ХАРЬКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

На правах рукописи

Дуплий Степан Анатольевич

УДК 539.12

ПОЛУГРУППОВЫЕ МЕТОДЫ В СУПЕРСИММЕТРИЧНЫХ ТЕОРИЯХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

01.04.02 – Теоретическая физика

Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук

Харьков – **1999**

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ **10**

РАЗДЕЛ 1. Теория необратимых супермногообразий **33**

1.1. Обратимые супермногообразия в терминах окрестностей 38

1.2. Необратимые супермногообразия 41

1.2.1. Полусупермногообразия 42

1.2.2. Ориентации полусупермногообразий 46

1.2.3. Препятственность и полумногообразия 47

1.2.4. Полугруппа башенных тождеств 49

1.2.5. Обобщенная регулярность и полукоммутативные диаграммы 53

1.3. Необратимость и полурасслоения 56

1.3.1. Определение полурасслоений 56

1.3.2. Морфизмы полурасслоений 61

1.4. Необратимость и полугомотопии 67

1.5. Основные результаты и выводы 71

РАЗДЕЛ 2. Необратимое обобщение $N = 1$ суперконформной геометрии **72**

2.1. Необратимость и $N = 1$ суперконформные преобразования 74

2.1.1. Супераналитические преобразования 75

2.1.2. Касательное суперпространство и варианты его редукций 83
2.1.3. Редуцированные $N = 1$ преобразования 85
2.1.4. Вырожденные преобразования 94
2.1.5. Альтернативная параметризация 99
2.2. Суперконформные полугруппы 100
2.2.1. Локальное строение $N = 1$ суперконформной полугруппы 101
2.2.2. Ann-полугруппа 104
2.2.3. Квазиидеальный ряд 108
2.2.4. Обобщенные отношения Грина 111
2.2.5. Квазихарактеры 115
2.3. Сплетающие четность преобразования 116
2.3.1. Касательное суперпространство и кручение четности 118
2.3.2. Обобщенное редуцированное расслоение с кручением четности 120
2.3.3. Компонентный анализ 122
2.4. Нелинейная реализация $N = 1$ редуцированных преобразований 124
2.4.1. Движение нечетной кривой в $\mathbb{C}^{1|1}$ 125
2.4.2. Глобальная суперсимметрия в $\mathbb{C}^{1|1}$ 126
2.4.3. Редуцированные преобразования 127
2.4.4. Диаграммный подход к связи между линейной и нелинейной реализациями 128
2.4.5. Глобальная двумерная суперсимметрия в терминах нелинейных реализаций 129
2.4.6. Нелинейная реализация конечных редуцированных преобразований 134

2.5. Дробно-линейные преобразования 139
2.5.1. Суперконформные преобразования 140
2.5.2. Сплетающие четность преобразования 143
2.5.3. Супераналоги расстояния в $\mathbb{C}^{1|1}$ 144
2.5.4. Необратимый аналог метрики в $\mathbb{C}^{1|1}$ 147
2.6. Основные результаты и выводы 148

РАЗДЕЛ 3. Необратимая геометрия расширенных редуцированных преобразований 150
3.1. $N = 2$ суперконформная геометрия 151
3.1.1. Классификация $N = 2$ расширенных супераналитических преобразований 152
3.1.2. Компонентное представление и $N = 2$ супераналитическая полугруппа 154
3.1.3. Редукции $N = 2$ касательного суперпространства и перманенты 157
3.1.4. Классификация $N = 2$ SCf преобразований 165
3.1.5. Конечные обратимые и необратимые SCf преобразования и $N = 2$ SCf полугруппа 172
3.1.6. Сплетающие четность $N = 2$ преобразования . . . 181
3.1.7. Дуальные супераналитические $N = 1$ преобразования и редуцированные $N = 2$ преобразования . . . 185
3.2. Редуцированные $N = 4$ преобразования 190
3.2.1. $N = 4$ редукции в терминах перманентов 195
3.2.2. Классификация $N = 4$ SCf преобразований 202
3.2.3. Компонентное представление $N = 4$ редуцированных преобразований 208
3.2.4. Киральные нерасщепленные преобразования . . . 209
3.2.5. Сплетающие четность $N = 4$ преобразования . . . 216

3.3. Основные результаты и выводы 220

РАЗДЕЛ 4. Суперматричные полугруппы, идеальное строение и редукции 222

4.1. Альтернативная редукция суперматриц 223

4.1.1. Необратимое строение суперматриц 225

4.1.2. Мультипликативные свойства нечетно-редуцированных суперматриц 228

4.1.3. Унификация редуцированных суперматриц 229

4.1.4. Скаляры, антискаляры, обобщенные модули и сэндвич-полугруппа редуцированных суперматриц 230

4.1.5. Прямая сумма редуцированных суперматриц . . . 235

4.2. Представление полугрупп связок суперматрицами 237

4.2.1. Однопараметрические полугруппы редуцированных суперматриц 238

4.2.2. Скрученные прямоугольные связки 242

4.2.3. Представления прямоугольных связок 244

4.2.4. Непрерывные представления высших связок 248

4.2.5. Тонкое идеальное строение высших связок 251

4.3. Основные результаты и выводы 259

РАЗДЕЛ 5. Перманенты, scf-матрицы и необратимая гиперболическая геометрия 260

5.1. Свойства scf-матриц и их перманентов 260

5.1.1. $N = 2$ scf-матрицы 261

5.1.2. Ортогональные и scf-матрицы 266

5.1.3. Обратимость и доопределенные scf-матрицы . . . 267

5.1.4. Полугруппа $N = 2$ scf-матриц 270

5.1.5. $N = 4$ scf-матрицы 271

5.2. Неэвклидова плоскость и scf-матрицы 275

5.2.1. Определение и свойства per-отображений 276
5.2.2. Правые и левые двойные отношения 279
5.2.3. Per-аналог гиперболического расстояния на суперплоскости 285
5.3. Основные результаты и выводы 287

ЗАКЛЮЧЕНИЕ **288**

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ **293**

СПИСОК РИСУНКОВ **369**

СПИСОК ТАБЛИЦ **370**

Приложение А. Теория абстрактных полугрупп **371**
А.1. Группоиды, полугруппы и идеалы 371
А.2. Полугруппы и преобразования 376
А.3. Обратимость, нильпотентность и регулярность 377
А.4. Отношения и гомоморфизмы 381
А.5. Теория идеалов 385
А.6. Свойства отношений Грина 387

Приложение Б. Суперпространства, супермногообразия и их типы **389**
Б.1. Алгебраический подход к супермногообразиям 389
Б.2. Функциональный подход 391
Б.3. Различия между алгебраическим и функциональным подходами 393
Б.4. Суперконформные многообразия 394

Приложение В. Суперматрицы и необратимость **399**

В.1. Линейная супералгебра 399
В.2. Суперматричная алгебра 403
В.3. Суперслед и супердетерминант 406
В.4. Странные супералгебра, след и детерминант 409
В.5. Идеалы $(1|1) \times (1|1)$ суперматриц 412
В.6. Правые и левые Г-матрицы 413
В.7. Полугруппа множеств редуцированных матриц 416
В.8. Непрерывное суперматричное представление нулевых полугрупп 417
В.9. Отношение $\mathscr{R}$-эквивалентности для прямоугольной $(2|2)$-связки 421

Приложение Д. Перманенты и их обобщения для матриц с нильпотентными элементами **423**
Д.1. Перманенты и детерминанты 424
Д.2. Полуминоры и полуматрицы 427

Приложение Е. N-расширенные суперпространства и необратимые якобианы **434**
Е.1. $N = 1$ суперякобиан 434
Е.2. $(1|N)$-мерное суперпространство 438
Е.3. $N = 2$ березиниан 442
Е.4. Березинианы $N = 4$ редуцированных преобразований . . 445

Приложение Ж. Частные случаи редуцированных преобразований **448**
Ж.1. ρ-суперконформные преобразования и нильпотентные суперполя 448
Ж.2. Полугруппа расщепленных $N = 2$ SCf преобразований . 450
Ж.3. Вложение $N = 1 \hookrightarrow N = 2$ 455

Ж.4. Расщепленные $N = 4$ SCf преобразования 457
Ж.5. Дробно-линейные $N = 4$ преобразований и полуматрицы 466

Приложение З. Сплетающие четность преобразования, нечетные коциклы и деформации 469
З.1. Смешанные условия согласованности и нечетные аналоги коциклов 469
З.2. Деформации и TPt преобразования 475
З.3. Нечетные аналоги препятствий и смешанные θ-коциклы 481

СПИСОК УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Латинскими наклонными буквами обозначены четные величины a, b, Q и функции f, g, F, G; греческими буквами $\alpha, \beta, \theta, \Delta$ — нечетные;

$\mathrm{M}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{A}, \mathrm{D} \ldots$ — матрицы и суперматрицы;

$\mathcal{M}, \mathcal{S}, \mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R} \ldots$ — полуматрицы и полуминоры;

$\boldsymbol{\mathfrak{M}}, \boldsymbol{\mathfrak{S}}, \boldsymbol{\mathfrak{T}}, \boldsymbol{\mathfrak{A}}, \boldsymbol{\mathfrak{D}} \ldots$ — множества с умножением $(\star)$;

$\mathbf{M}, \mathbf{S}, \mathbf{T}, \mathbf{A}, \mathbf{D}, \mathbf{I} \ldots$ — абстрактные полугруппы с умножением $(*)$;

$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{D} \ldots$ — полугруппы преобразований;

$\mathcal{T}, \mathcal{U}, \mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{H}, \mathcal{G} \ldots$ — преобразования с умножением $(\circ)$;

$\mathbb{C}^{n|m}, \mathbb{R}^{n|m}, \mathbb{D}^{n|m}, \mathbb{V}_{\alpha\beta} \ldots$ — (супер)пространства и области в них;

$\boldsymbol{\Lambda}^{n|m} \ldots$ — линейные суперпространства;

$T\mathbb{C}^{n|m}\left(T^{*}\mathbb{C}^{n|m}\right) \ldots$ — (ко)касательные суперпространства;

$\mathscr{M}, \mathscr{N}, \mathscr{X}, \mathscr{Y}, \mathscr{U}_{\alpha} \ldots$ — (супер)многообразия и области в них;

$\mathbb{Z}, \mathbb{K}, \mathbb{N}, \Lambda_0, \Lambda_1 \ldots$ — (супер)числовые поля;

$\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{D}, \mathscr{H} \ldots$ — отношения Грина;

$\mathsf{L}, \mathsf{R}, \mathsf{D}, \mathsf{H} \ldots$ — классы эквивалентности с умножением $(\diamond)$;

$\boldsymbol{\Pi}, \boldsymbol{\Theta}_V, \boldsymbol{\Theta}_H, \boldsymbol{\Upsilon}_L, \boldsymbol{\Upsilon}_R, \mathsf{st} \ldots$ — транспонирования;

$\hat{\mathsf{S}}, \hat{\mathsf{T}}, \hat{\mathsf{A}}, \hat{\mathsf{D}} \ldots$ — операторы;

$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{d}, \boldsymbol{D} \ldots$ — инварианты;

$\Phi_{\alpha\beta}, \Lambda_{\alpha\beta} \ldots$ — функции перехода с композицией $(\circ)$;

$\varphi, \pi, \lambda \ldots$ — морфизмы и отображения;

$(\cdot)$ — умножение в грассмановой алгебре;

$(\odot_{\mathrm{X}}), (\circledcirc_{\mathrm{X}})$ — сэндвич умножения;

$\epsilon\,[x]$ — числовая часть величины x (отбрасывание нильпотентов);

SA — супераналитический;

SCf — суперконформный;

TPt — сплетающий четность (twisting parity of tangent space).

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Построение единой теории всех фундаментальных взаимодействий — электромагнитного, слабого, сильного и гравитационного — является важнейшей теоретической проблемой современной физики элементарных частиц. Существенным достижением в этом направлении явилось развитие методов суперсимметрии и супергравитации, которые позволили разрешить такие трудности предшествующих суперсимметрии калибровочных теорий фундаментальных взаимодействий (квантовой электродинамики, квантовой хромодинамики и модели Вайнберга-Салама), как включение гравитации и рассмотрение процессов при планковских энергиях.

Нелокальное многомерное обобщение супергравитации – теория суперструн – дала ответ на многие открытые вопросы, связанные с неперенормируемостью и космологической постоянной, а также с последовательной унификацией всех фундаментальных взаимодействий. В теории суперструн осуществился синтез разнообразных методов теоретической и математической физики. Тем не менее, дальнейший прогресс в понимании глубинных физических основ строения материи, в свою очередь, требует интенсивных поисков нестандартных путей разрешения известных проблем и привлечения принципиально новых теоретических идей.

Наиболее фундаментальными и общими являются абстрактные алгебраические свойства теории, лежащей в основе физики элементарных частиц. Как правило, вначале исследований такие свойства вводятся с математической точки зрения и лишь затем формулируются на

языке физических законов и предсказаний результатов эксперимента.

Так произошло и в случае суперсимметрии: антикоммутирующие величины рассматривались многими математиками еще начиная с прошлого столетия. Но лишь после открытия суперсимметрии физиками в начале 70-х годов она превратилась из чисто математической теории в "индустриальную" основу современного "моделестроения" с физическими конструкциями и конкретными предсказаниями новых элементарных частиц — суперпартнеров. Настоящий "бум суперсимметризации" потряс теоретическую физику 70-х и 80-х: все, что могло "суперсимметризоваться", незамедлительно "суперсимметризовалось". Основные ингредиенты теории после очевидных модификаций наделялись приставкой "супер", а затем построение уже суперсимметричной модели, исключая несущественные и не принимаемые в расчет моменты, копировались шаг за шагом из подобной несуперсимметричной версии, и последняя обязана была быть некоторым ее непрерывным пределом.

Однако, при этом абстрактные алгебраические свойства физической теории или вовсе не претерпевали изменений, либо влияние "суперсимметризации" было просто символичным. Так предполагалось, что именно супергруппы представляют собой адекватное суперобобщение соответствующих групп. И это удивительно, поскольку среди основных переменных суперсимметричной теории изначально присутствуют необратимые объекты и делители нуля. В частности, концепция суперпространства, допускающего унификацию описания бозонных и фермионных секторов теории, основана на введении дополнительных нильпотентных координат, тогда многие отображения и функции становятся необратимыми по определению. И все же, как это ни странно и ни парадоксально с математической точки зрения, они искусственно и необоснованно исключались из рассмотрения. Данная процедура была названа "факторизацией по нильпотентам" в физике (в теории полугрупп эта процедура хорошо известна и называется факторизацией Риса) и она (в

основном неаргументированно) применялась или подразумевалась при суперсимметризациях.

На самом деле, все преобразования множества, содержащего нильпотенты, или все отображения суперпространства сохраняющего вид определенной структуры образуют полугруппу (а не группу) относительно композиции. Поэтому категория групп, в рамках которой строились несуперсимметричные теории элементарных частиц, должна быть обобщена до категории полугрупп при математически строгом включении суперсимметрии в основополагающие принципы теории.

Другими словами, переход от пространства к суперпространству должен сопровождаться одновременным переходом от групп к суперполугруппам, а не супергруппам — “супер” обобщение физической теории должно сопровождаться “полу” обобщением ее математики в целом. Тогда в глобальном теоретико-групповом смысле суперсимметричные модели элементарных частиц обязаны иметь структуру полугруппы, в то время, как наблюдаемый их сектор при настоящих энергиях может удовлетворительно описываться их обратимой групповой частью. Поэтому не следует ограничиваться исследованиями лишь последней, поскольку свойства идеальной и групповой частей взаимообусловлены и взаимозависимы. В этом контексте важным также является пересмотр стандартного анзаца “факторизации”, а именно — “факторизовать по не-нильпотентам”, т. е. изучать “негрупповые” (или идеальные) свойства суперсимметричных теорий.

Таким образом, построение и исследование таких суперсимметричных моделей элементарных частиц, которые, с одной стороны, обладали бы математической общностью и корректностью в рамках аппарата теории полугрупп, а с другой стороны, имели бы достаточную физическую предсказательную силу, представляет собой актуальную научно-теоретическую проблему.

Основной объект в теории суперструн — это мировая поверхность

струны, следовательно построение и изучение необратимых и полугрупповых обобщений супермногообразий и суперконформной дифференциальной геометрии представляет собой первоочередную задачу.

В этой связи чрезвычайно актуальной является также проблема обратного влияния суперсимметрии на теорию полугрупп. Так, подробное исследование необратимых суперматриц приводит к новым и неожиданным результатам в идеальном строении и теории представлений суперматричных полугрупп, что, в свою очередь, может способствовать последовательному и корректному построению новых суперсимметричных моделей элементарных частиц, основанных на полугрупповых принципах.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Диссертация выполнена как часть исследований, проводимых на кафедрах теоретической и экспериментальной ядерной физики ХГУ в рамках координационного плана Министерства образования Украины “Комплексные исследования ядерных процессов и создание на их основе ядерно-физических методов для использования в энергетике и радиационной безопасности ядерных энергетических установок и технологий радиационной модификации материалов и экологии”.

Результаты диссертации вошли в отчеты госбюджетных тем “Исследования структуры атомных ядер и новых закономерностей в ядерных взаимодействиях” (тема №1-13-94, номер государственной регистрации 0194U018989) и “Исследования ядерных процессов с участием нуклонов и сложных частиц низких и средних энергий” (тема №1-13-97, номер государственной регистрации 0197U016494).

Цель и задачи исследования. Основной целью диссертационной работы является разработка и применение полугрупповых методов в суперсимметричных моделях элементарных частиц. Для этого решались такие задачи:

1. Подробный анализ необратимых свойств преобразований, возникающих при суперсимметризации физических теорий.
2. Поиск необратимых аналогов супермногообразий, расслоений и гомотопий.
3. Формулировка необратимой суперконформной дифференциальной геометрии и построение суперконформных полугрупп.
4. Классификация необратимых расширенных и нерасширенных суперконформных преобразований.
5. Нахождение нелинейных реализаций необратимых суперконформных преобразований.
6. Всесторонний анализ суперматричных полугрупп, поиск новых представлений и эквивалентностей.
7. Введение новых типов матриц, содержащих нильпотентные элементы и изучение их свойств.
8. Построение необратимого аналога гиперболической геометрии на суперплоскости.

Научная новизна полученных результатов. Научная новизна диссертационной работы состоит в построении нового направления в суперсимметричных моделях элементарных частиц, которое основано на включении полугрупп, идеалов и необратимых свойств в исследование математической структуры. Впервые определены необратимые аналоги супермногообразий, расслоений и гомотопий. Сформулирована новая необратимая суперконформная геометрия (и ее расширенные варианты), найдены новые типы суперконформных полугрупп и преобразований, которые сплетают четность касательного расслоения. Предложена альтернативная редукция суперматриц, которая приводит к новым абстрактным свойствам, полугруппам и супермодулям. Впервые суперматрицы используются для построения представлений полугрупп

связок, при этом найдены новые обобщенные отношения Грина. Построен необратимый вариант гиперболической геометрии на суперплоскости, где найдены необратимые аналоги двойных отношений, инвариантов и расстояний.

Практическое значение полученных результатов. Диссертационная работа носит теоретический характер. Ее результаты могут быть использованы для построения новых математически корректных моделей элементарных частиц, основанных на теории суперструн, переосмысленного анализа необратимости в уже имеющихся моделях, а также для поиска новых полугрупповых свойств и структур в суперсимметричных объектах и пространствах.

