поскольку для двух последовательных перестановок имеем $p_\pi^{\pm}\left[p_\sigma^{\pm}\left(\boldsymbol{D}^{\pm}(z_1,z_2,z_3,z_4)\right)\right] = p_\pi^{\pm}\left[\boldsymbol{D}^{\pm}(z_{\sigma 1},z_{\sigma 2},z_{\sigma 3},z_{\sigma 4})\right] = \boldsymbol{D}^{\pm}(z_{\pi\sigma 1},z_{\pi\sigma 2},z_{\pi\sigma 3},z_{\pi\sigma 4}) = p_{\pi\sigma}^{\pm}\left(\boldsymbol{D}^{\pm}(z_1,z_2,z_3,z_4)\right)$, т. е. $p_\pi^{\pm} p_\sigma^{\pm} = p_{\pi\sigma}^{\pm}$, что и доказывает утверждение. Важно, что образами группы перестановок S_4 при гомоморфизмах ω^{+} и ω^{-} являются две (!) конечные группы, каждая из которых состоит из 6 элементов

$$\omega^{+}(S_4) = \left\{\boldsymbol{r}^{+}, \frac{1}{\boldsymbol{r}^{+}}, 1+\boldsymbol{r}^{+}, \frac{1}{1+\boldsymbol{r}^{+}}, \frac{1+\boldsymbol{r}^{+}}{\boldsymbol{r}^{+}}, \frac{\boldsymbol{r}^{+}}{1+\boldsymbol{r}^{+}}\right\}, \quad (18)$$

$$\omega^{-}(S_4) = \left\{\boldsymbol{r}^{-}, \frac{1}{\boldsymbol{r}^{-}}, 1-\boldsymbol{r}^{-}, \frac{1}{1-\boldsymbol{r}^{-}}, \frac{1-\boldsymbol{r}^{-}}{\boldsymbol{r}^{-}}, \frac{\boldsymbol{r}^{-}}{1-\boldsymbol{r}^{-}}\right\} \quad (19)$$

при $\epsilon[\boldsymbol{r}^{\pm}] \neq 0$. Если $\epsilon[\boldsymbol{r}^{\pm}] = 0$, то количество элементов в (18)–(19) уменьшается до четырех

$$\omega^{+}(S_4) = \left\{\boldsymbol{r}^{+}, 1+\boldsymbol{r}^{+}, \frac{1}{1+\boldsymbol{r}^{+}}, \frac{\boldsymbol{r}^{+}}{1+\boldsymbol{r}^{+}}\right\},\ \omega^{-}(S_4) = \left\{\boldsymbol{r}^{-}, 1-\boldsymbol{r}^{-}, \frac{1}{1-\boldsymbol{r}^{-}}, \frac{\boldsymbol{r}^{-}}{1-\boldsymbol{r}^{-}}\right\}. \quad (20)$$

Однако другие критические значения инвариантов $\boldsymbol{r}^+$ и $\boldsymbol{r}^-$ не совпадают между собой. Из (18)–(19) следует, что образы отображений $\omega^\pm$ содержат по 3 элемента, если $1 \pm \boldsymbol{r}^\pm = 1/\boldsymbol{r}^\pm$, т. е. при различных значениях инвариантов $\boldsymbol{r}^+_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ и $\boldsymbol{r}^-_{1,2} = \frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$ соответственно. Если $\boldsymbol{r}^- = -1$, то говорят, что точки z_1, z_2, z_3, z_4 образуют гармоническую последовательность [12]. Соответствующее значение инварианта $\boldsymbol{r}^+$ равно $+1$, а такую последовательность точек можно назвать per-*гармонической*. При этом $\omega^+(S_4) = \omega^-(S_4) = \left\{\frac{1}{2}, 1, 2\right\}$.