Личный вклад диссертанта. Все результаты получены автором самостоятельно.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты работы докладывались автором на 12 международных конференциях, 10 из которых проводились за рубежом:

1. Международная школа по теоретической и математической физике *(Гваделупа, Франция, 1993)*
2. Международный коллоквиум по теоретико-групповым методам в математической физике *(Париж, Франция, 1993)*
3. Международный конгресс по математической физике *(Париж, Франция, 1994)*
4. Международная краковская школа по теоретической физике *(Закопане, Польша, 1995)*
5. Международная конференция по калибровочным теориям, прикладной суперсимметрии и квантовой гравитации *(Леувен, Бельгия, 1995)*
6. Европейская школа по теории групп *(Валладолид, Испания, 1995)*

7. Международная конференция суперсимметрия-96 *(Коллеж Парк, США, 1996)*

8. Международная конференция по высшим гомотопическим структурам в математической физике *(Покипси, США, 1996)*

9. Международный семинар по суперсимметрии и квантовой теория поля памяти Д. В. Волкова *(Харьков, Украина, 1997)*

10. Международная конференция по суперсимметрии и квантовым симметриям памяти В. И. Огиевецкого *(Дубна, Россия, 1997)*

11. Международная алгебраическая конференция памяти Л. М. Глускина *(Славянск, Украина, 1997)*

12. Международный конгресс математиков *(Берлин, Германия, 1998)*

Материалы диссертационной работы представлялись и всесторонне обсуждались на многих семинарах в Украине, России, Германии, Англии, Франции, США и других странах.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 21 работах (из них 12 в зарубежных изданиях), а также в трудах упомянутых конференций. Все работы выполнены без соавторов. Большинство работ предварительно опубликовано также в интернете и хранится в международных электронных архивах США, Англии, Италии, Японии. Прямой доступ к ним возможен с интернетовской страницы автора: `http://www-home.univer.kharkov.ua/~duplij`.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из Введения, 5-ти основных разделов, раздела Выводы и приложений. Объем основного текста (без приложений и литературы) составляет 292 страницы. В работе имеется 3 рисунка, 3 таблицы и список литературы из 832 названий.

Во Введении обоснована актуальность проблемы, сформулирована цель работы, ее научная новизна, практическая ценность и апро-

бация, кратко изложено ее содержание.

В разделе "Теория необратимых супермногообразий" подробно анализируются обобщения понятий супермногообразия, суперрасслоение и гомотопии на необратимый случай. На языке карт и функций перехода вводятся понятие полусупермногообразия как необратимого аналога супермногообразия. Префикс "полу-" отражает тот факт что лежащие в основе морфизмы формируют полугруппы состоящие из известной групповой части и новой идеальной необратимой части, т.е. рассматривается полугрупповое обобщение предыдущего формализма.

Полукарта определяется как пара из суперобласти $\mathscr{U}_{\alpha,}^{noninv}$ и необратимого морфизма $\varphi_{\alpha}^{noninv}$. Тогда полуатлас есть объединение стандартных обратимых карт $\left\{\mathscr{U}_{\alpha,}^{inv}\varphi_{\alpha}^{inv}\right\}$ и полукарт $\left\{\mathscr{U}_{\alpha,}^{noninv}\varphi_{\alpha}^{noninv}\right\}$. Полусупермногообразие $\mathscr{M}$ есть суперпространство, представленное в качестве полуатласа.

Функции перехода на полусупермногообразии находятся не из стандартных выражений $\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}$ на пересечении суперобластей $\mathscr{U}_{\alpha} \cap \mathscr{U}_{\beta}$, а из системы уравнений

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \varphi_{\beta} = \varphi_{\alpha}, \qquad \Phi_{\beta\alpha} \circ \varphi_{\alpha} = \varphi_{\beta}.$$

В общем случае при нахождении $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\beta\alpha}$ эти уравнения не могут быть решены с помощью $\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_{\alpha} \circ \varphi_{\beta}^{-1}$ в силу необратимых φ_{α} и φ_{β}. Вместо этого ищутся искусственные приемы его решения, например, разложением в ряд по генераторам супералгебры, либо используя абстрактные методы теории полугрупп, которые рассматривают решения необратимых уравнений как классы эквивалентности.

Ослабление обратимости позволяет естественно обобщать условия коцикла для функций перехода полусупермногообразий. Они строятся аналогично условиям регулярности для элементов полугруппы. Так,

вместо стандартного $n = 2$ условия взаимной обратности функций перехода $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\Phi_{\beta\alpha}$ в виде $\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = 1_{\alpha\alpha}$ (где $1_{\alpha\alpha}$ — тождественное отображение на $\mathscr{U}_\alpha$) имеем обобщенное условие

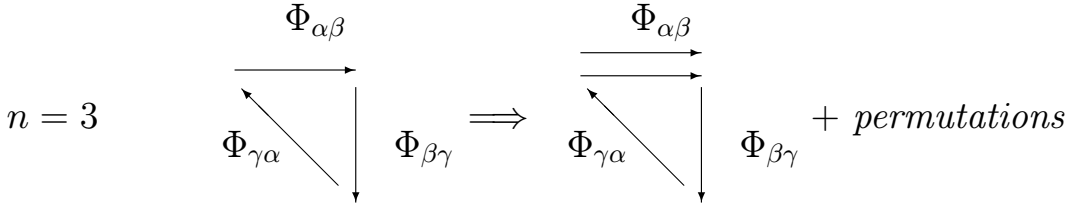
$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}$$

на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$. А вместо известного $n = 3$ условия коцикла $\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} = 1_{\alpha\alpha}$ на пересечении трех суперобластей $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ получаем его необратимый аналог

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}.$$

Аналогично строятся условия коцикла при произвольных n, которое мы называем n-регулярностью отображений. Понятно, что 3-регулярность совпадает с обыкновенной регулярностью.

Это позволяет сформулировать чрезвычайно общий анзац полукоммутативности для необратимых морфизмов, который при $n = 3$ описывается следующей коммутативной диаграммой



Получены также необратимые аналоги коциклов для рефлексивных полусупермногообразий.

Найден дополнительный нильпотентный тип ориентируемости на полусупермногообразиях, который обусловлен нильпотентностью березиниана функций перехода. Индекс нильпотентности березиниана позволяет нам систематизировать полусупермногообразия имеющие нильпотентную ориентируемость. Вводятся также башенные тождества и

препятственность, с помощью которых удается проклассифицировать полусупермногообразия. По аналогии с суперчислами имеем следующую классификацию:

- *Суперчисла.*

  1. Обыкновенные не равные нулю числа (обратимые).
  2. Суперчисла, имеющие ненулевую числовую часть (обратимые).
  3. Суперчисла, имеющие нулевую числовую часть (необратимые).

- *Полусупермногообразия.*

  1. Обыкновенные многообразия (функции перехода обратимы).
  2. Супермногообразия (функции перехода обратимы).
  3. Препятственные полусупермногообразия (функции перехода необратимы).

Аналогичным образом вводятся полурасслоения, в которых необратимость возникает за счет необратимости функций перехода, связанной с нильпотентами и дивизорами нуля в подстилающей супералгебре. Далее рассматриваются морфизмы и условия соответствия полурасслоений. Обобщенные условия коцикла для функций перехода полусупермногообразий и полурасслоений могут приводить к построению необратимых аналогов коциклов Чеха и спектральных последовательностей, что тесно связано с когомологическими методами теории полугрупп.

Для описания обобщенных морфизмов на полусупермногообразиях определяются четные и нечетные полугомотопии с необратимым четным или нечетным суперпараметром соответственно. Полугомотопии приводят к рассмотрению фундаментальных полугрупп и играют ту

же роль в изучении свойств непрерывности и классификации полусупермногообразий, которую обыкновенные гомотопии играют для обыкновенных (супер)многообразий.

Раздел "Необратимое обобщение $N = 1$ суперконформной геометрии" посвящен построению необратимой суперконформной дифференциальной геометрии $(1|1)$-мерного комплексного суперпространства $Z = (z, \theta) \in \mathbb{C}^{1|1}$, которая исключительно важна в теории суперструн, суперримановых поверхностей и в двумерных суперконформных теориях поля.

Вначале строится полугруппа супераналитических преобразований $\mathbb{C}^{1|1} \to \mathbb{C}^{1|1}$ и проводится их классификация по необратимости. Вводятся локальные единицы и нули и анализируются их свойства. Приведены соотношения на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ для супераналитических полусупермногообразий. Получено выражение для необратимого аналога березиниана и проведена классификация супераналитических преобразований $\mathbb{C}^{1|1} \to \mathbb{C}^{1|1}$ по индексу нильпотентности березиниана.

Далее подробно проанализированы все возможные редукции касательного $(1|1)$-мерного пространства без учета требования обратимости. Оказывается, что нетривиальных редукций имеется две, а не одна, как в обратимом случае. Это связано с фундаментальной формулой сложения березинианов редуцированных суперматриц касательного пространства

$$\operatorname{Ber} \mathrm{P}_A = \operatorname{Ber} \mathrm{P}_S + \operatorname{Ber} \mathrm{P}_T,$$

где P_A — полная суперматрица, P_S и P_T — треугольная и антитреугольная суперматрицы соответственно. Отсюда редуцированные (суперконформно-подобные) преобразования определяются проектированием березиниана на одно из слагаемых. Тогда в терминах преобразованных

координат $\tilde{Z} = \left(\tilde{z}, \tilde{\theta}\right)$ получаем два условия

$$\Delta\left(z, \theta\right) = D\tilde{z} - D\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta} = 0, \quad Q\left(z, \theta\right) = \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta} = 0,$$

где ∂ и D — обычная и суперпроизводная соответственно.

Первое из них определяет стандартные суперконформные преобразования $\mathcal{T}_{SCf}$ (обратимые и необратимые), а второе условие приводит к новым необратимым преобразованиям $\mathcal{T}_{TPt}$, сплетающим четность в касательном и кокасательном суперпространствах. Действительно, если суперконформные преобразования индуцируют ковариантные преобразования супердифференциалов $dZ = dz + \theta d\theta$ и суперпроизводных

$$D = D\tilde{\theta} \cdot \tilde{D}, \quad d\tilde{Z} = Q\left(z, \theta\right) \cdot dZ,$$

то сплетающие четность преобразования также дают ковариантные преобразования в касательном суперпространстве, но с вращением четности

$$\partial = \partial\tilde{\theta} \cdot \tilde{D}, \quad d\tilde{Z} = \Delta\left(z, \theta\right) \cdot d\theta.$$

Первые два соотношения является ключевыми для построения теории распределения на суперримановых поверхностях, которые определяются уравнением $\Delta\left(z, \theta\right) = 0$. Другое условие $Q\left(z, \theta\right) = 0$ определяет необратимый аналог суперримановых поверхностей, в которых четность касательного пространства не фиксирована. Такая конструкция с функциями перехода из $\mathcal{T}_{SCf}$ и $\mathcal{T}_{TPt}$ может рассматриваться как частный случай введенных ранее полусупермногообразий. Кроме того, новые сплетающие четность преобразования возможно могут приводить к дополнительным вкладам в амплитуду фермионных струн специальной конфигурации.

Рассмотрены также левые вырожденные редуцированные преобра-

зования $\mathcal{T}_{Deg_L}$, для которых оба условия $\Delta(z,\theta)=0$ и $Q(z,\theta)=0$ выполняются одновременно, а также правые вырожденные редуцированные преобразования $\mathcal{T}_{Deg_R}$, которые определяются условием $D\tilde{\theta}=0$.

Найдено единое описание обоих типов редуцированных преобразований с помощью альтернативной параметризации, в котором различие между ними определяется проекцией некоторого "спина редукции" $n=\pm 1/2$, где знак $\pm$ соответствует преобразованиям $\mathcal{T}_{SCf}$ и $\mathcal{T}_{TPt}$ соответственно. Приведена таблица умножения для "спина редукции" и описаны его свойства. Если суперконформные преобразования $\mathcal{T}_{SCf}$ являются супераналогом голоморфных преобразований, то сплетающие четность преобразования $\mathcal{T}_{TPt}$ можно трактовать как супераналог антиголоморфных преобразований комплексной плоскости, которые обязаны быть необратимыми.

Другим важным свойством сплетающих четность преобразований $\mathcal{T}_{TPt}$ является незамкнутость композиции (как, впрочем, и антиголоморфных преобразований). Однако, на пересечении трех суперобластей $\mathscr{U}\cap\tilde{\mathscr{U}}\cap\tilde{\tilde{\mathscr{U}}}$ и $\mathcal{T}:\mathscr{U}\to\tilde{\mathscr{U}}$, $\tilde{\mathcal{T}}:\tilde{\mathscr{U}}\to\tilde{\tilde{\mathscr{U}}}$, $\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}:\mathscr{U}\to\tilde{\tilde{\mathscr{U}}}$ выполняется следующий закон умножения преобразований $\tilde{\mathcal{T}}_{SCf}\circ\mathcal{T}_{TPt}=\tilde{\tilde{\mathcal{T}}}_{TPt}$. Отсюда видно, что множество сплетающих четность преобразований является правым идеалом для суперконформных преобразований. Кроме того, вместо стандартного условия коцикла на суперримановой поверхности $D\tilde{\tilde{\theta}}=D\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}\tilde{\tilde{\theta}}$ мы определяем "сплетенный коцикл"

$$\partial\tilde{\tilde{\theta}}=\partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}\tilde{\tilde{\theta}}$$

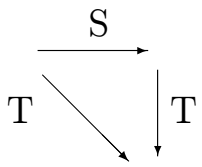
с множителями различной четности. Тогда возможно построение принципиально новых распределений и расслоений, которые не сохраняют четность, как в классическом случае.

Применяя анзац ослабления обратимости можно обобщить и сами суперконформные преобразования. Новая параметризация $N=1$ супер-

резиниана для обратимых N-SCf преобразований

$$\mathrm{Ber}\left(\tilde{Z}/Z\right) = k$$

ный морфизм может представляться в качестве произведения нечетно- и четно-редуцированных морфизмов, таковых, что



коммутативная диаграмма, которая ответственна также и за сплетенные коциклы в редуцированных суперконформных преобразованиях.

Построена полугруппа множеств редуцированных матриц. Множества четно- и нечетно-редуцированных суперматриц объединяются в некоторую сэндвич полугруппу с несимметричным умножением, зависящим от второго сомножителя. Полугруппа множеств редуцированных матриц изоморфна некоторой полугруппе правых нулей с сэндвич умножением.

Чтобы построить аналогичную сэндвич полугруппу с умножением не множеств, а самих суперматриц, вводится нечетный антикоммутирующий аналог $\mathcal{E}(\chi)$ (антискаляр) для скалярной суперматрицы $\mathrm{E}(x)$ (скаляра) по формулам $\mathrm{E}(x) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$, $\mathcal{E}(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & \chi \\ \chi & 0 \end{pmatrix}$. Тогда прямая сумма скаляра и анти-скаляра совпадает со странной подалгеброй Березина $\mathrm{E}(x) \oplus \mathcal{E}(\chi) = \mathrm{Q}_{\Lambda}(1)$. Определяется в этой связи также правое $\boldsymbol{\Upsilon}_R$ и левое $\boldsymbol{\Upsilon}_L$ антитранспонирования, которые имеют смысл корня из оператора смены четности $\boldsymbol{\Pi}$, поскольку $\boldsymbol{\Upsilon}_R \boldsymbol{\Upsilon}_L = \boldsymbol{\Pi}$. Тогда конкретная реализация нечетного правого, левого и двустороннего модулей имеет вид

$$\mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{M} = \chi \mathrm{M}^{\boldsymbol{\Upsilon}_R}, \quad \mathrm{M}\mathcal{E}(\chi) = \mathrm{M}^{\boldsymbol{\Upsilon}_L}\chi, \quad \mathcal{E}(\chi_1)\,\mathrm{M}\mathcal{E}(\chi_2) = \chi_1 \mathrm{M}^{\boldsymbol{\Pi}} \chi_2,$$

где, в отличие от стандартного супермодуля, в правой части появились антитранспонирования и оператор смены четности. Нахождение новых

типов нечетных модулей является исключительно важным для построения и применения новых типов супермногообразий и полусупермногообразий.

Чтобы получить объединенное умножение четно- и нечетно-редуцированных суперматриц и построить соответствующую полугруппу, введенные антискаляры использовались наравне со скалярами. Если трактовать обычное умножение суперматриц как сэндвич-умножение со скаляром $\mathrm{E}(1)$, то сэндвич-умножение редуцированных суперматриц (с "суперполем" $X = (x, \chi)$) определится как

$$\mathrm{R}_1 \star_X \mathrm{R}_2 = \begin{cases} \mathrm{R}_1 \mathrm{E}(x) \mathrm{R}_2, & \mathrm{R}_2 = \mathrm{S}, \\ \mathrm{R}_1 \mathcal{E}(\chi) \mathrm{R}_2, & \mathrm{R}_2 = \mathrm{T}. \end{cases}$$

Поскольку сэндвич-умножение ассоциативно, редуцированные суперматрицы образуют полугруппу, которая изоморфна полугруппе правых нулей.

Рассмотрена также роль нечетных модулей и антискаляров в прямой сумме множеств редуцированных суперматриц, где введенны нечетные аналоги собственных чисел, характеристических функций (по формуле $\mathrm{Ber}(\mathcal{E}(\chi) - \mathrm{T})$ вместо $\mathrm{Ber}(\mathrm{E}(x) - \mathrm{S})$) и сформулирована обобщенная теорема Гамильтона-Якоби.

Важную роль в суперсимметричных теориях играют непрерывные полугруппы редуцированных суперматриц. Рассмотрена и подробно проанализирована идеальная структура многопараметрических полугрупп нечетно-редуцированных суперматриц. Показано, что общий вид суперматриц, образующих полугруппу (Γ-полугруппу), есть

$$\mathrm{T}^{\Gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \mathrm{Ann}\,\Gamma & \mathrm{B} \end{pmatrix},$$

РАЗДЕЛ 1

ТЕОРИЯ НЕОБРАТИМЫХ СУПЕРМНОГООБРАЗИЙ

В данном разделе рассматривается обобщение понятий супермногообразия, расслоения и гомотопии на необратимый случай. Используемый язык карт и функций перехода позволяет определить полусупермногообразие как необратимый аналог супермногообразия в общепринятом определении функционального подхода. Вводятся необратимые карты, атласы и функции перехода, для которых предлагаются соответствующие уравнения. Находятся обобщенные условия коцикла, а также новый нильпотентный тип ориентируемости полусупермногообразий. Формулируется общий принцип полукоммутативности для необратимых морфизмов. В терминах уравнений на функции перехода определяются морфизмы полурасслоений. Приводятся также условия рефлексивности для полусупермногообразий и полурасслоений. Вводятся четные и нечетные полугомотопии с необратимым четным или нечетным суперпараметром соответственно, которые играют важную роль в классификации полусупермногообразий и построении фундаментальных полугрупп.

Общепринятым считается [22, 23], что идея обратимых супермногообразий впервые была высказана неявно в работах [24, 25] в связи с обобщением классической динамики и дискуссией о классическом пределе для фермионов [26]. Математические аспекты групп и алгебр с антикоммутирующими переменными первоначально рассматривались в работах [27–29], но лишь в рамках формального правила “протаскивания знака” и предписания “о возможности обобщения всех основ-

ных понятий анализа, при котором образующие грассмановой алгебры стали бы играть роль, равноправную с вещественными или комплексными переменными" ([30, с. 9]). Именно в этой широко известной фразе и заключалось ограничение на дальнейшее развитие теории супермногообразий в абстрактном направлении: "равноправие" подразумевало в качестве "супераналогов" тривиально подобные (с точностью до замены некоторых знаков с минуса на плюс и четных величин на нечетные) объекты и не позволяло даже предполагать существования иных абстрактых алгебраических и геометрических структур.

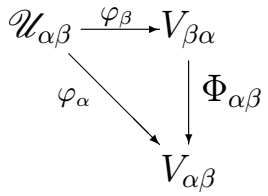
В начале 70-х в конкретных моделях элементарных частиц [31, 32] отечественными физиками был открыт новый тип симметрии [33–39] — между коммутирующими бозонами, которые описывают калибровочные взаимодействия, и антикоммутирующими фермионами, которые соответствуют взаимодействующим с их помощью частицам. Однако действительное признание это фундаментальное направление получило только через несколько лет *), когда такая же бозон-фермионная симметрия, но в других моделях, была названа западными учеными красивым и эффектным словом "суперсимметрия" [41–46]. К моменту появления суперсимметрии в физике оказалось, что математический аппарат для ее описания (супергруппы и супералгебры Ли) уже был создан [27, 47]. После чего количество работ по суперобобщениям физических теорий стремительно начало возрастать (см., например, обзоры [48–58] и книги [59–63]). Элементам рассматриваемых теорий присваивалась завораживающая приставка "супер", но реальное "усовершенствование" опять-таки сводилось к заменам знаков и добавлению нечетных величин при неизменных основных абстрактных конструкциях, что, казалось бы, подтверждало математическую гипотезу "равноправия" антикоммутирующих величин [22, 30], но лишь на первый

Примечание. История этого периода подробно изложена в [40].

зом. Пусть $\mathscr{U}_{\alpha\beta} = \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \neq \varnothing$ и

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha &: \mathscr{U}_\alpha \to V_\alpha \subset \mathbb{R}^{n|m}, \\ \varphi_\beta &: \mathscr{U}_\beta \to V_\beta \subset \mathbb{R}^{n|m}. \end{aligned} \tag{1.1}$$

К тому же, вышеупомянутые морфизмы ограничиваются $\varphi_\alpha : \mathscr{U}_{\alpha\beta} \to V_{\alpha\beta} = V_\alpha \cap \varphi_\alpha(\mathscr{U}_{\alpha\beta})$ и $\varphi_\beta : \mathscr{U}_{\alpha\beta} \to V_{\beta\alpha} = V_\beta \cap \varphi_\beta(\mathscr{U}_{\alpha\beta})$. Отображения $\Phi_{\alpha\beta} : V_{\beta\alpha} \to V_{\alpha\beta}$, которые необходимы, чтобы сделать следующую диаграмму



(1.2)

коммутирующей, называются *функциями перехода* многообразия в данном атласе.

Здесь мы подчеркиваем, во-первых, что $\mathscr{U}_{\alpha\beta} \subset \mathscr{M}$, а $V_{\alpha\beta}, V_{\beta\alpha} \subset \mathbb{R}^{n|m}$. Во-вторых, из (1.2) обычно делается вывод, что

$$\Phi_{\alpha\beta} = \varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}. \tag{1.3}$$

(Супер) функции перехода $\Phi_{\alpha\beta}$ дают нам возможность к восстановить все (супер) многообразие $\mathscr{M}$ из индивидуальных карт и координатых отображений. В самом деле, они содержат всю информацию о (супер) многообразии. Они могут принадлежать к различным функциональным классам, что дает возможность уточнить более узкие классы многообразий и супермногообразий, например (супер) гладкие, аналитические, липшицевы и другие [179, 180]. В большинстве случаев “супер” только формально различает окрестностное определение многообразия и супермногообразия (что дает нам возможность записать его

в скобках) и свойства функций $\Phi_{\alpha\beta}$, большинство же формул при этом остаются прежними [112,174,181]. Здесь мы не обсуждаем их подробно и пытаемся налагать минимум ограничений на $\Phi_{\alpha\beta}$, концентрируя наше внимание на их абстрактных свойствах и обобщениях, следующих из них.

Дополнительно, из (1.3) следует, что функции перехода удовлетворяют условиям коцикла

$$\Phi_{\alpha\beta}^{-1} = \Phi_{\beta\alpha} \tag{1.4}$$

на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ и

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} = 1_{\alpha\alpha} \tag{1.5}$$

на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$, где $1_{\alpha\alpha} \stackrel{def}{=} \mathrm{id}\ (\mathscr{U}_\alpha)$. Обычно предполагается, что все отображения φ_α являются гомеоморфизмами, и они могут описываться взаимооднозначными обратимыми непрерывными (супер) гладкими функциями (т. е. происходит "переход" в обоих направлениях между любыми двумя пересекающимися областями $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \neq \varnothing$). Можно было бы предположить, что логично не отличать $\mathscr{U}_\alpha$ и $D^{n|m}$, т. е. локально супермногообразия представляются как целостное суперпространство $\mathbb{R}^{n|m}$. Однако, дело не только в более богатой структуре расслоении [182–184] и пучка [106, 185, 186] из-за рассмотрения всех построений над алгеброй Грассмана (или над более общей алгеброй [117, 126, 133, 187]). Проблема заключается в ином абстрактном уровне построений, если условия обратимости в некоторой мере ослаблены.

на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ *пересечениях и*

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}, \tag{1.10}$$

$$\Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\beta\gamma}, \tag{1.11}$$

$$\Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} = \Phi_{\gamma\alpha} \tag{1.12}$$

на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ *и*

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\rho} \circ \Phi_{\rho\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}, \tag{1.13}$$

$$\Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\rho} \circ \Phi_{\rho\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\beta\gamma}, \tag{1.14}$$

$$\Phi_{\gamma\rho} \circ \Phi_{\rho\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\rho} = \Phi_{\gamma\rho}, \tag{1.15}$$

$$\Phi_{\rho\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\rho} \circ \Phi_{\rho\alpha} = \Phi_{\rho\alpha} \tag{1.16}$$

на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma \cap \mathscr{U}_\rho$.

Здесь первое соотношение (1.9) призвано обобщить первое условие коцикла (1.4), тогда как другие соотношения соответствуют (1.5). Мы называем соотношения (1.9)–(1.16) *башенными соотношениями* [19].

Определение 1.8. *Полусупермногообразие — рефлексивное, если, в дополнение к* (1.9)–(1.16)*, функции полуперехода* $\Phi_{\alpha\beta}$ *удовлетворяют условиям рефлексивности*

$$\Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\beta\alpha} \tag{1.17}$$

на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ *пересечениях и*

$$\Phi_{\alpha\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\gamma} = \Phi_{\alpha\gamma}, \tag{1.18}$$

$$\Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} = \Phi_{\gamma\beta}, \tag{1.19}$$

$$\Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\beta\alpha} \tag{1.20}$$

на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ *и*

$$\Phi_{\alpha\rho} \circ \Phi_{\rho\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\rho} = \Phi_{\alpha\rho}, \tag{1.21}$$

$$\Phi_{\rho\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\rho} \circ \Phi_{\rho\gamma} = \Phi_{\rho\gamma}, \tag{1.22}$$

$$\Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\rho} \circ \Phi_{\rho\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} = \Phi_{\gamma\beta}, \tag{1.23}$$

$$\Phi_{\beta\alpha} \circ \Phi_{\alpha\rho} \circ \Phi_{\rho\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\beta\alpha} \tag{1.24}$$

на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma \cap \mathscr{U}_\rho$.

Замечание **1.9.** Можно было бы считать, что условия рефлексивности (1.17)–(1.24) отличаются от (1.9)–(1.16) лишь индексом перестановки, однако, это так. Функции $\Phi_{\alpha\beta}$, входящие в эти две системы уравнений, являются теми же самыми, и, следовательно, последние представляют собой систему независимых уравнений, накладываемых на $\Phi_{\alpha\beta}$.

Предложение 1.10. *Соотношения, аналогичные* (1.9)–(1.24)*, но имеющие два или более множителей в правой части, следуют из предыдущих.*

Доказательство. Например, рассмотрим

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma}. \tag{1.25}$$

Умножая справа на $\Phi_{\alpha\beta,}$ мы выводим

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\alpha\beta}. \tag{1.26}$$

Затем, используя (1.9), мы получаем

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} = \Phi_{\alpha\beta}, \tag{1.27}$$

что совпадает с (1.10). ■

Замечание **1.11.** В любых действиях с необратимыми функциями $\Phi_{\alpha\beta}$ мы не имеем права сокращать, поскольку полугруппа функций $\Phi_{\alpha\beta}$ представляет собой полугруппу без сокращений, и мы вынуждены использовать методы, подобные [205–208].

Следствие 1.12. *Соотношения* (1.9)–(1.24) *удовлетворяются тождественно в стандартном обратимом случае, т. е. когда условия* (1.3), (1.4) *и* (1.5) *выполняются.*

Замечание **1.13.** Уравнения (1.6)–(1.7), определяющие функции полуперехода $\Phi_{\alpha\beta,}$ могут не иметь единственных решений, и в таком случае $\Phi_{\alpha\beta}$ должны рассматриваться, в качестве соответствующих множеств функций.

Следствие 1.14. *Функции* $\Phi_{\alpha\beta,}$ *удовлетворяющие* (1.9)–(1.24), *могут быть рассмотрены как некоторое необратимое суперобобщение функций перехода для коциклов в чеховских когомологиях покрытий* [209, 210].

1.2.2. О р и е н т а ц и и п о л у с у п е р м н о г о о б р а з и й . Известно, что ориентации обычных многообразий определяется знаком якобиана функций перехода $\Phi_{\alpha\beta,}$ записанным в зависимости от локальных координат на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ пересечениях [177, 178, 188]. Поскольку этот знак принадлежит $\mathbb{Z}_2$, существуют две ориентации на $\mathscr{U}_\alpha$. Две перекрывающиеся карты называются *согласованно ориентированными* (или *сохраняющими ориентацию*), если $\Phi_{\alpha\beta}$ имеет положительный якобиан,

$$n = 4 : \quad ©_{®^{-}} \pm ©_{-^{\circ}} \pm ©_{\circ_{\pm}} \pm ©_{\pm®} = 1_{®®} \tag{1.31}$$

$$\mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha}, \tag{1.33}$$

$$\mathrm{e}^{(3)}_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} \circ \mathrm{e}^{(n)}_{\beta\beta} = \Phi_{\alpha\beta}. \tag{1.38}$$

Доказательство. Следует прямо из соотношений (1.9)–(1.16) и определений (1.9)–(1.16). ■

Предложение 1.26. *Башенные тождества являются идемпотентами*

$$\mathrm{e}^{(n)}_{\alpha\alpha} \circ \mathrm{e}^{(n)}_{\alpha\alpha} = \mathrm{e}^{(n)}_{\alpha\alpha}. \tag{1.39}$$

Доказательство. Мы доказываем утверждение для $n = 2$ и для другого n его можно доказать по индукции. Запишем (1.39) как

$$\mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha} \circ \mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha} = \mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \left(\mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta}\right) \circ \Phi_{\beta\alpha}.$$

Затем, используя (1.37), мы получаем

$$\left(\mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha} \circ \Phi_{\alpha\beta}\right) \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha}.$$

■

Несуперсимметричные функциональные уравнения подобного вида были исследованы в [229].

Определение 1.27. *Сопряженные башенные тождества соответствуют тому же разбиению полусупермногообразия и состоят из функций полуперехода, взятых в противоположном порядке*

$$\tilde{\mathrm{e}}^{(1)}_{\alpha\alpha} = \mathrm{e}^{(1)}_{\alpha\alpha}, \tag{1.40}$$

$$\tilde{\mathrm{e}}^{(2)}_{\alpha\alpha} = \mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha}, \tag{1.41}$$

$$\tilde{\mathrm{e}}^{(3)}_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha}, \tag{1.42}$$

$$\tilde{\mathrm{e}}^{(4)}_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\delta} \circ \Phi_{\delta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} \tag{1.43}$$

$$\ldots \quad \ldots$$

Сопряженные башенные тождества также играют роль башенных тождеств, но для условий рефлексивности (1.17)–(1.24).

По аналогии с (1.37)–(1.38) мы имеем

Предложение 1.28. *Сопряженныя башенные тождества являются рефлексивными единицами, но для функций полуперехода* $\Phi_{\beta\alpha}$

$$\tilde{\mathrm{e}}^{(n)}_{\beta\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\beta\alpha}, \tag{1.44}$$

$$\Phi_{\beta\alpha} \circ \tilde{\mathrm{e}}^{(n)}_{\alpha\alpha} = \Phi_{\beta\alpha}. \tag{1.45}$$

Предложение 1.29. *При одном и том же разбиении сопряженные башенные тождества аннулируют башенные тождества в следующем смысле*

$$\mathrm{e}^{(n)}_{\alpha\alpha} \circ \tilde{\mathrm{e}}^{(n)}_{\alpha\alpha} = \mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha}. \tag{1.46}$$

Доказательство. Рассмотрим пример $n = 3$. Используя определения, мы выводим

$$\mathrm{e}^{(3)}_{\alpha\alpha} \circ \tilde{\mathrm{e}}^{(3)}_{\alpha\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha}$$

$$= \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ (\Phi_{\gamma\alpha} \circ \Phi_{\alpha\gamma}) \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\gamma} \circ \mathrm{e}^{(2)}_{\gamma\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha}$$

$$= \Phi_{\alpha\beta} \circ (\Phi_{\beta\gamma} \circ \Phi_{\gamma\beta}) \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \mathrm{e}^{(2)}_{\beta\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \Phi_{\alpha\beta} \circ \Phi_{\beta\alpha} = \mathrm{e}^{(2)}_{\alpha\alpha}.$$

Для остальных n утверждение доказывается по индукции. ■

Определение 1.30. *Полусупермногообразие называется точным, если башенные тождества не зависят от разбиения.*

Умножение башенных тождеств для точного полусупермногообра-

зия определяется следующим образом

$$\mathrm{e}^{(n)}_{\alpha\alpha} \circ \mathrm{e}^{(m)}_{\alpha\alpha} = \mathrm{e}^{(n+m)}_{\alpha\alpha}. \tag{1.47}$$

Утверждение 1.31. *Умножение* (1.47) *ассоциативно.*

Следовательно, мы можем дать

Определение 1.32. *Башенные тождества точного полусупермногообразия образуют башенную полугруппу относительно умножения* (1.47).

Таким образом, мы получили количественное описание внутренних свойств необратимости полусупермногообразий.

Предположение 1.33. *Введенная башенная полугруппа играет ту же роль для полусупермногообразий, что и фундаментальная группа для обыкновенных многообразий* [209, 230, 231].

1.2.5. О б о б щ е н н а я р е г у л я р н о с т ь и п о л у к о м м у т а т и в н ы е д и а г р а м м ы . Полученные выше построения имеют общее значение для любого числа необратимых отображений.

Расширение $n = 2$ коцикла, задаваемое (1.9), может быть рассмотрено как некоторая аналогия с регулярными [232–235] или псевдообратными [236] элементами в полугруппах [237–240] или обобщенными обратными в теории матриц [241–245] и в теории обобщенных инверсных морфизмов [246, 247].

Соотношения (1.10)–(1.16) с высшими n могут рассматриваться как необратимый аналог регулярности для коциклов высшего порядка. Следовательно, по аналогии с (1.9)–(1.16), естественно сформулировать общее

Определение 1.34. *Отображение* $\Phi_{\alpha\beta}$ *называется* n*-регулярным, если*

определяется уравнением

$$\pi \circ \boldsymbol{s} \circ \pi = \pi. \tag{1.49}$$

Рефлексивное полусечение $\boldsymbol{s}_{refl}$ *удовлетворяет дополнительному условию*

$$\boldsymbol{s}_{refl} \circ \pi \circ \boldsymbol{s}_{refl} = \boldsymbol{s}_{refl}. \tag{1.50}$$

Пусть $\tilde{\pi} : \mathscr{M} \times F \to \mathscr{M}$ представляет собой канонический индекс полуоператора проектирования на первый множитель $\tilde{\pi}(b, f) = b,\ \ f \in F$, тогда $\tilde{\pi}$ приводит к *расслоению-произведению*. Если $\lambda : E \to \mathscr{M} \times F$ представляет собой морфизм (называемый *тривиализацией*), тогда $\tilde{\pi} \circ \lambda = \pi$, и полурасслоение $\mathfrak{L} = (E, \mathscr{M}, F, \pi)$ является *тривиальным*. Если существует непрерывное отображение $\eta : \mathscr{M} \to F$, тогда полурасслоение $(\mathscr{M} \times F, \mathscr{M}, F, \tilde{\pi})$ допускает сечение $\boldsymbol{s} : \mathscr{M} \to \mathscr{M} \times F$ заданное формулой $\boldsymbol{s}(b) = (b, \eta(b))$.

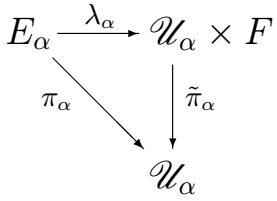
Пусть для заданной суперобласти $\mathscr{U}_\alpha$ в полусупермногообразии имеем соответственную суперобласть в базе

$$E_\alpha \stackrel{def}{=} \{x \in E \,|\, \pi_\alpha(x) = b,\, b \in \mathscr{U}_\alpha \subset \mathscr{M}\}$$

(здесь мы намеренно не используем стандартное обозначение $\pi^{-1}(\mathscr{U}_\alpha)$ для E_α, так как теперь допускается, чтобы π_α было необратимым), где $\pi_\alpha : E_\alpha \to \mathscr{U}_\alpha$ представляет собой сужение отображения π на суперобласть $\mathscr{U}_\alpha$, т. е. $\pi_\alpha \stackrel{def}{=} \pi\,|_{\mathscr{U}_\alpha}$.

Определение 1.38. *Полурасслоение, определяемое* $\mathfrak{L} = (E, M, F, \pi)$, *называется локально тривиальным, если* $\forall b \in \mathscr{M}$ *существуют суперблсти* $\mathscr{U}_\alpha \ni b$ *такие, что можно найти тривиализирующие морфизмы* $\lambda_\alpha : E_\alpha \to \mathscr{U}_\alpha \times F$ *удовлетворяющие* $\tilde{\pi}_\alpha \circ \lambda_\alpha = \pi_\alpha$.

Так что диаграмма



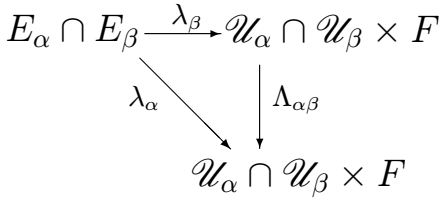
(1.51)

коммутирует.

Определение 1.39. *Полусечение локально тривиального полурасслоения* $\mathfrak{L}$ *дается отображениями* $\boldsymbol{s}_\alpha : \mathscr{U}_\alpha \to E$, *которые удовлетворяют условиям совместимости*

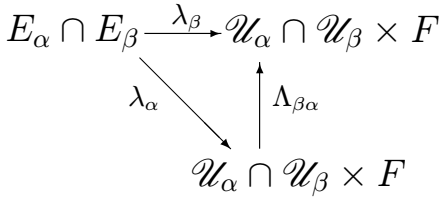
$$\lambda_\alpha \circ \boldsymbol{s}_\alpha \mid_b = \lambda_\beta \circ \boldsymbol{s}_\beta \mid_b, \;\; b \in \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta. \tag{1.52}$$

Теперь пусть $\{\mathscr{U}_\alpha, \lambda_\alpha\}$ представляет собой тривиализирующее покрытие такое, что $\cup \mathscr{U}_\alpha = \mathscr{M}$ и $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \neq \varnothing \Rightarrow E_\alpha \cap E_\beta \neq \varnothing$. Тогда мы требуем, чтобы тривиализирующие морфизмы λ_α находились в соответствии, и это значит, что диаграммы



(1.53)

и



(1.54)

должны коммутировать,где $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\Lambda_{\beta\alpha}$ — отображения, действующие вдоль полуслоя F.

Определение 1.40. *Склеивающие функции полуперехода локально тривиального полурасслоения* $\mathfrak{L} = (E, \mathscr{M}, F, \pi)$ *определяются уравнени-*

гда), то морфизм f_E действует следующим образом $\boldsymbol{s}(b) \to \boldsymbol{s}'(\mathrm{f}_{\mathscr{M}}(b))$.