Отметим, что для четырех точек z_1, z_2, z_3, z_4, лежащих на единичном круге, как правое $\boldsymbol{D}^+(z_1, z_2, z_3, z_4)$ так и левое $\boldsymbol{D}^-(z_1, z_2, z_3, z_4)$ двойные отношения (для левого двойного отношения см., например, [18]) действительны. На единичном круге полагаем $z_i = e^{it_i}$, $t_i \in \mathbb{R}$, тогда из определений получаем

$$\boldsymbol{D}^+\left(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}\right) = \frac{\cos(t_1 - t_3)\cos(t_2 - t_4)}{\cos(t_1 - t_4)\cos(t_2 - t_3)}, \ \boldsymbol{D}^-\left(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}\right) = \frac{\sin(t_1 - t_3)\sin(t_2 - t_4)}{\sin(t_1 - t_4)\sin(t_2 - t_3)}. \quad (21)$$

и, следовательно, $\boldsymbol{D}^\pm\left(e^{it_1}, e^{it_2}, e^{it_3}, e^{it_4}\right) \in \mathbb{R}$. Имеется также per-аналог формулы Лаггера [18], позволяющий выразить правое двойное отношение через “угол” ϑ между “прямыми”. Действительно, пусть $\operatorname{tg}\vartheta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$, тогда из (16) можно получить

$$\boldsymbol{D}^\pm(m_1, m_2, +i, -i) = e^{\pm i\vartheta}, \quad (22)$$

где выражение с нижним знаком представляет собой классическую формулу Лаггера [18]. Если A — матрица, соответствующая дробно-линейному преобразованию $f_{\mathrm{A}}(z)$, то для левого двойного отношения можно вывести формулу $\boldsymbol{D}^-\left(z, f^{\circ 3}_{\mathrm{A}}(z), f^{\circ 2}_{\mathrm{A}}(z), f_{\mathrm{A}}(z)\right) = \frac{\operatorname{tr}^2\mathrm{A}}{\det \mathrm{A}}$,где $f^{\circ n}_{\mathrm{A}}(z)$ — композиция из n преобразований. Подобная формула для правого двойного отношения (если $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$) имеет вид

$$\boldsymbol{D}^+\left(z, f^{\circ 3}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z), f^{\circ 2}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z), f_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z)\right) = z\left[\operatorname{per}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\left(\operatorname{tr}\mathrm{A}^2_{\mathrm{scf}} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}^2\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right) + \frac{1}{4}\operatorname{tr}^2\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\left(\operatorname{tr}^2\mathrm{A}_{\mathrm{scf}} - \operatorname{tr}\mathrm{A}^2_{\mathrm{scf}}\right)\right], \quad (23)$$

где $f^{\circ n}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z)$ — композиция n per-отображений. Отметим также, что имеется тесная связь между левым двойным отношением и производной Шварца [19]. Действительно, для любой функции $f(z)$ из (16) получаем

$$\boldsymbol{D}^-(f(z+ta), f(z+tb), f(z+tc), f(z+td)) = \boldsymbol{D}^-(a,b,c,d)\left[1 + \frac{t^2}{6}(a-b)(c-d)\boldsymbol{S}^-_f(z)\right] + O\left(t^3\right), \quad (24)$$

где $a, b, c, d, t \in \Lambda_0$, и производная Шварца определяется стандартной формулой

$$\boldsymbol{S}^-_f(z) = \frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2. \quad (25)$$

Аналогичная формула для правого двойного отношения имеет следующий вид

$$\begin{aligned}\boldsymbol{D}^+(f(z+ta), f(z+tb), f(z+tc), f(z+td)) \quad &= \\ 1 + \frac{t^2}{6}(a-b)(c-d)\boldsymbol{S}^+_f(z) + \frac{t^3}{8}(a-b)(c-d)(a+b+c+d)\boldsymbol{S}^{(3)+}_f(z) \quad &+ \quad O\left(t^4\right),\end{aligned} \quad (26)$$

где функции $\boldsymbol{S}^+_f(z)$ и $\boldsymbol{S}^{(3)+}_f(z)$ равны $\boldsymbol{S}^+_f(z) = -\frac{3}{2}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)^2$, $\boldsymbol{S}^{(3)+}_f(z) = -\frac{f'(z)}{f(z)}\left(\frac{f'(z)}{f(z)}\right)'$. Из сравнения выражения в квадратных скобках (24) и второй строки в (26) следует, что функцию $\boldsymbol{S}^+_f(z)$ можно трактовать как per-аналог производной Шварца $\boldsymbol{S}^-_f(z)$ [4,20].