В большинстве приложений расслоенных пространств морфизм $\mathrm{f}_{\mathscr{M}}$ есть тождество, и $\mathbf{f}_0 \stackrel{def}{=} (\mathrm{f}_E, \mathrm{id})$ называется *b-морфизмом* [260]. Тем не менее, в случае полурасслоений может иметь место обратная ситуация, когда $\mathrm{f}_{\mathscr{M}}$ представляет собой необратимый морфизм.

Для каждого заданного $b \in \mathscr{M}$ существуют тривиализирующие отображения $\lambda : E_b \to \mathscr{U} \times F$ и $\lambda' : E_{\mathrm{f}_{\mathscr{M}}(b)} \to \mathscr{U}' \times F'$, $\mathrm{f}_{\mathscr{M}}(\mathscr{U}) \subset \mathscr{U}'$, которые приводят к отображению полуслоя h_b, определяемого коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccc} E_b & \xrightarrow{\mathrm{f}_E(b)} & E'_{\mathrm{f}_{\mathscr{M}}(b)} \\ {\scriptstyle\lambda}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda'} \\ \mathscr{U} \times F & \xrightarrow{h_b} & \mathscr{U}' \times F' \end{array} \tag{1.75}$$

Чтобы локально описать морфизм полурасслоений $\mathfrak{L} \stackrel{\mathrm{f}}{\to} \mathfrak{L}'$, мы выбираем открытые покрытия $\mathscr{M} = \cup \mathscr{U}_\alpha$ и $\mathscr{M}' = \cup \mathscr{U}'_{\alpha'}$ наряду с тривиализациями λ_α и $\lambda'_{\alpha'}$ (см. (1.51)). Тогда связь между функциями полуперехода $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\Lambda'_{\alpha'\beta'}$ (1.55)–(1.56) двух полурасслоений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$ может быть найдена из коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{U}_{\alpha\beta} \times F & \xrightarrow{\Lambda_{\alpha\beta}} & \mathscr{U}_{\alpha\beta} \times F \\ {\scriptstyle h_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_\beta} \\ \mathscr{U}'_{\alpha'\beta'} \times F' & \xrightarrow{\Lambda'_{\alpha'\beta'}} & \mathscr{U}'_{\alpha'\beta'} \times F' \end{array} \tag{1.76}$$

где морфизмы h_α определяются диаграммой

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\mathrm{f}_E} & E' \\ {\scriptstyle\lambda_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\lambda'_{\alpha'}} \\ \mathscr{U}_\alpha \times F & \xrightarrow{h_\alpha} & \mathscr{U}'_{\alpha'} \times F' \end{array} \tag{1.77}$$

Из (1.76) мы имеем соотношение между функциями полуперехода

$$h_\alpha \circ \Lambda_{\alpha\beta} = \Lambda'_{\alpha'\beta'} \circ h_\beta \tag{1.78}$$

которое выполняется тождественно также и для необратимых h_α, тогда как в обратимом случае [260,261] уравнение (1.78) решается относительно $\Lambda'_{\alpha'\beta'}$ стандартным образом $\Lambda'_{\alpha'\beta'} = h_\alpha \circ \Lambda_{\alpha\beta} \circ h_\beta^{-1}$, что может рассматриваться как эквивалентность коциклов. Однако в общем случае (1.78) представляет собой систему супер уравнений, которые должны решаться стандартными [30] либо расширенными [269] методами суперанализа [91].

Предположим, $\mathscr{M}$ допускает тривиализирующие покрытия $\{\mathscr{U}_\alpha, \lambda_\alpha\}$ и $\{\mathscr{U}'_{\alpha'}, \lambda'_{\alpha'}\}$. В общем случае они не связаны между собой, и функции полуперехода $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\Lambda'_{\alpha'\beta'}$ независимы. Однако, если $\mathscr{M}$ представляет собой базовое суперпространство для двух полурасслоений $\mathfrak{L}$ и $\mathfrak{L}'$, которые связаны b-морфизмом $\mathfrak{L} \xrightarrow{\mathbf{f}_0} \mathfrak{L}'$, тогда $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\Lambda'_{\alpha'\beta'}$ должны находиться в соответствии.

Предложение 1.45. *Функции полуперехода $\Lambda_{\alpha\beta}$ и $\Lambda'_{\alpha'\beta'}$ двух полурасслоений находятся в соответствии, если существуют дополнительные отображения $\tilde{\Lambda}_{\alpha'\beta} : \mathscr{U}'_{\alpha'} \cap \mathscr{U}_\beta$ и $\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta'} : \mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}'_{\beta'}$ связанные между собой соотношениями*

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha'\beta} \circ \tilde{\Lambda}_{\beta\alpha'} \circ \tilde{\Lambda}_{\alpha'\beta} = \tilde{\Lambda}_{\alpha'\beta} \tag{1.79}$$

на $\mathscr{U}'_{\alpha'} \cap \mathscr{U}_\beta$ и

$$\tilde{\Lambda}_{\alpha\beta'} \circ \tilde{\Lambda}_{\beta'\alpha} \circ \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta'} = \tilde{\Lambda}_{\alpha\beta'} \tag{1.80}$$

на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}'_{\beta'}$ пересечениях.

$$\Lambda'_{\gamma'\beta'} \circ \Lambda'_{\beta'\alpha'} \circ \tilde{\Lambda}_{\alpha'\rho} \circ \tilde{\Lambda}_{\rho\gamma'} \circ \Lambda'_{\gamma'\beta'} = \Lambda'_{\gamma'\beta'}, \tag{1.117}$$

$$\Lambda'_{\beta'\alpha'} \circ \tilde{\Lambda}_{\alpha'\rho} \circ \tilde{\Lambda}_{\rho\gamma'} \circ \Lambda'_{\gamma'\beta'} \circ \Lambda'_{\beta'\alpha'} = \Lambda'_{\beta'\alpha'} \tag{1.118}$$

на $\mathscr{U}'_{\alpha'} \cap \mathscr{U}'_{\beta'} \cap \mathscr{U}'_{\gamma'} \cap \mathscr{U}_{\rho}$.

Аналогично мы можем определять и исследовать главные и ассоциированные полурасслоения со структурной полугруппой.

1.4. Необратимость и полугомотопии

Здесь мы кратко остановимся на некоторых возможностях расширения понятия гомотопии на необратимые непрерывные отображения [19].

Гомотопия [188,209,230,231] представляет собой непрерывное отображение между двумя отображениями пространств $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ в пространстве $\boldsymbol{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ отображений $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ таковых, что $\gamma_{t=0}(x) = f(x)$, $\gamma_{t=1}(x) = g(x)$, $x \in \mathscr{X}$. Отображения $f(x)$ и $g(x)$ называются *гомотопными*. Другими словами [210] гомотопия из $\mathscr{X}$ в $\mathscr{Y}$ представляет собой непрерывную функцию $\gamma : \mathscr{X} \times I \to \mathscr{Y}$, где $I = [0.1]$ единичный интервал. Для заданного $t \in I$ имеются *шаги* $\gamma_t : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ определяемые, как $\gamma_t(x) = \gamma(x, t)$.

Гомотопическое отношение, делящее $\boldsymbol{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ на множество классов эквивалентности $\pi(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$, называется *гомотопическими классами,* которые представляют собой множество связных компонент из $\boldsymbol{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$. Поэтому для $\pi(\bullet, \mathscr{Y})$ (где $\bullet$ представляет собой точку) гомотопические классы соответствуют связным компонентам $\mathscr{Y}$. Если $\boldsymbol{C}(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ связны, тогда гомотопия между $f(x)$ и $g(x)$ может выбираться как их среднее, т. е.

$$\gamma_t(x) = tf(x) + (1-t)\, g(x). \tag{1.119}$$

Два отображения f и g *гомотопически эквивалентны*, если $f \circ g$ и $g \circ f$ гомотопны тождественному отображению.

Теперь предположим $\mathscr{X}$ и $\mathscr{Y}$ — супермногообразия в некотором из определений [111, 112, 117, 181] или полусупермногообразие в нашей формулировке (см. **Определение 1.3**), тогда существует возможность расширения понятия гомотопии*) [19]. Идея заключается в том, чтобы расширить определение параметра t. В стандартном случае единичный интервал $I = [0, 1]$ выбирался для простоты, поскольку любые два отрезка на оси вещественных чисел гомеоморфны, и поэтому они топологически эквивалентны [231].

В случае супермногообразий [273–275], а особенно полусупермногообразий [19] ситуация существенно отличается. Мы имеем три топологически разделенных случая:

1. Параметр $t \in \Lambda_0$ четный и имеет числовую часть, т.е. $\epsilon(t) \neq 0$.
2. Параметр $t \in \Lambda_0$ четный и не имеет числовой части, т.е. $\epsilon(t) = 0$.
3. Параметр $\tau \in \Lambda_1$ нечетный (любой нечетный элемент не имеет числовой части).

Первая возможность может быть сведена стандартному случаю посредством соответствующего гомеоморфизма, и такой t может всегда рассматриваться в единичном интервале $I = [0, 1]$. Однако следующие две возможности топологически не связаны с первой и между собой.

Определение 1.47. *Четная полугомотопия между двумя отображениями полусуперпространств $f : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ и $g : \mathscr{X} \to \mathscr{Y}$ представляет собой необратимое (в общем случае) отображение $\mathscr{X} \to \mathscr{Y}$, зависящее от нильпотентного четного параметра $t \in \Lambda_0$ без числовой части и двух четных констант $a, b \in \Lambda_0$ без числовой части та-*

Примечание. Для различных несуперсимметричных обобщений гомотопии см. [270–272].

манента и полудетерминанта, которые дуальны стандартным матричным функциям в рамках введенной четно-нечетной симметрии дробно-линейных $N = 1$ суперконформных преобразований. Находятся необратимые супераналоги расстояния в $N = 1$ суперпространстве и формулируется необратимый аналог инвариантности — "полуинвариантность" введенного необратимого аналога метрики для сплетающих четность преобразований.

Нелинейные реализации редуцированных преобразований рассматриваются в рамках двух подходов — как движение нечетной кривой в суперпространстве и диаграммное описание необратимого аналога индуцированного представления. Находятся уравнения для двух типов голдстино и для связи между линейной и нелинейной реализациями.

Идея суперконформной симметрии [277–280] играет ключевую роль в построении суперструнных [281] моделей элементарных частиц [282–286], в рамках которых удается объединить *) непротиворечивым образом все фундаментальные взаимодействия [288–291]. В последнее время значение суперконформной симметрии было переосмыслено из-за ее исключительной роли в построении M-теории [292–300], описании D-бран [301–305] и черных дыр [306–308], а также в ее связи с предельными теоремами в пространствах анти-Де Ситтера [309–318].

С одной стороны, суперконформная симметрия исключительно важна в теории суперримановых поверхностей [111, 176, 227, 319–322] как локального подхода для вычисления древесных [323–325] и многопетлевых [326–332] фермионных амплитуд в формализме Полякова [333–336]. С другой стороны, двумерные суперконформные теории поля [337–340] описывают квантовую геометрию мировой поверхности струны [341–345] и позволяют свести вычисление струнных амплитуд в критиче-

---

Примечание. Впервые использование струн для построения фундаментальной теории, описывающей в низкоэнергетическом пределе все существующие взаимодействия, было предложено в [287].

ской размерности [346] к интегрированию по суперконформному пространству модулей [347–355]. Возникшие здесь трудности с нечетными модулями [356–358] (а фактически, с нильпотентными направлениями [359–361]), несмотря на то, что некоторые многопетлевые вклады и были заново получены в [362–364], позволяют предположить*) возможность необратимого обобщения суперконформной геометрии [9, 18].

2.1. Необратимость и $N = 1$ суперконформные преобразования

Основным ингредиентом суперконформной симметрии является специальный класс редуцированных отображений двумерного $(1|1)$-мерного комплексного суперпространства, суперконформные преобразования [111, 345, 355, 366]. В локальном подходе к построению суперримановых поверхностей, представленных как семейства открытых суперобластей, суперконформные преобразования используются как склеивающие функции перехода [324, 341, 343]. С другой стороны, они возникают в результате специальной редукции структурной супергруппы [367, 368]. Аналогичный подход применяется и для клейновых поверхностей [369] и суперповерхностей [370–373].

Здесь мы рассматриваем альтернативную редукцию касательного пространства, что приводит к новым преобразованиям (см. также [1,8]). Мы используем функциональный подход к суперпространству [91, 112, 117] (см. также **Приложения Б.2** и **Б.4**), который допускает существование нетривиальной топологии в четных и нечетных нильпотентных направлениях [175, 268] и может быть подходящим для физических при-

---

Примечание. В связи с этими трудностями было высказано такое предположение: “может случиться, что основные конструкции должны быть модифицированы...” [365].

ложений [374, 375].

Кроме того, необратимые преобразования (см. также, [263, 376]) могут служить аналогом функций перехода для полусупермногообразий, введенных в **Разделе 1**, что позволяет последовательным образом сформулировать необратимый аналог суперримановой поверхности [9]. Отметим, что исследование четных нильпотентных направлений в суперсимметричной механике [16, 377] и квантовой механике [378–380] играет важную роль в прояснении общих механизмов нарушения суперсимметрии; они также возникают в контракциях групп [381–383] и в конкретных полевых моделях [384–387].

2.1.1. Супераналитические преобразования. Локально суперпространство $\mathbb{C}^{1|1}$, имеющее размерность $(1|1)$, на координатном языке описывается парой $Z = (z, \theta)$, где z четная координата и θ нечетная.

В функциональном определении суперпространства существуют дýховые части в четной координате $z = z_{body} + z_{soul}$, $z_{body} = \epsilon(z)$, $z_{soul} \stackrel{def}{=} z - z_{body}$, где ϵ представляет собой числовое отображение [112], зануляющее все нильпотентные генераторы подстилающей супералгебры. Числовое отображение действует на координатах следующим образом $\epsilon(z) = z_{body}$, $\epsilon(\theta) = 0$ (см. также **Пункт Б.2**). Это позволяет нам рассматривать нетривиальную дýховую топологию в четных направлениях на равных началах с нечетными [175, 181, 268].

Используя условия голоморфности, общее супераналитическое преобразование $\mathcal{T}_{SA} : \mathbb{C}^{1|1} \to \mathbb{C}^{1|1}$ можно представить (см., например, [388]) в виде

$$\begin{cases} \tilde{z} &= \tilde{z}(z, \theta), \\ \tilde{\theta} &= \tilde{\theta}(z, \theta), \end{cases} \tag{2.1}$$

где нет зависимости от комплексно сопряженной координаты.

Учитывая нильпотентность нечетной координаты $\theta^2 = 0$, мы по-

Аналогичные вычисления могут быть проведены и для других элементов, это доказывает ассоциативность (2.7) и тот факт, что параметризация (2.6) задает действительно полугруппу. ■

Замечание **2.8.** Умножение (2.7) содержит два произведения: суперпозицию (2.8) и произведение в подстилающей алгебре Грассмана $(\cdot)$. Поэтому супераналитическая полугруппа не принадлежит ни к классу полугрупп непрерывных функций [262,390,391], ни к классу мультипликативных полугрупп [205, 392–394].

Наличие двух умножений, делителей нуля и нильпотентов делает анализ абстрактных свойств супераналитической полугруппы *) (и суперконформной полугруппы, рассматриваемой ниже) гораздо более сложным по сравнению с хорошо исследованными полугруппами функций [191, 208, 262, 399].

Предложение 2.9. *Двусторонняя единица в* $\mathbf{S}_{SA}$ *есть*

$$\mathbf{e} = \left\| \begin{array}{cc} z & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\|, \tag{2.10}$$

и двусторонний нуль представляет собой матрицу (2.6)*, имеющую нулевые элементы.*

Доказательство. Это можно легко проверить, используя (2.7). ■

Рассмотрим гомоморфизм φ супераналитической полугруппы $\mathbf{S}_{SA}$ в полугруппу $\boldsymbol{T}_{SA}$ супераналитических преобразований $\varphi : \mathbf{S}_{SA} \to \boldsymbol{T}_{SA}$.

Предложение 2.10. *Как это и должно быть* $\ker \varphi = \mathbf{e}$.

При изучении суперчисловых систем, содержащих делители нуля

Примечание. Полугруппы несуперсимметричных аналитических эндоморфизов рассматривались в [395–398].

и нильпотенты, обычно говорят магические слова “факторизация по нильпотентам” или “по модулю нильпотентов” и исключают дополнительные экзотические свойства [117, 174, 187], являющиеся результатом тщательного рассмотрения последних. В системах рассматриваемых функций ситуация более тонкая и требует дополнительных абстрактных исследований.

Например, в супераналитической полугруппе $\mathbf{S}_{SA}$ наряду со стандартными элементами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{z}$ мы можем вводить элементнозависимые “локальные” единицы и нули.

Определение 2.11. *Для заданного элемента* $\mathbf{s}$ *супераналитической полугруппы* $\mathbf{S}_{SA}$ *локальные левая, правая и двусторонняя единицы определяются равенствами*

$$\mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{left} * \mathbf{s} = \mathbf{s}, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{s} * \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{right} = \mathbf{s}, \tag{2.12}$$

$$\mathbf{e}_{\mathbf{s}} * \mathbf{s} * \mathbf{e}_{\mathbf{s}} = \mathbf{s}, \tag{2.13}$$

где $\mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{left}, \mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{right}, \mathbf{e}_{\mathbf{s}} \in \mathbf{S}_{SA}$.

Определение 2.12. *Для заданного элемента* $\mathbf{s}$ *супераналитической полугруппы* $\mathbf{S}_{SA}$ *локальные левый, правый и двусторонний нули определяются равенствами*

$$\mathbf{z}_{\mathbf{s}}^{left} * \mathbf{s} = \mathbf{z}_{\mathbf{s}}^{left}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{s} * \mathbf{z}_{\mathbf{s}}^{right} = \mathbf{z}_{\mathbf{s}}^{right}, \tag{2.15}$$

$$\mathbf{z}_{\mathbf{s}} * \mathbf{s} * \mathbf{z}_{\mathbf{s}} = \mathbf{z}_{\mathbf{s}}, \tag{2.16}$$

где $\mathbf{z}_{\mathbf{s}}^{left}, \mathbf{z}_{\mathbf{s}}^{right}, \mathbf{z}_{\mathbf{s}} \in \mathbf{S}_{SA}$.

Локальные единицы и нули являются множествами элементов из $\mathbf{S}_{SA}$ и могут найдены из соответствующих систем функционально-дифференциальных уравнений. Например, для $\mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{left}$ из (2.11) в компонент-

ном виде мы имеем систему

$$\begin{gathered} f_1 \circ f_2 + \psi_2 \cdot \chi_1 \circ f_2 = f_2, \\ \psi_1 \circ f_2 + \psi_2 \cdot g_1 \circ f_2 = \psi_2, \\ f_1' \circ f_2 \cdot \chi_2 + \chi_1' \circ f_2 \cdot \chi_2 \cdot \psi_2 + g_2 \cdot \chi_1 \circ f_2 = \chi_2, \\ \psi_1' \circ f_2 \cdot \chi_2 + g_1' \circ f_2 \cdot \chi_2 \cdot \psi_2 + g_2 \cdot g_1 \circ f_2 = g_2. \end{gathered} \tag{2.17}$$

Пример **2.13.** Пусть $\mathbf{s} = \left\| \begin{array}{cc} z^2 & \beta \\ \alpha & z^{-1} \end{array} \right\|$, тогда $\mathbf{e}_{\mathbf{s}}^{left} = \left\| \begin{array}{cc} z^2 & \beta \\ \alpha & z^{-1} \end{array} \right\|$.

Чтобы подчеркнуть отличие от полугрупп функций [208,390,399], рассмотрим левые нули. Из закона умножения (2.8) следует

Утверждение 2.14. *Для полугрупп функций роль левых нулей играют константные отображения*

$$f_0(z) : z \to c_f = const, \tag{2.18}$$

поскольку $\forall g(z),\ f_0 \circ g = f_0(g(z)) = c_f = f_0$.

Возьмем элемент $\mathbf{s}_0$ супераналитической полугруппы $\mathbf{S}_{SA}$, который имеет вид, аналогичный (2.18), т.е.

$$\mathbf{s}_0 = \left\| \begin{array}{cc} f_0 & \chi_0 \\ \psi_0 & g_0 \end{array} \right\|. \tag{2.19}$$

Тогда из (2.7) имеем

$$\mathbf{s}_0 * \mathbf{s} = \left\| \begin{array}{cc} f_0 & \chi_0 \\ \psi_0 & g_0 \end{array} \right\| * \left\| \begin{array}{cc} f & \chi \\ \psi & g \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{cc} c_f + c_\chi \cdot g & c_\chi \cdot g \\ c_\psi + c_g \cdot \psi & c_g \cdot g \end{array} \right\|, \tag{2.20}$$

и, таким образом, $\mathbf{s}_0 * \mathbf{s} \neq const$ в противоположость полугруппам

функций [192, 262].

Замечание **2.15.**

P_{SA} определяет структуру супермногообразия, для которого эти преобразования играют роль функций перехода [367]. Поэтому различные редукции матрицы P_{SA} приводят к различным дополнительным структурам. Но только один из них обычно рассматривается [367, 368] поскольку лишь он может быть обратимым.

Учитывая необратимость, мы проанализируем *все* редукции [7] посредством зануления *каждого* элемента из P_{SA} поочередно, что дает в общем четыре возможности:

$$1)\ D\tilde{\theta} = 0, \tag{2.27}$$

$$2)\ \partial\tilde{\theta} = 0, \tag{2.28}$$

$$3)\ \Delta\left(z,\theta\right) \equiv D\tilde{z} - D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} = 0, \tag{2.29}$$

$$4)\ Q\left(z,\theta\right) \equiv \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} = 0, \tag{2.30}$$

которые упорядочены соответственно возрастанию их нетривиальности. Первые два случая (2.27) и (2.28) являются наиболее простыми, но они также имеют некоторые интересные особенности и будут рассмотрены отдельно.

2.1.3. Редуцированные $N=1$ преобразования . Здесь мы рассмотрим две остальные возможные редукции (2.29) и (2.30). В **Подразделе 4.1** показано, что существуют *две* нетривиальные редукции любой суперматрицы (а не одна, треугольная, как в обратимом случае). Мы применяем этот результат к P_{SA} (2.24).

Утверждение 2.20. *Условие* $\epsilon\left[D\tilde{\theta}\right] \neq 0$ *совпадает с полунеобратимостью супераналитического преобразования* (2.4)*, а не с его полной обратимостью.*

Доказательство. В самом деле, мы замечаем из (2.26), что березиниан

может быть представлен в виде двух слагаемых

$$\operatorname{Ber} P_A = \frac{\partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta}}{D\tilde{\theta}} + \frac{\left(D\tilde{z} - D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta}\right)\partial\tilde{\theta}}{\left(D\tilde{\theta}\right)^2} = \tag{2.31}$$

$$\frac{Q(z,\theta)}{D\tilde{\theta}} + \frac{\Delta(z,\theta)\cdot\partial\tilde{\theta}}{\left(D\tilde{\theta}\right)^2}. \tag{2.32}$$

только, если $\epsilon\left[D\tilde{\theta}\right] \neq 0$. Тогда из компонентного вида (2.2) мы выводим $D\tilde{\theta} = g(z) + \theta\cdot\psi(z)$ и так $\epsilon\left[D\tilde{\theta}\right] = \epsilon[g(z)]$, поэтому $\epsilon\left[D\tilde{\theta}\right] \neq 0 \Rightarrow \epsilon[g(z)] \neq 0$, что действительно является условием полунеобратимости преобразования (2.4). ■

Предложение 2.21. *В случае $D\tilde{\theta} \neq 0$ березиниан супераналитических преобразований описывается выражением*

$$\operatorname{Ber} \mathrm{P}_{SA} = D\left(\frac{D\tilde{z}}{D\tilde{\theta}}\right). \tag{2.33}$$

Доказательство. После дифференцирования правой части, используя $D^2 = \partial$, мы получаем

$$D\left(\frac{D\tilde{z}}{D\tilde{\theta}}\right) = \frac{\partial\tilde{z}\cdot D\tilde{\theta} + D\tilde{z}\cdot\partial\tilde{\theta}}{\left(D\tilde{\theta}\right)^2} =$$
$$\frac{\left(\partial\tilde{z} + \tilde{\theta}\cdot\partial\tilde{\theta}\right)\cdot D\tilde{\theta} - \left(D\tilde{z} - \tilde{\theta}\cdot D\tilde{\theta}\right)\cdot\partial\tilde{\theta}}{\left(D\tilde{\theta}\right)^2} =$$
$$\frac{Q(z,\theta)\cdot D\tilde{\theta} - \Delta(z,\theta)\cdot\partial\tilde{\theta}}{\left(D\tilde{\theta}\right)^2},$$

что совпадает с (2.32). ■

По теореме сложения березинианов (4.7) имеем

$$\operatorname{Ber} \mathrm{P}_A = \operatorname{Ber} \mathrm{P}_S + \operatorname{Ber} \mathrm{P}_T, \tag{2.34}$$

где

$$\mathrm{P}_S \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} & \partial\tilde{\theta} \\ 0 & D\tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q\left(z,\theta\right) & \partial\tilde{\theta} \\ 0 & D\tilde{\theta} \end{pmatrix}, \tag{2.35}$$

$$\mathrm{P}_T \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \partial\tilde{\theta} \\ D\tilde{z} - D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} & D\tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \partial\tilde{\theta} \\ \Delta\left(z,\theta\right) & D\tilde{\theta} \end{pmatrix}. \tag{2.36}$$

Обозначим множества матриц (2.35) и (2.36) за $\boldsymbol{\mathcal{P}}_S$ и $\boldsymbol{\mathcal{P}}_T$ соответственно. Подчеркиваем, что до сих пор на вид преобразований мы не налагали никаких ограничений, и они общие супераналитические (2.1).

Определение 2.22. *Редуцированные преобразования определяются проектированием березиниана на одно из слагаемых в* (2.32).

Другими словами, мы проектируем множество супераналитических матриц $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{SA}$ на $\boldsymbol{\mathcal{P}}_S$ или $\boldsymbol{\mathcal{P}}_T$.

Следовательно, имеется *два* (!) вида редуцированных (суперконформно-подобных) преобразований [1, 7, 21].

Определение 2.23. *Обратимые, полунеобратимые и необратимые суперконформные преобразования определяются условием*

$$\Delta\left(z,\theta\right) = D\tilde{z} - D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} = 0. \tag{2.37}$$

Определение 2.24. *Полунеобратимые и необратимые преобразования, сплетающие четность, определяются условием*

$$Q\left(z,\theta\right) = \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} = 0. \tag{2.38}$$

Такое определение понятно из следующих рассуждений. Если мы

Используя (2.49), можно получить [367]

$$\mathrm{P}_{SCf} = \begin{pmatrix} \left(D\tilde{\theta}_{SCf}\right)^2 & \partial\tilde{\theta}_{SCf} \\ 0 & D\tilde{\theta}_{SCf} \end{pmatrix}. \tag{2.51}$$

Если $\epsilon\left[D\tilde{\theta}_{SCf}\right] \neq 0$, тогда $\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SCf}$ может быть просто вычислен из (2.51) (см. [111, 341])

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SCf} = D\tilde{\theta}_{SCf}. \tag{2.52}$$

В необратимом случае $\epsilon\left[D\tilde{\theta}_{SCf}\right] = 0$ березиниан не может быть определен, но мы принимаем формулу (2.52) в качестве определения якобиана необратимых суперконформных преобразований (см. [1, 13]).

Определение 2.31. *Березиниан полунеобратимых суперконформных преобразований есть*

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}^{noninv}_{SCf} = D\tilde{\theta}_{SCf}. \tag{2.53}$$

Рассмотрим березиниан для сплетающих четность преобразований. Из (2.50) мы получаем антитреугольную матрицу

$$\mathrm{P}_{TPt} = \begin{pmatrix} 0 & \partial\tilde{\theta}_{TPt} \\ \Delta_{TPt}\left(z,\theta\right) & D\tilde{\theta}_{TPt} \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Если $\epsilon\left[D\tilde{\theta}_{TPt}\right] \neq 0$, то березиниан суперматрицы P_{TPt} (2.54) есть

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{TPt} = \frac{\Delta_{TPt}\left(z,\theta\right)\cdot\partial\tilde{\theta}_{TPt}}{\left(D\tilde{\theta}_{TPt}\right)^2}. \tag{2.55}$$

Из (2.50) следует, что $D\Delta_{TPt}(z,\theta) = -\left(D\tilde{\theta}_{TPt}\right)^2$, и поэтому

$$\partial\Delta_{TPt}(z,\theta) = -2\cdot D\tilde{\theta}_{TPt}\cdot\partial\tilde{\theta}_{TPt}, \tag{2.56}$$

что дает для березиниана

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{TPt} = \frac{\partial\Delta_{TPt}(z,\theta)\cdot\Delta_{TPt}(z,\theta)}{2\left(D\tilde{\theta}_{TPt}\right)^3}. \tag{2.57}$$

Замечание **2.32.** Поскольку Δ_{TPt} является нечетным и нильпотентным, березиниан $\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{TPt}$ также нильпотентен и чисто дýховый.

Четные и нечетные суперфункции $Q(z,\theta)$ и $\Delta(z,\theta)$ играют важную роль в возможных редукциях супераналитического структуры, и поэтому стоит исследовать их подробнее. Общее соотношение между $Q(z,\theta)$ и $\Delta(z,\theta)$ есть

$$Q(z,\theta) - D\Delta(z,\theta) = \left(D\tilde{\theta}\right)^2. \tag{2.58}$$

Из этой связи и (2.32) мы получаем другое полезное выражение для березиниана общего супераналитического преобразования (если $\epsilon\left[D\tilde{\theta}\right] \neq 0$)

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA} = D\tilde{\theta} + D\left(\frac{\Delta(z,\theta)}{D\tilde{\theta}}\right) = D\left(\tilde{\theta} + \frac{\Delta(z,\theta)}{D\tilde{\theta}}\right), \tag{2.59}$$

в котором суперконформное условие $\Delta(z,\theta) = 0$ явно прослеживается явным образом.

В дальнейшем будет полезно иметь компонентные выражения

$$\begin{aligned}
\Delta(z,\theta) &= \chi(z) - \psi(z)\cdot g(z) + \theta\cdot\left(f'(z) - \psi'(z)\cdot\psi(z) - g^2(z)\right),\\
Q(z,\theta) &= f'(z) - \psi'(z)\cdot\psi(z) + \theta\cdot\left(\chi(z) - \psi(z)\cdot g'(z) + \psi'(z)\cdot g(z)\right).
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Из этих величин можно построить нечетную суперфункцию

$$\mathbf{\Sigma}\left(z,\theta\right)=\Delta\left(z,\theta\right)-\theta\cdot Q\left(z,\theta\right)=\chi\left(z\right)-\psi\left(z\right)\cdot g\left(z\right)-\theta\cdot g^{2}\left(z\right),\quad(2.61)$$

которая представляет собой важную характеристику преобразования. В частности, $\mathbf{\Sigma}\left(z,\theta\right)=0$ для суперконформных преобразований с нильпотентной функцией $g\left(z\right)$, которые будут рассматриваться ниже.

Известно, что различные редукции матрицы касательного расслоения приводят к различным связям на кручение и различным G-структурам [408–412] в гравитации и супергравитации [413, 414]. Так, суперматрицы P_{SA} соответствуют различным вариантам наложения связей на кручение в двумерной супергравитации [415–418].

Предположение 2.33. *Аналогично тому, как треугольная редукция суперматрицы* $\mathrm{P}_{SA}\rightarrow\mathrm{P}_{SCf}$ (2.51) *отвечает суперконформной двумерной супергравитации* [368, 415] *и суперримановым поверхностям* [367]*, склеенным с помощью суперконформных преобразований* [111]*, можно предположить, что альтернативная редукция* $\mathrm{P}_{SA}\rightarrow\mathrm{P}_{TPt}$ (2.54) *отвечает нечетному необратимому аналогу двумерной супергравитации и, соответственно, нечетному аналогу суперримановых поверхностей* [9]*, склеенных с помощью сплетающих четность преобразований* (*см.* **Определение 2.24**).

Рассмотрим более подробнее преобразование производных (2.24) при общем супераналитическом отображении

$$\begin{aligned}\partial&=\partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}+Q\left(z,\theta\right)\cdot\tilde{\partial},\\ D&=D\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}+\Delta\left(z,\theta\right)\cdot\tilde{\partial}.\end{aligned}\qquad(2.62)$$

Исключая первые слагаемые в правой части (2.62), определим чет-

преобразований имеют вид

$$g(z)\,\text{¢}f^{\,0}(z) = \tilde{A}^{0}(z)\,\text{¢}\hat{A}(z)\,;$$
$$g(z)\,\text{¢}\hat{A}^{0}(z) = g^{0}(z)\,\text{¢}\hat{A}(z)$$

нием и поэтому представляет собой вложение *).

Рассмотрим по аналогии *правые* вырожденные преобразования.

Утверждение 2.37. *Правые вырожденные преобразования описываются уравнением*

$$D\tilde{\theta} = 0. \tag{2.74}$$

Доказательство. Если $D\tilde{\theta} = 0$, тогда $\tilde{\theta} = \alpha = const$, а также $\partial\tilde{\theta} = D\left(D\tilde{\theta}\right) = 0$, что соответствует суперматрице P_{SA} с правым нулевым столбцом. ■

Таким образом, учитывая условие (2.74) и выражения для $Q(z,\theta)$ (2.37) и $\Delta(z,\theta)$ (2.38), получаем

$$\mathrm{P}_{D_R} = \begin{pmatrix} Q(z,\theta)\,|_{\partial\tilde{\theta}=0} & 0 \\ \Delta(z,\theta)\,|_{D\tilde{\theta}=0} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} & 0 \\ D\tilde{z} & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.75}$$

В этом случае нечетный сектор становится вырожденным, представляя собой левые нули и константные отображения аналогично (2.18). Такие отображения формируют ограничительные полугруппы (см., например, ([191, 399, 421])).

В несуперсимметричном случае различные отображения $2 \to 1$ изучались в [422], а голоморфные отображения между пространствами различных размерностей рассматривались в [423, 424].

Тем не менее, полное супераналитическое преобразование (2.2) не является левым нулем из-за (2.20) и имеет следующий вид

$$\begin{cases} \tilde{z} &= f(z) + \theta \cdot \chi(z), \\ \tilde{\theta} &= \alpha. \end{cases} \tag{2.76}$$

Примечание. Общие вопросы вложения суперпространств и суперммногообразий изложены в [419, 420].

Эти преобразования необратимы (из-за вырожденного нечетного сектора) и формируют полугруппу правых вырожденных преобразований $\boldsymbol{T}_{Deg_R}$, которая является подполугруппой в $\boldsymbol{T}_{SA}$, вследствие $\boldsymbol{\mathcal{P}}_{D_R} \cdot \boldsymbol{\mathcal{P}}_{D_R} \subseteq \boldsymbol{\mathcal{P}}_{D_R}$.

Элемент соответствующей полугруппы функций $\mathbf{S}_{Deg_R}$ запишем в виде

$$\mathbf{S}_{Deg_R} \ni \mathbf{d}_R = \left\{ \begin{array}{c} f \\ \chi \\ \alpha \end{array} \right\}, \tag{2.77}$$

а умножение в $\mathbf{S}_{Deg_R}$ имеет

$$\left\{ \begin{array}{c} f_1 \\ \chi_1 \\ \alpha_1 \end{array} \right\} *_R \left\{ \begin{array}{c} f_2 \\ \chi_2 \\ \alpha_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} f_1 \circ f_2 + \alpha_1 \cdot \chi_1 \circ f_2 \\ \chi_2 \cdot f_1' \circ f_2 + \chi_1' \circ f_2 \cdot \alpha_2 \\ \alpha_1 \end{array} \right\}. \tag{2.78}$$

Утверждение 2.38. *Правое умножение* (2.78) *замкнуто и ассоциативно.*

Схематически умножение вырожденных и рассмотренных ранее преобразований можно представить в виде *Таблицы* 2.1. Отсюда следует

Таблица 2.1

Умножение обратимых и необратимых редуцированных $N = 1$ преобразований, включая вырожденные

	SCf	TPt	Deg_L	Deg_R
SCf	SCf	SA	Deg_L	Deg_R
TPt	TPt	SA	Deg_L	Deg_R
Deg_L	Deg_L	Deg_L	Deg_L	Deg_R
Deg_R	Deg_R	Deg_R	Deg_L	Deg_R

задачу. Интерес к изучению суперконформных полугрупп обусловлен

вания, соответствующие элементам $\mathbf{G}_{SCf}$, рассматривались в [111, 227, 429]. Поэтому подробнее остановимся на необратимых преобразованиях и структуре идеала $\mathbf{I}_{SCf}$.

Выделим в идеале $\mathbf{I}_{SCf}$ следующие подмножества элементов:

$$\mathbf{I}_n \stackrel{def}{=} \{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_{SCf} \mid g^n(z) = 0\}, \tag{2.88}$$

$$\mathbf{J}_n \stackrel{def}{=} \{\mathbf{i} \in \mathbf{I}_n \mid \operatorname{ind} g(z) = n\}, \tag{2.89}$$

$$\mathbf{J}_n^A \stackrel{def}{=} \left\{\mathbf{i} \in \mathbf{J}_n \mid g^{n-1}(z) \in \operatorname{Ann} \psi'(z)\right\}, \tag{2.90}$$

которые связаны очевидными соотношениями $\mathbf{J}_n = \mathbf{I}_n \setminus \mathbf{I}_{n-1}$, причем $\mathbf{I}_0 = \mathbf{J}_0 = \mathbf{z}$.

Пусть $\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2$, тогда из (2.82) при $\mathrm{m}_1 = \mathrm{m}_2 = \mathrm{m}_3 = +1$ имеем

$$g_3(z) = g_1\left(f_2(z)\right) \cdot g_2(z) + \psi_2(z) \cdot \psi_1'\left(f_2(z)\right) \cdot g_2(z), \tag{2.91}$$

где $f_2'(z) = g_2^2(z) + \psi_2'(z) \cdot \psi_2(z)$. Возводя (2.91) в степень n в грассмановой алгебре, получаем

$$\begin{aligned} g_3^n(z) \;\; = \;\; & g_1^n\left(f_2(z)\right) \cdot g_2^n(z) + \\ & + n \cdot g_1^{n-1}\left(f_2(z)\right) \cdot \psi_2(z) \cdot \psi_1'\left(f_2(z)\right) \cdot g_2^n(z). \end{aligned} \tag{2.92}$$

Отсюда следует, что здесь условием обращения в нуль второго слагаемого по-прежнему является (2.86), и это снова выделяет необратимые Ann-преобразования.

Теорема 2.43. *Множество элементов $\mathbf{J}_n^A \subseteq \mathbf{I}_n$ является правым идеалом для $\mathbf{I}_n$ относительно* (2.86).