PER-АНАЛОГ РАССТОЯНИЯ НА ГИПРЕБОЛИЧЕСКОЙ СУПЕРПЛОСКОСТИ

Пусть точки z_1, z_2, z_3, z_4 лежат на одной и той же “геодезической”, определяемой лишь точками z_1, z_2, в то время, как точки z_3, z_4 лежат на “единичном круге” (14). Тогда можно определить вместо одного [14,19] два гиперболических расстояния: правое и левое [2,3]

$$\boldsymbol{d}^\pm(z_1, z_2) \stackrel{def}{=} \ln \boldsymbol{D}^\pm(z_1, z_2, z_3, z_4). \quad (27)$$

Если точки z_1, z_2 лежат на “единичном круге” (14), то расстояния $\boldsymbol{d}^\pm(z_1, z_2)$ действительны (см. (21) и [18]). Аддитивность расстояния $\boldsymbol{d}^\pm(z_1, z_2)$ (27) обеспечивается мультипликативностью правого и левого двойных отношений $\boldsymbol{D}^\pm(z_1, z_2, z, z')\,\boldsymbol{D}^\pm(z_2, z_3, z, z') = \boldsymbol{D}^\pm(z_1, z_3, z, z')$. Имеются и другие формулы для расстояния (левого в нашем определении) [12,19], которые учитывают явно условие $\operatorname{Im} z \geq 0$, определяющее верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^2_{im}$ [14,21]. Например, из (15) следует, что выражение [12]

$$\boldsymbol{d}^-_{im}(z_1, z_2) = \operatorname{Arch}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}\right) \quad (28)$$

инвариантно относительно дробно-линейных преобразований. Однако в случае per-отображений мы имеем дополнительную инвариантность, что приводит к необходимости рассмотрения “правой полуплоскости” $\mathbb{H}^2_{re}$, определяемой условием $\operatorname{Re} z \geq 0$. Тогда по аналогии с (28) можно определить правое расстояние [2]

$$\boldsymbol{d}^+_{re}(z_1, z_2) = \operatorname{Arch}\left(1 + \frac{|z_1 + z_2|^2}{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2}\right), \quad (29)$$

инвариантное относительно per-отображений вследствие (15). В терминах правого двойного отношения $\boldsymbol{D}^+(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и правого расстояния $\boldsymbol{d}^+(z_1, z_2)$ (27) (или $\boldsymbol{d}^+_{re}(z_1, z_2)$) можно последовательно построить per-аналог гиперболической геометрии [12, 22], тригонометрии [19] на комплексной суперплоскости или в многомерных комплексных суперпространствах [23].