Доказательство. Пусть $\mathbf{s}_3 = \mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_i \in \mathbf{I}_n$, и для $\mathbf{s}_1$ выполняется (2.86), т. е. $g_1^{n-1}(z) \cdot \psi_1'(z) = 0$. Покажем, что $g_3^{n-1}(z) \cdot \psi_3(z) = 0$.

Из (2.91) имеем

$$\begin{aligned}&\omega_3(z)=\omega_1(z)\cdot g_2^{n+1}(z)\\&+\omega_2(z)\cdot g_1^n\left(h_2(z)\right)+n\cdot\psi_2(z)\cdot\omega_1(z)\cdot\omega_2(z)+\\&+g_1^{n-1}\left(h_2(z)\right)\cdot g_1'\left(h_2(z)\right)\cdot g_2^{n-1}(z)\cdot\psi_2(z)=0,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}\omega_1(z)&=g_1^{n-1}\left(h_2(z)\right)\cdot\psi_1'\left(h_2(z)\right),\\\omega_2(z)&=g_2^{n-1}(z)\cdot\psi_2'(z),\omega_3(z)=g_3^{n-1}(z)\cdot\psi_3'(z),\end{aligned}$$

и в последнем равенстве использована очевидная импликация $g^n(z)=0\Rightarrow g^{n-1}(z)\cdot g'(z)=0$. Поэтому $\mathbf{J}_n^A*\mathbf{I}_n\subseteq\mathbf{J}_n^A$. ■

Отсюда следует, что $\mathbf{J}_n^A*\mathbf{J}_n^A\subseteq\mathbf{J}_n^A$, т.е. множество $\mathbf{J}_n^A$ замкнуто относительно свойства (2.86), поэтому объединение $\bigcup\limits_n\mathbf{J}_n^A=\mathbf{A}_{SCf}$ есть подполугруппа в $\mathbf{S}_{SCf}$, которую будем называть Ann-*полугруппой*.

2.2.2. Ann - п о л у г р у п п а . Свойства идеалов в Ann-полугруппе существенно отличаются от таковых в оставшейся части суперконформной полугруппы, поэтому рассмотрим их отдельно.

Предложение 2.44. *Все элементы из* Ann-*полугруппы необратимы, следовательно, групповая часть в* $\mathbf{A}_{SCf}$ *отсутствует.*

Доказательство. Из (2.86) следует, что

$$g^{n-1}(z)\cdot\psi'(z)=0, \tag{2.93}$$

поэтому $\operatorname{ind}g(z)<\infty$ (считаем, что $\psi'(z)\neq0$). ■

Чтобы изучить свойства нильпотентности Ann-преобразований, возведем (2.91) в степень n при учете (2.93), тогда получим Ann-аналог

соотношения (2.92)

$$g_3^{\mathsf{n}}(z) = g_1^{\mathsf{n}}\left(h_2(z)\right) \mathbin{\mathbb{C}} g_2(z). \tag{2.94}$$

Отсюда видно, что множества элементов

$$\mathbf{A}_{\mathsf{n}} \stackrel{\mathsf{def}}{=} \mathsf{f}\, s \in 2^{\mathbf{A}_{\mathsf{SCf}}} \mid g^{\mathsf{n}}(z) = 0 \mathsf{g} \tag{2.95}$$

Но полугруппа $\mathbf{A}_{SCf}$ содержит по определению только нильэлементы, поэтому $\exists n$, $\mathbf{t}^{*\mathbf{n}} = \mathbf{z}$. Выберем $k = n$ и получим

$$\mathbf{s} = \mathbf{s} * \mathbf{t}^{*\mathbf{n}} = \mathbf{s} * \mathbf{z} = \mathbf{z},$$

что противоречит условию $\mathbf{s} \neq \mathbf{z}$. Наоборот, пусть $\mathbf{R}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}(\mathbf{t})$, $\mathbf{s} \neq \mathbf{z}$, тогда из определения главных идеалов [104] получаем

$$\mathbf{s} = \mathbf{t} * \mathbf{x} = \mathbf{s} * (\mathbf{y} * \mathbf{x}) = \mathbf{s} * (\mathbf{y} * \mathbf{x})^{*\mathbf{k}},\ \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{A}_{SCf}.$$

Снова в силу, того что $\mathbf{A}_{SCf}$ – нильполугруппа, найдется такая степень n, что $(\mathbf{y} * \mathbf{x})^{*\mathbf{n}} = \mathbf{z}$, поэтому $\mathbf{s} = \mathbf{s} * \mathbf{z} = \mathbf{z}$ — противоречие. Отсюда следует требуемая импликация $\mathbf{R}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}(\mathbf{t}) \Rightarrow \mathbf{s} = \mathbf{t}$. Аналогично и для других отношений Грина. ■

Следствие 2.46. *$\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{G}$-классы Ann-полугруппы содержат ровно по одному элементу.*

2.2.3. К в а з и и д е а л ь н ы й р я д . Переходим теперь к анализу идеального строения суперконформной полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$ в общем случае. В отличие от (2.86), полагаем, что $g^{n-1}(z) \notin \operatorname{Ann} \psi'(z)$. Такая полугруппа может содержать, кроме необратимых, также и обратимые элементы, а следовательно, подгруппу $\mathbf{G}_{SCf} \subset \mathbf{S}_{SCf}$, которая определяется преобразованиями с ненильпотентными и обратимыми $g(z)$. Если положить для обратимых элементов индекс нильпотентности равным бесконечности, то в терминах величин, введенных в (2.88–(2.90), имеем $\mathbf{G}_{SCf} = \mathbf{J}_\infty$, $\mathbf{S}_{SCf} = \mathbf{I}_\infty$, что позволяет в некоторых случаях формально включить $\mathbf{G}_{SCf}$ в закон умножения, аналогичный (2.98). Очевидно, что множество $\mathbf{G}_{SCf} \cup \{\mathbf{z}\}$ является фактор-полугруппой Риса $\mathbf{S}_{SCf}/\mathbf{I}_{SCf}$ [104]. Тогда суперконформную полугруппу $\mathbf{S}_{SCf}$ можно трак-

товать как идеальное расширение [443–445] суперконформной группы $\mathbf{G}_{SCf}$ при помощи идеала $\mathbf{I}_{SCf}$.

Рассмотрим множества (2.88–(2.90) в случае полной суперконформной полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$. Очевидно, что строгие включения $\mathbf{I}_{n-1} \subset \mathbf{I}_n$ сохраняются. Поэтому идеалу суперконформной полугруппы $\mathbf{I}_{SCf}$ можно поставить в соответствие цепь множеств $\mathbf{I}_n$, аналогичную (2.96), следующим образом:

$$\mathbf{z} \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{I}_n \subset \ldots \subset \mathbf{I}_{SCf}. \tag{2.104}$$

Однако в данном случае вместо (2.98) имеет место

Предложение 2.47. *Множества* $\mathbf{I}_n$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n, \tag{2.105}$$

$$\mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \tag{2.106}$$

$$\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}. \tag{2.107}$$

Доказательство. Действительно, если в (2.92) $g_1^n(z) = 0$ и $g_2^n(z) \neq 0$, то найдется такое $n = \operatorname{ind} g_1(z)$, что $g_1^{n-1}(z)$ может быть отлично от нуля, в то время как $g_3^{n+1}(z) = 0$ за счет обращения в нуль уже второго слагаемого в (2.91). ■

Следствие 2.48. *Множество* $\mathbf{I}_n$ *является только левым идеалом суперконформной полугруппы, но не правым и двухсторонним.*

Предложение 2.49. $\mathbf{I}_n$ *– квазиидеал* [446–448] *и одновременно бииидеал* [449–452].

Доказательство. Из формул (2.94) и (2.105)–(2.107) непосредственно получаем свойства $\mathbf{I}_n$ как квазиидеала $\mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{I}_n \cap \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{SCf} \subseteq \mathbf{I}_n$ и как

Определение 2.51. *Обобщенные отношения Грина определяются формулами*

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}\mathscr{L}^{(nm)}_{\mu\nu}\mathbf{t} &\Leftrightarrow \mathbf{L}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{t}),\\
\mathbf{s}\mathscr{R}^{(nm)}_{\mu\nu}\mathbf{t} &\Leftrightarrow \mathbf{R}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{t}),\\
\mathbf{s}\mathscr{G}^{(nm)}_{\mu\nu\rho\sigma}\mathbf{t} &\Leftrightarrow \mathbf{J}^{(n)}_{\mu\nu}(\mathbf{s}) = \mathbf{J}^{(m)}_{\rho\sigma}(\mathbf{t}),
\end{aligned} \tag{2.117}$$

где $\mathbf{s} \in \mathbf{J}_n,\ \ \mathbf{t} \in \mathbf{J}_m$.

Классы эквивалентности по векторным и тензорным отношениям Грина имеют вид

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}^{(nm)}_{\mathbf{s},\mu\nu} &\stackrel{def}{=} \left\{\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{L}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{t})\right\},\\
\mathsf{R}^{(nm)}_{\mathbf{s},\mu\nu} &\stackrel{def}{=} \left\{\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{R}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{t})\right\},\\
\mathsf{J}^{(nm)}_{\mathbf{s},\mu\nu\rho\sigma} &\stackrel{def}{=} \left\{\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{J}^{(n)}_{\mu\nu}(\mathbf{s}) = \mathbf{J}^{(m)}_{\rho\sigma}(\mathbf{t})\right\}.
\end{aligned} \tag{2.118}$$

Задание частичного порядка на множествах классов (2.118) превращает фактор-множества $\mathbf{S}_{SCf}/\mathscr{L},\ \ \mathbf{S}_{SCf}/\mathscr{R},\ \ \mathbf{S}_{SCf}/\mathscr{G}$ в частично упорядоченные множества: *правый, левый* и (просто) *остов* [470–472] суперконформной полугруппы, причем мощность каждого остова равна бесконечности [13].

Предложение 2.52. *Суперконформная полугруппа* $\mathbf{S}_{SCf}$ *не является устойчивой* [473] *ни справа, ни слева.*

Доказательство. Из (2.84) и определений (2.86)–(2.90) следует

$$\begin{aligned}
\forall \mathbf{s},\mathbf{t} \ &\in\ \mathbf{S}_{SCf}, \mathbf{s} \in \mathbf{S}_{SCf} * \mathbf{s} * \mathbf{t} \not\Rightarrow \mathbf{L}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{s} * \mathbf{t}),\\
\mathbf{s} \ &\in\ \mathbf{t} * \mathbf{s} * \mathbf{S}_{SCf} \not\Rightarrow \mathbf{R}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{t} * \mathbf{s}).
\end{aligned}$$

■

2.2.5. К в а з и х а р а к т е р ы . Рассмотрим подробнее свойства нильпотентности элементов полугруппы $\mathbf{S}_{SCf}$.

Определение 2.53. *Идеальный индекс элемента* $\mathbf{s}$ *суперконформной полугруппы определяется формулой*

$$\operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{s} \stackrel{def}{=} \operatorname{ind} g(z), \tag{2.119}$$

причем $\operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{g} = \infty$.

Отметим, что все элементы, обладающие конечным идеальным индексом (2.119), нильпотентны в смысле полугруппового умножения, т. е. $\forall \mathbf{s} \in \mathbf{S}_{SCf}\ \exists n \in \mathbb{N}$ такое, что $\mathbf{s}^{*\mathbf{n}} = \mathbf{z}$.

Для произведения элементов суперконформной полугруппы из формул (2.119) имеем

$$\max \operatorname{ind}_{ideal} (\mathbf{s} * \mathbf{t}) = \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{t},\ \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{s} \geq \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{t}, \tag{2.120}$$

$$\operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{s} + 1,\ \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{s} < \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{t}. \tag{2.121}$$

В частности,

$$\operatorname{ind}_{ideal} (\mathbf{g} * \mathbf{s}) \leq \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{s}, \tag{2.122}$$

$$\operatorname{ind}_{ideal} (\mathbf{s} * \mathbf{g}) \leq \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{s} + 1. \tag{2.123}$$

Аналогично определяются индексы соответствующих множеств элементов (2.110). Для них получаем

$$\max \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{V}_1^{(n)} = n - 1,\ \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{V}_2^{(n)} = n,\ \min \operatorname{ind}_{ideal} \mathbf{V}_3^{(n)} = n + 1. \tag{2.124}$$

посредственно из (2.24) имеем

$$D = D\tilde{\theta} \cdot \tilde{D} + \Delta\,(z, \theta$$

тентности $\Delta_{TPt}(z, \theta)$ и $\partial\tilde{\theta}$.

2.3.2. О б о б щ е н н о е р е д у ц и р о в а н н о е р а с с л о е н и е с к р у ч е н и е м ч е т н о с т и . Для построения TPt аналога линейного расслоения на суперримановой поверхности [183, 365, 405, 489] необходимо построить инвариантный объект, но не с помощью суперконформного дифференциала $d\tau_{SCf}$, а с помощью его аналога для TPt преобразований.

В отличие от случая суперконформных преобразований (см. **Подраздел 2.1**) объект $d\tau_{SCf} = dZD + d\theta$ (введенный в [489] в качестве SCf супердифференциала) при сплетающих четность преобразованиях (с условием $\epsilon\left(D\tilde{\theta}\right) \neq 0$) не преобразуется ковариантно. Действительно,

$$d\tilde{\tau}_{SCf} = d\tilde{Z}\tilde{D} + d\tilde{\theta} = dZ \cdot \partial\tilde{\theta} + d\theta \cdot \left(D\tilde{\theta} + \Delta_{TPt}\left(z,\theta\right) \cdot \tilde{D}\right).$$

Пользуясь (2.136) и (2.56), преобразуем это выражение в

$$d\tilde{\tau}_{SCf} = -\frac{1}{2D\tilde{\theta}}\left[dZ\,\Delta'_{TPt}\left(z,\theta\right) + 2d\theta D\Delta_{TPt}\left(z,\theta\right)\right], \tag{2.139}$$

что невозможно выразить через $d\tau_{SCf}$. Поэтому необходимо ввести TPt аналог суперконформного дифференциала.

Определение 2.57. *Дифферециалом с кручением четности назовем такой объект $d\tau_{TPt}$, который преобразуется при сплетающих четность преобразованиях по закону*

$$d\tilde{\tau}^{even}_{TPt} = d\tau^{odd}_{TPt} \cdot \partial\tilde{\theta}. \tag{2.140}$$

Замечание **2.58.** Четности $d\tilde{\tau}^{even}_{TPt}$ и $d\tau^{odd}_{TPt}$ противоположны*).

Примечание. Здесь можно проследить некоторую аналогию с кручением квантовых дифференциалов [490].

Тогда можно построить TPt аналог линейного расслоения, если ввести TPt аналог δ_{TPt} суперконформного дифференциала по формулам

$$\delta_{TPt} = d\tau_{TPt}^{odd}\partial, \tag{2.141}$$

$$\tilde{\delta}_{TPt} = d\tilde{\tau}_{TPt}^{even}\tilde{D}. \tag{2.142}$$

Замечание **2.59.** Четность TPt дифференциала δ_{TPt} фиксирована, он — нечетный при любых сплетающих четность преобразованиях.

Предложение 2.60. *Дифференциал δ_{TPt} инвариантен относительно сплетающих четность преобразований.*

Доказательство. Пользуясь формулами (2.130) и (2.140), получаем

$$\delta_{TPt} = d\tau_{TPt}^{odd}\partial = d\tau_{TPt}^{odd}\partial\tilde{\theta}\tilde{D} = d\tilde{\tau}_{TPt}^{even}\tilde{D} = \tilde{\delta}_{TPt}.$$

■

Таким образом, величины $\partial\tilde{\theta}$ и $d\tau_{TPt}$ играют такую же фундаментальную роль для сплетающих четность преобразований [9, 13], как и $D\tilde{\theta}$ и $d\tau_{SCf}$ — для суперконформных преобразований [341, 491, 492].

Замечание **2.61.** Рассматриваемое здесь сплетение четности (2.130) и (2.132) существенно отличается от другого подобного объекта, существующего в литературе — Q-многообразия [493–497], где изменение четности касательного пространства делается искуственно из начальных определений.

Замечание **2.62.** Следует также отличать “сплетение четности” от скрученных кокасательных расслоений и дифференциальных операторов на многообразиях, рассмотренных в [498, 499], скрученных представлений [500–502], скрученных кокасательных расслоений в механических системах с точной пуассоновской симметрией [503, 504], а также от

скрученных комплексов де Рама [505–509].

С помощью TPt супердифференциалов $d\tau_{TPt}$ можно определить TPt аналоги с кручением четности для линейных [183, 405] и векторных [510] расслоений , линейных интегралов [489] и соответствующих спектральных последовательностей [269, 332, 511].

2.3.3. К о м п о н е н т н ы й а н а л и з . Условие сплетающих четность преобразований $Q(z,\theta)=0$ имеет в компонентах следующий вид

$$\begin{cases} f'(z)=\psi'(z)\cdot\psi(z), \\ \chi'(z)=g'(z)\cdot\psi(z)-g(z)\cdot\psi'(z), \end{cases} \tag{2.143}$$

который получается из (2.81) проекцией спина редукции $\mathrm{m}=-1$.

Решение первого уравнения в (2.143) можно представить в виде бесконечного ряда (2.72). Из второго уравнения можно получить

$$\chi'(z)=-g^2$$

В случае, если f^{-1} существует, мы можем записать искомые преобразования в явном виде [7, 20]

$$\tilde{\lambda} = \psi \circ f^{-1} + \lambda \circ f^{-1} \cdot g \circ f^{-1} - \tilde{\lambda}' \cdot \lambda \circ f^{-1} \cdot \chi \circ f^{-1}, \tag{2.153}$$

где $f \circ g = f(g(z))$.

Найти общее решение уравнения (2.152) не представляется возможным, поэтому рассмотрим различные частные случаи.

2.4.2. Глобальная суперсимметрия в $\mathbb{C}^{1|1}$. В этом случае компонентные функции в (2.149) имеют вид

$$f(z) = z,\ g(z) = 1,\ \chi(z) = \varepsilon,\ \psi(z) = \varepsilon, \tag{2.154}$$

где ε постоянный нечетный параметр. Тогда из (2.150) и (2.151) имеем

$$\tilde{\lambda}_{Glob}(z) = \varepsilon + \lambda(z) - \tilde{\lambda}'_{Glob}(z) \cdot \lambda(z) \cdot \varepsilon. \tag{2.155}$$

Эти уравнения также достаточно сложны для явного решения. Однако, в случае инфенитезимальных преобразований получаем решение

$$\delta_\varepsilon \lambda_{Glob}(z) = \tilde{\lambda}_{Glob}(z) - \lambda(z) = \varepsilon \cdot [1 + \lambda(z) \cdot \lambda'(z)], \tag{2.156}$$

которое удовлетворяет стандартной алгебре суперсимметрии в двух измерениях

$$[\delta_\varepsilon, \delta_\eta] \lambda_{Glob}(z) = 2\varepsilon\eta \cdot \lambda(z) \cdot \lambda'(z) \tag{2.157}$$

в соответствие с [38, 512].

Замечание **2.66.** В конечном глобальном случае имеем

$$\tilde{\lambda}_{Glob}^{fin}(z) = \tilde{\lambda}_{Glob}(z) + \sigma(z), \tag{2.158}$$

где $\tilde{\lambda}_{Glob}(z)$ дается в (2.156). Подставляя (2.158) в (2.155), для $\sigma(z)$ получаем следующее уравнение

$$\sigma'(z) \cdot \varepsilon \cdot \lambda(z) = \sigma(z), \tag{2.159}$$

которое может быть решено разложение по нильпотентам.

2.4.3. Редуцированные преобразования. Рассмотрим $N = 1$ редуцированные преобразования, параметризованные функциями $g(z)$, $\psi(z)$ (см **Подраздел 2.1** и [9, 13]). В терминах той же нечетной функции $\lambda(z)$ мы можем в общем случае найти преобразованную функцию $\tilde{\lambda}_{\mathrm{m}}(z)$ из (2.151) в виде двух решений (соответствующих различным проекциям проекции "спина редукции" m (2.81)) следующей системы уравнений [20]

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_{\mathrm{m}}\left(f_{\mathrm{m}}^{(g\psi)}(z)\right) &= \psi(z) + \lambda(z) \cdot g(z) - \tilde{\lambda}'_{\mathrm{m}}\left(f_{\mathrm{m}}^{(g\psi)}(z)\right) \cdot \lambda(z) \cdot \chi_{\mathrm{m}}^{(g\psi)}(z), \\ f_{\mathrm{m}}^{(g\psi)\prime}(z) &= \psi'(z) \cdot \psi(z) + \dfrac{1+\mathrm{m}}{2} \cdot g^2(z), \\ \chi_{\mathrm{m}}^{(g\psi)\prime}(z) &= g'(z) \cdot \psi(z) + \mathrm{m} \cdot g(z) \cdot \psi'(z), \end{cases} \tag{2.160}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу, $\mathrm{m} = +1$ соответствует суперконформным преобразованиям и $\mathrm{m} = -1$ - преобразованиям, сплетающим четность касательного пространства (см. [1, 7, 9]).

Определение 2.67. *Соответственно спину редукции назовем решения* $\tilde{\lambda}_{SCf}(z) = \tilde{\lambda}_{\mathrm{m}=+1}(z)$ — *SCf голдстино,* и $\tilde{\lambda}_{TPt}(z) = \tilde{\lambda}_{\mathrm{m}=-1}(z)$ — *TPt голдстино.*

Как и ранее, уравнение (2.160) невозможно решить явно в общем случае.

Утверждение 2.68. *Аналог кривизны кривой нильпотентен и совпадает со второй производной голдстино.*

Доказательство. По стандартной формуле $\varkappa_{\lambda}(z) = \frac{\tilde{\lambda}''(z)}{\left(1 + \left(\tilde{\lambda}'(z)\right)^2\right)^{3/2}}$, и после подстановки $\left(\tilde{\lambda}'(z)\right)^2 = 0$ получаем $\varkappa_{\lambda}(z) = \tilde{\lambda}''(z)$. ¥

Замечание **2.69.** Необходимо подчеркнуть, что уравнения (2.160) не зависят от свойств обратимости суперконформно-подобных преобразований [1,13], и только они, а не диаграммный метод, изложенный ниже, могут быть использованы для нахождения эволюции голдстино для преобразований, сплетающих четность касательного пространства ($m = 1$ случай).

Пример **2.70.** Параметризуем инфинитезимальные суперконформные преобразования следующим образом

$$f(z) = z + r(z),\ g(z) = 1 + \frac{1}{2}r'(z),\ \chi(z) =$$

(2.166) принимает следующий вид

$$\mathcal{G} = \mathcal{B} \circ \mathcal{H} \circ \mathcal{A}^{-1}. \tag{2.172}$$

В глобальном случае обратимость $\mathcal{A}$ очевидна, тогда из (2.165) получаем

$$\mathcal{A}^{-1} : \begin{cases} z &= z_A - \theta_A \cdot \lambda(z_A), \\ \theta &= -\lambda(z_A) + \theta_A [1 + \lambda(z_A) \cdot \lambda'(z_A)]. \end{cases} \tag{2.173}$$

Это объясняет хорошо известное "$-\lambda$ правило" [550,560] при сравнении суперполей в линейной и нелинейной реализациях [561].

Соотношение (2.172) представляет собой общий вид "расщепляющего трюка" ("splitting trick") [550, 551], в соответствии с которым любое линейное суперполе может быть представлено как суперпозиция нелинейно преобразующихся компонент. Аналогом этой процедуры в необратимом случае является условие представимости (2.166), которое не должно разрешаться относительно $\mathcal{A}$.

Таким образом, для суперполя $\Phi(z, \theta)$ мы можем записать

$$\delta_{\mathcal{H}} \Phi(z, \theta) = \Phi(z + \lambda(z) \cdot \varepsilon, \theta) - \Phi(z, \theta) = \varepsilon \cdot \lambda(z) \cdot \frac{\partial \Phi(z, \theta)}{\partial z}, \tag{2.174}$$

где $\delta_{\mathcal{H}}$ — инфинитезимальное нелинейное преобразование $\mathcal{H}$, соответствующее $\mathcal{G}$. Если использовать (2.173) и положить

$$\begin{aligned} \Phi(z, \theta) &= \Phi(z_A - \theta_A \cdot \lambda(z_A), -\lambda(z_A) + \theta_A [1 + \lambda(z_A) \cdot \lambda'(z_A)]) \\ &\stackrel{def}{=} \Phi_A(z_A, \theta_A), \end{aligned} \tag{2.175}$$

тогда для инфинитезимального линейного преобразования $\mathcal{G}$ мы полу-

чаем стандартное соотношение суперсимметрии

$$\delta_{\mathcal{G}}\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)=\Phi\left(z_A+\varepsilon\cdot\theta_A,\theta_A+\varepsilon\right)-\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)=\varepsilon\cdot Q_A\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right), \tag{2.176}$$

где Q_A - обыкновенные супертрансляции (см. [550]).

Теперь мы можем доказать обратный расщепляющий трюк, который явно следует из условия представимости (2.166), примененного к глобальной двумерной суперсимметрии.

Предложение 2.73. *Любое суперполе* $\Phi\left(z,\theta\right)$, *преобразующееся нелинейно, как в* (2.174), *вместе с голдстино* $\lambda\left(z\right)$, *преобразующегося, как в* (2.156), *задает линейное глобально преобразующееся суперполе* (2.176).

Доказательство. Мы должны доказать, что $\Delta\Phi\left(z,\theta\right)=\delta_{\mathcal{G}}\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)$, где $\Delta\Phi\left(z,\theta\right)\overset{def}{=}\delta_{\mathcal{H}}\Phi\left(z,\theta\right)+\delta_{\mathcal{B}}\Phi\left(z,\theta\right)-\delta_{\mathcal{A}}\Phi\left(z,\theta\right)$ и $\delta_{\mathcal{H}}$ дается формулой (2.174). Из (2.165) следует, что $\delta_{\mathcal{B}}-\delta_{\mathcal{A}}$ описывает изменения $\lambda\left(z\right)$, поэтому $\delta_{\mathcal{B}}\Phi\left(z,\theta\right)-\delta_{\mathcal{A}}\Phi\left(z,\theta\right)=\delta_{\varepsilon}\lambda_{Glob}\left(z\right)\cdot\frac{\partial\Phi(z,\theta)}{\partial\lambda}$. Так, что из (2.156) мы имеем

$$\Delta\Phi\left(z,\theta\right)=\varepsilon\cdot\left(\lambda\left(z\right)\cdot\frac{\partial\Phi\left(z,\theta\right)}{\partial z}+\left(1+\lambda\left(z\right)\cdot\lambda'\left(z\right)\right)\cdot\frac{\partial\Phi\left(z,\theta\right)}{\partial\lambda}\right).$$

Делая замену переменных $\left(z,\theta\right)\rightarrow\left(z_A,\theta_A\right)$ и используя соотношения

$$\frac{\partial\Phi\left(z,\theta\right)}{\partial z}=\left(1+\theta\cdot\lambda'\left(z\right)\right)\cdot\frac{\partial\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)}{\partial z_A}+\lambda'\left(z\right)\cdot\frac{\partial\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)}{\partial\theta_A}$$

и

$$\frac{\partial\Phi\left(z,\theta\right)}{\partial\lambda}=-\theta\cdot\frac{\partial\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)}{\partial z_A}+\frac{\partial\Phi_A\left(z_A,\theta_A\right)}{\partial\theta_A},$$

Запишем преобразование $\mathcal{B}_{TPt}$ в виде

$$\mathcal{B}_{SCf}:\left\{\begin{array}{rcl}\tilde{z} & = & f_{-1}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)}\left(z_H\right)+\theta_H\cdot\chi_{-1}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)}\left(z_H\right),\\ \tilde{\theta} & = & \tilde{\lambda}\left(z_H\right)+\theta_H\cdot b\left(z_H\right),\end{array}\right. \tag{2.196}$$

где

$$\begin{array}{rcl} f_{\mathrm{m}}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)'}\left(z_H\right) & = & \tilde{\lambda}'\left(z_H\right)\cdot\tilde{\lambda}\left(z_H\right)+\frac{1+\mathrm{m}}{2}\cdot b^2\left(z_H\right),\\ \chi_{\mathrm{m}}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)'}\left(z_H\right) & = & b'\left(z_H\right)\cdot\tilde{\lambda}\left(z_H\right)+\mathrm{m}\cdot b\left(z_H\right)\cdot\tilde{\lambda}'\left(z_H\right),\end{array} \tag{2.197}$$

и штрих означает производную по аргументам. Тогда соответствующая система уравнений имеет вид

$$f_{-1}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)}\left(p\left(z\right)\right)+\rho\left(z\right)\cdot\chi_{-1}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)}\left(p\left(z\right)\right) = f_{+1}^{(g\psi)}\left(z\right)+\lambda\left(z\right)\cdot\chi_{+1}^{(g\psi)}\left(z\right), \tag{2.198}$$

$$\tilde{\lambda}\left(p\left(z\right)\right)+\rho\left(z\right)\cdot b\left(p\left(z\right)\right) = \psi\left(z\right)+g\left(z\right)\cdot\lambda\left(z\right), \tag{2.199}$$

$$\begin{array}{rcl}\rho\left(z\right)\cdot f_{-1}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)'}\left(p\left(z\right)\right)+q\left(z\right)\cdot\chi_{-1}^{\left(b\tilde{\lambda}\right)}\left(p\left(z\right)\right) & = & \lambda\left(z\right)\cdot f_{+1}^{(g\psi)'}\left(z\right)+\\ & & \chi_{+1}^{(g\psi)}\left(z\right)\cdot\sqrt{1+\lambda\left(z\right)\cdot\lambda'\left(z\right)},\end{array} \tag{2.200}$$

$$\begin{array}{rcl}\rho\left(z\right)\cdot q\left(z\right)\cdot\tilde{\lambda}'\left(p\left(z\right)\right)+q\left(z\right)\cdot b\left(p\left(z\right)\right) & = & \lambda\left(z\right)\cdot\psi'\left(z\right)+\\ & & g\left(z\right)\cdot\sqrt{1+\lambda\left(z\right)\cdot\lambda'\left(z\right)}.\end{array} \tag{2.201}$$

Если преобразование $\mathcal{A}_{SCf}$ обратимо, то мы получаем

$$\mathcal{G}_{TPt}=\mathcal{B}_{TPt}\circ\mathcal{H}_{SCf}\circ\mathcal{A}_{SCf}^{-1} \tag{2.202}$$

что дает диаграммных аналог нелинейной реализации для необратимых сплетающих четность преобразований [7, 20].

2.5. Дробно-линейные преобразования

Выясним, какие из преобразований,удовлетворяющих (2.37) или (2.38), могут быть реализованы как линейные преобразования в суперпроективном пространстве $\mathbb{C}P^{1|1}$ после перехода к однородным координатам.

Предположим, что $\epsilon\,[y] \neq 0$, тогда, вводя однородные координаты [342, 429]

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \eta \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2|1}, \tag{2.203}$$

неоднородные координаты можно записать в виде $z = x/y$, $\theta = \eta/y$.

Поставим в соответствие общему $(5|4)$-мерному линейному отображению в $\mathbb{C}P^{1,1}$ преобразование однородных координат

$$\tilde{\mathrm{X}} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{X}, \tag{2.204}$$

где

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b & \alpha \\ c & d & \beta \\ \gamma & \delta & e \end{pmatrix}. \tag{2.205}$$

Соответствующее дробно-линейное преобразование в неоднородных координатах выражается через элементы суперматрицы M

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= \frac{az+b}{cz+d} + \theta \cdot \frac{(\beta a - \alpha c)\, z + \beta b - \alpha d}{(cz+d)^2}, \\ \tilde{\theta} &= \frac{\gamma z + \delta}{cz+d} + \theta \cdot \frac{(\beta\gamma + ec)\, z + \beta\delta + ed}{(cz+d)^2}. \end{aligned} \tag{2.206}$$

Исследование свойств дробно-линейных преобразований удобно про-

водить в терминах нечетных аналогов миноров для суперматриц — полуминоров и полуматриц, которые введены в **Приложении Д.2**.

2.5.1. Суперконформные преобразования. В терминах полуминоров преобразования (2.206) имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{z} &= \frac{az+b}{cz+d} + \theta\,\mathfrak{C}\frac{\delta\mathrm{et}\mathsf{M}_{\pm}\mathfrak{C}z + \delta\mathrm{et}\mathsf{M}_{\circ}}{(cz+d)^2},\\ \tilde{\theta} &= \frac{\gamma z+\delta}{cz+d} + \theta\,\mathfrak{C}\frac{\det M_{\mathsf{b}}\,\mathfrak{C}z + \det M_{\mathsf{a}}}{(cz+d)^2}.\end{aligned} \tag{2.207}$$

Из этого выражения видно, зачем были введены полуминоры и аналоги матричных функций от них.

Определение 2.74. *Четно-нечетная симметрия дробно-линейных преобразований определяется как*

$$\begin{aligned} a\,\$ &\;\gamma,\\ b\,\$ &\;\delta,\\ \det\,\$ &\;\delta\mathrm{et}. \end{aligned} \tag{2.208}$$

Суперконформные условия (2.37)

конформным условием (2.218).

Тогда в одном из возможных вариантов решения системы (2.222) для матрицы M получаем

$$\mathrm{M}_{TPt}^{noninv} = \begin{pmatrix} a & b & -ad\eta \\ c & d & -cd\eta \\ \gamma & \delta & \eta \cdot \pi \mathrm{er}\mathcal{M}_{\alpha} \end{pmatrix}, \tag{2.223}$$

где η — нечетный параметр.

Отметим, что среди всех рассмотренных преобразований групповыми свойствами обладают лишь обратимые суперконформные преобразования (2.215).

2.5.3. Супераналоги расстояния в $\mathbb{C}^{1|1}$. Расстояние между двумя точками в $\mathbb{C}^{1|1}$ определяется как $|Z_{12}|$, где

$$Z_{12} = z_1 - z_2 - \theta_1\theta_2 \tag{2.224}$$

(см. [111, 491, 564]). Относительно суперконформных обратимых преобразований (2.215) величина Z_{12} преобразуется ковариантно [565]

$$\tilde{Z}_{12} = \boldsymbol{J}_{SCf}^{inv}(Z_1)\, \boldsymbol{J}_{SCf}^{inv}(Z_2)\, Z_{12,} \tag{2.225}$$

где $\boldsymbol{J}_{SCf}^{inv}(Z)$ - якобиан преобразования, который в данном случае равен березинниану (2.216). Чтобы рассмотреть, как преобразуется Z_{12} в необратимом случае, остановимся на соотношении более подробно. Используя (2.2), представим левую часть (2.225) в виде

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{12} \;=\; & f(z_1) - f(z_2) - \psi(z_1)\cdot\psi(z_2) + \\ & (\theta_1 g(z_1) + \theta_2 g(z_2))\cdot(\psi(z_1) - \psi(z_2)) - \theta_1\theta_2 g(z_1)\, g(z_2). \end{aligned} \tag{2.226}$$

Здесь мы использовали суперконформное условие $\chi(z) = \psi(z)\, g(z)$ (см. (2.81) при $\mathrm{m} = +1$).

Отметим, для любых дробно-линейных функций

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d},\ \psi(z) = \frac{\gamma z+\delta}{cz+d},$$

что соответствует фиксации элементов из первых двух столбцов супер-матрицы M (2.205), можно получить

$$\begin{aligned}
&f(z_1) - f(z_2) = R\cdot(z_1-z_2)\cdot \mathrm{det}\,\mathrm{M}_e,\\
&\psi(z_1) - \psi(z_2) = R\cdot(z_1-z_2)\cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha,\\
&\psi(z_1)\, f(z_2) - \psi(z_2)\, f(z_1) = R\cdot(z_1-z_2)\cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\beta,\\
&\psi(z_1)\cdot\psi(z_2) = R\cdot(z_1-z_2)\,\gamma\delta,
\end{aligned} \tag{2.227}$$

где $R^{-1} = (cz_1+d)\,(cz_2+d)$ (см. также (Д.23) и (Д.24)).

Тогда для преобразованного расстояния $\tilde{Z}_{12}$ из (2.226) получаем

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{12} \;=\;& R\cdot(z_1-z_2)\cdot(\mathrm{det}\,\mathrm{M}_e - \gamma\delta) + \\
& R\cdot(z_1-z_2)\cdot(\theta_1 g(z_1) + \theta_2 g(z_2))\cdot\delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha - \theta_1\theta_2 g(z_1)\, g(z_2)\,.
\end{aligned} \tag{2.228}$$

Отсюда следует, что от функции $g(z)$ зависят дальнейшие свойства Z_{12}. Так, в случае обратимых суперконформных преобразований (2.215)

$$g(z) = \frac{\sqrt{\mathrm{det}\,\mathrm{M}_e - \gamma\delta}}{cz+d}. \tag{2.229}$$

Все необратимые преобразования содержат уравнение $\mathrm{det}\,\mathrm{M}_e = \gamma\delta$ (см. (2.218) и (2.222)), поэтому из (2.228) мы имеем

Утверждение 2.77. *Для необратимых дробно-линейных преобразований $\tilde{Z}_{12}$ не содержит θ-независимых слагаемых, и поэтому является*

чисто дýховой величиной.

Из рассмотрения последнего слагаемого в (2.228) следует

Утверждение 2.78. *Нильпотентность $g(z)$ приводит к линейности $\tilde{Z}_{12}$ по четным координатам.*

Окончательно можно сформулировать

Предложение 2.79. *Для полунеобратимых суперконформных преобразований*

$$\tilde{Z}_{12} = 0. \tag{2.230}$$

Доказательство. В всех вариантах полунеобратимых преобразований

$$g(z) \subset \mathrm{Ann}\left[\delta\mathrm{et}\mathcal{M}_{\alpha}\right], \tag{2.231}$$

поэтому второе слагаемое в (2.228) равно нулю. Первое слагаемое зануляется вследствие **Утверждения 2.77**. Поскольку выполняется (2.231),

РАЗДЕЛ 3

НЕОБРАТИМАЯ ГЕОМЕТРИЯ РАСШИРЕННЫХ РЕДУЦИРОВАННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

В разделе исследуются свойства $N = 2$ и $N = 4$ редуцированных обратимых и необратимых отображений суперплоскости. Нетривиальные редукции расширенных касательных суперпространств приводят к N-обобщению понятия комплексной структуры, к полной классификации $N = 2$ и $N = 4$ преобразований в терминах перманентов и полуминоров. Строятся и анализируются $N = 2$ и $N = 4$ суперконформные полугруппы в альтернативной параметризации и приводится их компонентное представление. Обсуждаются свойства сплетающих четность расширенных преобразований и соответствующих супердифференциалов.

Хорошо известно, что многие пространственно-временные свойства суперструнных теорий элементарных частиц тесно связаны со свойствами мирового листа струны [282, 283, 286, 567]. Так, в работах [568–571] было показано, что необходимым условием $N = 1$ ($N = 2$) пространственно-временной суперсимметрии является $N = 2$ ($N = 4$) расширенная суперконформная симметрия на мировом листе, которая была впервые рассмотрена в контексте фермионных струн [572–574]. Общие свойства N-расширенных суперконформных алгебр изучались в работах [575–581], а N-расширенные суперконформные теории поля исследовались в [565, 582–587]. Исключительно важной является также связь расширенных суперконформных алгебр с геометрией пространства анти-Де Ситтера при $N = 2$ [588–590] и $N = 4$ [591, 592]. Однако как было

показано в [575], при $N \geq 5$ не существует центральных расширений, а суперконформные теории поля, хотя и могут быть сформулированы при произвольных N [593,594], но становятся тривиальными и не имеют осмысленной квантовой физики [565]. Поэтому здесь мы рассмотрим необратимые обобщения суперконформной геометрии только на $N = 2$ и $N = 4$ [2, 3, 12, 17].