Такие построения могут играть фундаментальную роль, например, в конформной теории поля [24], где четырехточечные корреляционные функции выражаются через инвариантное (левое в нашем определении) двойное отношение, и поэтому наличие дополнительного инварианта может привести к возможным дополнительным вкладам в различные наблюдаемые величины (супер)конформных моделей [24, 25].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дуплий С. А. // *О типах $N = 2$ суперконформных преобразований.* Теор. мат. физ. 1991. Т. **86**. № 1. С. 138–143.
2. Duplij S. // *On $N = 4$ super Riemann surfaces and superconformal semigroup.* J. Phys. 1991. V. **A24**. № 13. P. 3167–3179.
3. Дуплий С. А. // *Полугрупповые методы в суперсимметричных теориях элементарных частиц.* Докторская диссертация. Харьков. *Харьковский госуниверситет*, math-ph/9910045, 1999. С. 1–483.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.. *Наука*, 1986. 759 с.
5. Минк Х. Перманенты. М.. *Мир*, 1982. 213 с.
6. Hu S.-J., Kang M. C. // *Efficient generation of the ring of invariants.* J. Algebra. 1996. V. **180**. P. 341–363.
7. Laubenbacher R., Swanson I. // *Permanental ideals.* Las Cruses, 1998. 13 p. (*Preprint* / *New Mexico State Univ.*, math.RA/9812112).
8. Cohn J. D. // *$N = 2$ super Riemann surfaces.* Nucl. Phys. 1987. V. **B284**. № 2. P. 349–364.
9. Schoutens K. // *$O(N)$-extended superconformal field theory in superspace.* Nucl. Phys. 1988. V. **B295**. № 4. P. 634–652.
10. Березин Ф. А. Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными. М.. *Изд-во МГУ*, 1983. 208 с.
11. Nicholson V. A. // *Matrices with permanent equal to one.* Linear Algebra and Appl. 1975. V. **12**. P. 185–188.
12. Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.. *Наука*, 1986. 299 с.
13. Schottenloher M. // *A mathematical introduction to conformal field theory.* Lect. Notes Phys. 1997. V. **M43**. P. 1–142.
14. Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х. Д. Поверхности и разрывные группы. М.. *Наука*, 1988. 684 с.
15. Farkas H., Kra I. Riemann Surfaces. Berlin. *Springer-Verlag*, 1980. 237 p.
16. Knizhnik V. G. Multiloop Amplitudes in the Theory of Quantum Strings and Complex Geometry. London. *Harwood Academic*, 1989. 78 p.
17. Siegel C. Topics in Complex Function Theory. New York. *Wiley*, 1971. 371 p.
18. Лелон-Ферран Ж. Основания геометрии. М.. *Мир*, 1989. 311 с.
19. Альфорс Л. Преобразования Мёбиуса в многомерном пространстве. М.. *Мир*, 1986. 110 с.
20. Duval C., Ovsienko V. // *Lorentzian worldlines and Schwarzian derivative.* Marseille, 1998. 4 p. (*Preprint* / *Centre de Phys. Theor.*; CPT-98/P.3691, math.DG/9809062).
21. Хелгасон С. Группы и геометрический анализ. М.. *Мир*, 1987. 735 с.
22. Пятецкий-Шапиро И. И. Геометрия классических областей и теория автоморфных функций. М.. *Физматгиз*, 1961. 191 с.
23. Апанасов Б. Н. Геометрия дискретных групп и многообразий. М.. *Наука*, 1991. 426 с.
24. Di Francesco P., Mathieu P., Sénéchal D. Conformal Field Theory. Berlin. *Springer-Verlag*, 1997. 890 p.
25. Ketov S. V. Conformal Field Theory. Singapore. *World Sci.*, 1995. 486 p.

NONINVERTIBILITY AND ADDITIONAL SYMMETRIES ON HYPERBIC SUPERPLANE

S. A. Duplij

Nuclear Physics Laboratory, Department of Physics and Technology

Kharkov State University, Kharkov 310077, Ukraine

Noninvertible properties of supermatrices containing even nilpotent elements and zero divisors which appear in N-extended superconformal geometry are investigated. The duality relations between permanent and determinant and between minors and algebraic complements are found. A new formula for inverse matrix in terms of permanents and minors is proposed. Noninvertible fractional-linear transormations of the superplane $\mathbb{C}^{1|0}$ are considered in addition to the standard invertible ones, and a new symmetry is introduced for the former. The noninvertible hyperbolic geometry on the superplane is constructed, in which *two* invariant anharmonic ratios and correspondingly *two* distances exist, an analog of the Schwarzian derivative and some other formulas are found.

KEY WORDS: nilpotence, permanent, fractional-linear transformation, anharmonic ratio, hyperbolic geometry