3.1. $N = 2$ суперконформная геометрия

Исследования различных вариантов $N = 2$ суперконформной теории поля [581, 595–601] и $N = 2$ суперконформной геометрии [602] явилось чрезвычайно важным инструментом для построения как гипотетических теорий критических $N = 2$ струн*) в пространстве-времени с сигнатурой $(2, 2)$ [610–613], так и последовательных реалистичных моделей, основанных на суперструнных компактификациях методом косетов G/H [614–619]. С геометрической точки зрения мировой лист суперструны (в моделях с пространственно-временной суперсимметрией) представляет собой $N = 2$ суперриманову поверхность [563, 620–624], склеенную $N = 2$ суперконформными преобразованиями [596, 625].

В этом подразделе мы подробно изучим аналоги этих преобразований — обратимые и необратимые $N = 2$ редуцированные преобразования, используя также и несуперконформные редукции, аналогичные введенным в **Подразделе 2.3** и формализм перманентов (см. [626] и **Раздел 5**).

В стандартном базисе суперпространство $\mathbb{C}^{1|2}$ локально описывается голоморфными суперкоординатами $Z = \left(z, \theta^1, \theta^2\right)$, где $\left(\theta^i\right)^2 = 0$, $\left\{\theta^1, \theta^2\right\} = 0$. При четных N удобнее пользоваться комплексным ба-

---

Примечание. Тем не менее, недавно [603, 604] обнаружена тесная связь $N = 2$ струн с M-теорией [298, 299, 605] и D-бранами [302, 606–609].

Определение 3.9. *Супераналитическая полугруппа* $\mathbf{S}_{SA}^{(N=2)} \ni \mathbf{s}$ *параметризуется функциональной матрицей*

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f & h & \chi_- & \chi_+ \\ \psi_+ & \lambda_+ & g_{+-} & g_{++} \\ \psi_- & \lambda_- & g_{--} & g_{-+} \end{array} \right\} \stackrel{def}{=} \mathbf{s} \in \mathbf{S}_{SA}^{(N=2)}, \tag{3.18}$$

а действие

$$\mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2 = \mathbf{s}_3 \tag{3.19}$$

определяется композицией преобразований $Z \to \tilde{Z} \to \widetilde{\tilde{Z}}$.

Замечание **3.10.** Умножение в полугруппе $\mathbf{S}_{SA}^{(N=2)}$ не связано с обычным матричным умножением[*)], а определяется композицией $N = 2$ супераналитических преобразований, записанных в компонентном виде (3.14), поэтому функциональная матрица, определяющая элемент $\mathbf{s}$, не обязана быть квадратной, как, например, в случае $N = 1$ (2.6).

Ассоциативность умножения (3.19)

$$\mathbf{s}_1 * (\mathbf{s}_2 * \mathbf{s}_3) = (\mathbf{s}_1 * \mathbf{s}_2) * \mathbf{s}_3 \tag{3.20}$$

следует из ассоциативности преобразований относительно композиции (для $N = 1$ см. **Предложение 2.7**).

Двусторонняя единица в полугруппе $\mathbf{S}_{SA}^{(N=2)}$ определяется функци-

---

Примечание. Для этого и использованы фигурные скобки вместо матричных круглых.

ональной матрицей следующего вида

$$\mathbf{e} = \left\{ \begin{array}{cccc} z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}, \tag{3.21}$$

а двусторонний нуль определяется нулевой такой матрицей.

Рассмотрим гомоморфизм φ $N = 2$ супераналитической полугруппы в полугруппу $N = 2$ супераналитических преобразований $\varphi : \mathbf{S}_{SA}^{(N=2)} \to \boldsymbol{T}_{SA}^{(N=2)}$. Тогда легко проверить, что, как и должно быть, $\ker \varphi = \mathbf{e}$.

Приведенная процедура представляет собой специальную "нелинейную реализацию" $N = 2$ супераналитической полугруппы функциональными матрицами*), умножение в которых задается композицией $N = 2$ супераналитических преобразований.

3.1.3. Редукции $N = 2$ касательного суперпространства и перманенты. Сначала найдем соотношение между суперфункциями $Q\left(z, \theta^+, \theta^-\right)$ и $\Delta^{\pm}\left(z, \theta^+, \theta^-\right)$, аналогичное $N = 1$ случаю (2.58). Для этого продифференцируем $\Delta^{\pm}\left(z, \theta^+, \theta^-\right)$, применим (3.3) и получим

$$Q\left(z, \theta^+, \theta^-\right) - \frac{D^+\Delta^-\left(z, \theta^+, \theta^-\right) + D^-\Delta^+\left(z, \theta^+, \theta^-\right)}{2} = \operatorname{per} \mathrm{H}, \tag{3.22}$$

где

$$\operatorname{per} \mathrm{H} = D^-\tilde{\theta}^+ \cdot D^+\tilde{\theta}^- + D^+\tilde{\theta}^+ \cdot D^-\tilde{\theta}^- \tag{3.23}$$

— перманент обычной матрицы H с четными (и возможно нильпотент-

---

Примечание. Это название не связано с нелинейными реализациями, обусловленными индуцированными представлениями, которые рассмотрены в **Подразделе 2.4**.

$$\Delta^{-}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \;=\; D^{-}\tilde{z}-D^{-}\tilde{\theta}^{-}\cdot\tilde{\theta}^{+}-D^{-}\tilde{\theta}^{+}\cdot\tilde{\theta}^{-}=0. \qquad (3.40)$$

Определение полунеобратимых и необратимых преобразований для $N=1$ дано в (2.4) и (2.5), а для $N=2$ — в (3.12) и (3.13).

Определение 3.15. *Полунеобратимые и необратимые левые $N=2$ редуцированные вращающие четность*$^{*)}$ *касательного пространства преобразования определяются двумя условиями*

$$Q\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \;=\; \partial\tilde{z}-\partial\tilde{\theta}^{+}\cdot\theta^{-}-\partial\tilde{\theta}^{-}\cdot\theta^{+}=0, \qquad (3.41)$$
$$\Delta^{-}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \;=\; D^{-}\tilde{z}-D^{-}\tilde{\theta}^{-}\cdot\tilde{\theta}^{+}-D^{-}\tilde{\theta}^{+}\cdot\tilde{\theta}^{-}=0. \qquad (3.42)$$

Определение 3.16. *Полунеобратимые и необратимые правые $N=2$ редуцированные сплетающие четность касательного пространства преобразования определяются двумя условиями*

$$Q\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \;=\; \partial\tilde{z}-\partial\tilde{\theta}^{+}\cdot\theta^{-}-\partial\tilde{\theta}^{-}\cdot\theta^{+}=0, \qquad (3.43)$$
$$\Delta^{+}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \;=\; D^{+}\tilde{z}-D^{+}\tilde{\theta}^{-}\cdot\tilde{\theta}^{+}-D^{+}\tilde{\theta}^{+}\cdot\tilde{\theta}^{-}=0. \qquad (3.44)$$

Будем называть условия (3.39)–(3.40) SCf условиями, условия (3.41)–(3.42) — TPt^{-} условиями и (3.43)–(3.44) — TPt^{+} условиями. В терминах перманентов и полуперманентов они приобретают вид

$$D^{\pm}\tilde{z}=\pi\mathrm{er}\mathcal{D}^{\pm},\;\;(\mathsf{SCf}) \qquad (3.45)$$

$$\begin{cases}\partial\tilde{z}=\mathrm{per}\,\mathrm{Q},\\ D^{-}\tilde{z}=\pi\mathrm{er}\mathcal{D}^{-},\end{cases}\qquad(\mathsf{TPt}^{-}) \qquad (3.46)$$

Примечание. Причина такого названия будет пояснена ниже (для $N=1$ вращающих четность преобразований см. **Подраздел 2.3**).

$$\left\{\begin{array}{c} \partial\tilde{z} = \mathrm{per}\,\mathrm{Q}, \\ D^{+}\tilde{z} = \pi\mathrm{er}\mathcal{D}^{+}. \end{array}\right. \quad (\mathsf{TPt}^{+}) \tag{3.47}$$

Исходя из этих условий, можно определить три соответствующие редуцированные суперматрицы по формулам

$$\mathrm{P}^{(N=2)}_{SCf} \overset{def}{=} \mathrm{P}^{(N=2)}_{S}|_{\Delta^{+}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0,\,\Delta^{-}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0} =$$

$$\left(\begin{array}{cc} Q_{SCf}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) & \partial\tilde{\theta}^{+}_{SCf}\;\; \partial\tilde{\theta}^{-}_{SCf} \\ 0 & \\ 0 & \mathrm{H}_{SCf} \end{array}\right), \tag{3.48}$$

$$\mathrm{P}^{(N=2)}_{TPt+} \overset{def}{=} \mathrm{P}^{(N=2)}_{T+}|_{Q(z,\theta^{+},\theta^{-})=0,\,\Delta^{+}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0} =$$

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & \partial\tilde{\theta}^{+}_{TPt+}\;\; \partial\tilde{\theta}^{-}_{TPt+} \\ \Delta^{-}_{TPt+}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) & \\ 0 & \mathrm{H}_{TPt+} \end{array}\right), \tag{3.49}$$

$$\mathrm{P}^{(N=2)}_{TPt-} \overset{def}{=} \mathrm{P}^{(N=2)}_{T-}|_{Q(z,\theta^{+},\theta^{-})=0,\,\Delta^{-}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0} =$$

$$\left(\begin{array}{cc} 0 & \partial\tilde{\theta}^{+}_{TPt-}\;\; \partial\tilde{\theta}^{-}_{TPt-} \\ 0 & \\ \Delta^{+}_{TPt-}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) & \mathrm{H}_{TPt-} \end{array}\right), \tag{3.50}$$

где

$$Q_{SCf}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \overset{def}{=} Q\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right)|_{\Delta^{+}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0,\,\Delta^{-}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0}, \tag{3.51}$$

$$\Delta^{\pm}_{TPt\mp}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right) \overset{def}{=} \Delta^{\pm}\left(z,\theta^{+},\theta^{-}\right)|_{Q(z,\theta^{+},\theta^{-})=0,\,\Delta^{\mp}(z,\theta^{+},\theta^{-})=0}, \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
\partial_{\mu^+}\Gamma^{\S}_{SCf} &= \partial_{\mu^+}\Gamma^{\S}\,\big|_{\Phi^+(z;\mu^+;\mu^-)=0\,;\,\Phi^-(z;\mu^+;\mu^-)=0}\,;\\
\partial_{\mu^+}\Gamma^{+}_{TPt^{\S}} &= \partial_{\mu^+}\Gamma^{+}\,\big|_{Q(z;\mu^+;\mu^-)=0\,;\,\Phi^{\S}(z;\mu^+;\mu^-)=0}\,;\\
\partial_{\mu^-}\Gamma^{-}_{TPt^{\S}} &= \partial_{\mu^-}\Gamma^{-}\,\big|_{Q(z;\mu^+;\mu^-)=0\,;\,\Phi^{\S}(z;\mu^+;\mu^-)=0}\,;
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned}
H_{SCf} &= H\,\big|_{\Phi^+(z;\mu^+;\mu^-)=0\,;\,\Phi^-(z;\mu^+;\mu^-)=0}\,;\\
H_{TPt^{\S}} &= H\,\big|_{Q(z;\mu^+;\mu^-)=0\,;\,\Phi^{\S}(z;\mu^+;\mu^-)=0}\,;
\end{aligned} \tag{3.54}$$

$$R_{TPt^{\S}} = R\,\big|_{Q(z;\mu^+;\mu^-)=0\,;\,\Phi^{\S}(z;\mu^+;\mu^-)=0}\,: \tag{3.55}$$

dLQ NAHOVDENIQ FUNKCII $Q_{SCf}(z;\mu^+;\mu^-)$ WOSPOLXZUEMSQ (3.22), TOGDA POLU^AEM

$$Q_{SCf}\left(z;\mu^+;\mu^-\right) = \operatorname{per} H_{SCf}\,: \tag{3.56}$$

oTS@DA SLEDUET OKON^ATELXNOSTX PREDUCIROWANNOJ SUPERMATRICY

$$P^{(N=2)}_{SCf} = \begin{pmatrix} \operatorname{per} H_{SCf} & \partial_{\mu^+}\Gamma^{+}_{SCf} & \partial_{\mu^-}\Gamma^{-}_{SCf} \\ 0 & & \\ 0 & H_{SCf} & \end{pmatrix} \tag{3.57}$$

I FUNDAMENTALXNAQ OBOLOJNAQ FORMULA WQZYWA@]AQ BEREZINIAN MANENT I DETERMINANT

$$\operatorname{Ber} P^{(N=2)}_{SCf} = \frac{\operatorname{per} H_{SCf}}{\det H_{SCf}}\,: \tag{3.58}$$

pREDLOVENIE 3.17. kOMPOZICIQ DWUH $N = 2$ SCf PREOBRAZOWANIJ ESTX $N = 2$ SCf PREOBRAZOWANIE, A TAKVE KOMPOZICIQ $N = 2$ SCf PREOBRAZOWANIQ I $N = 2$ $TPt^{\S}$ PREOBRAZOWANIQ ESTX $N = 2$ $TPt^{\S}$ PREOBRAZOWANIE.

dOKAZATELXSTWO SLEDUET IZ UMNOVENIQ SUPERMATRIC (3.48) I (3.50)

$$P^{(N=2)}_{SCf_1} \circ P^{(N=2)}_{SCf_2} = P^{(N=2)}_{SCf_3}\,; \tag{3.59}$$

$$P^{(N=2)}_{TPt^{\S}_1} \circ P^{(N=2)}_{SCf_2} = P^{(N=2)}_{TPt^{\S}_3}\,: \tag{3.60}$$

$N = 2$

ально с помощью той же матрицы H_{SCf} следующим образом

$$\left(\begin{array}{cc} d\tilde{\tau}^{+}_{SCf} & d\tilde{\tau}^{-}_{SCf} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} d\tau^{+}_{SCf} & d\tau^{-}_{SCf} \end{array} \right) \cdot \mathrm{H}_{SCf}. \tag{3.67}$$

Определение 3.20. *Внешний* SCf *супердифференциал* $\delta^{(N=2)}_{SCf}$ *определяется формулой*

$$\delta^{(N=2)}_{SCf} = d\tau^{+}_{SCf} \cdot D^{-} + d\tau^{-}_{SCf} \cdot D^{+}. \tag{3.68}$$

Утверждение 3.21. *Внешний дифференциал* $(0|2)$*-мерного подпространства инвариантен относительно* $N = 2$ *суперконформно-подобных преобразований.*

Доказательство. Из (3.64), (3.67) и (3.68) имеем

$$\delta^{(N=2)}_{SCf} = \left(\begin{array}{cc} d\tau^{+}_{SCf} & d\tau^{-}_{SCf} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} D^{-} \\ D^{+} \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{cc} d\tau^{+}_{SCf} & d\tau^{-}_{SCf} \end{array} \right) \cdot \mathrm{H}_{SCf} \cdot \left(\begin{array}{c} \tilde{D}^{-} \\ \tilde{D}^{+} \end{array} \right) =$$

$$\left(\begin{array}{cc} d\tilde{\tau}^{+}_{SCf} & d\tilde{\tau}^{-}_{SCf} \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} \tilde{D}^{-} \\ \tilde{D}^{+} \end{array} \right) = \tilde{\delta}^{(N=2)}_{SCf}. \tag{3.69}$$

■

Введенные $N = 2$ супердифференциалы $d\tau^{\pm}_{SCf}$ дуальны к суперпроизводным и в смысле соотношения (см. (3.3))

$$\left\{ d\tau^{+}_{SCf}, d\tau^{-}_{SCf} \right\} = 2dZ. \tag{3.70}$$

Применим оператор D^+ к SCf условию (3.39)

$$D^+\left(D^+\tilde{z} - D^+\tilde{\theta}^- \cdot \tilde{\theta}^+ - D^+\tilde{\theta}^+ \cdot \tilde{\theta}^-\right) = 0. \tag{3.71}$$

Используя нильпотентность суперпроизводных в комплексном базисе (3.2) $\left(D^+\right)^2 = 0$, получаем

$$\begin{aligned} D^+\tilde{\theta}^- \cdot D^+\tilde{\theta}^+ &= 0, \\ D^-\tilde{\theta}^+ \cdot D^-\tilde{\theta}^- &= 0. \end{aligned} \tag{3.72}$$

Отсюда следует, что матрица H^T_{SCf} является 2×2 scf-матрицей (см. **Подраздел 5.1**), т. е. элементы в столбцах H^T_{SCf} взаимно ортогональны. Для таких матриц справедливо общее соотношение

$$\left(\det \mathrm{H}_{SCf}\right)^2 = \left(\mathrm{per}\, \mathrm{H}_{SCf}\right)^2. \tag{3.73}$$

Тогда в случае обратимых преобразований, которые удовлетворяют условию $\epsilon\left[\det \mathrm{H}_{SCf}\right] \neq 0$ (3.11)–(3.12) (с очевидностью, также и $\epsilon\left[\mathrm{per}\, \mathrm{H}_{SCf}\right] \neq 0$), для березиниана (3.63) имеем

$$\mathrm{Ber}_{SCf}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \frac{\det \mathrm{H}_{SCf}}{\mathrm{per}\, \mathrm{H}_{SCf}} = \frac{\mathrm{per}\, \mathrm{H}_{SCf}}{\det \mathrm{H}_{SCf}}, \tag{3.74}$$

поэтому

$$\left(\mathrm{Ber}_{SCf}\left(\tilde{Z}/Z\right)\right)^2 = 1. \tag{3.75}$$

Следовательно, для обратимых $N = 2$ суперконформных преобразований березиниан равен

$$\mathrm{Ber}_{SCf}\left(\tilde{Z}/Z\right) = k = \pm 1, \tag{3.76}$$

где $k = +1$ отвечает подгруппе $SO_{\Lambda_0}(2)$ преобразований (в координатном базисе (E.24)), описывающих $N = 2$ суперримановы поверхности без твиста, а $k = -1$ соответствует общим $O_{\Lambda_0}(2)$ преобразованиям, описывающих $N = 2$ суперримановы поверхности [563, 565, 622] или $N = 2$ суперконформные алгебры [502, 627, 628] с твистом. Этого и естественоо, поскольку группой внешних автоморфизмов здесь является $Z_2 = \epsilon\left[O_{\Lambda_0}(2)/SO_{\Lambda_0}(2)\right]$ [563, 565].

Если $\epsilon\left[\det \mathrm{H}_{SCf}\right] \neq 0$, то легко видеть, что элемент матрицы может быть либо ненулевым с ненулевой числовой частью, либо нулем, поэтому верхнему и нижнему знакам отвечает диагональная и антидиагональная матрица H_{SCf} соответственно

$$\mathrm{H}^{(}$$

3.1.5. Конечные обратимые и необратимые SCf преобразования и $N=2$ SCf полугруппа. Чтобы получить и проклассифицировать нерасщепленные $N=2$ SCf преобразования, применим SCf условия (3.39)–(3.40) к полным $N=2$ супераналитическим преобразованиям вида (3.14). Для этого удобно воспользоваться соотношениями, следующими из (3.14) и (3.1),

$$D^{\pm}\tilde{z} = \chi_{\pm}(z) + \theta^{\pm}\cdot\left(f'(z) \mp h(z)\right) + \theta^{\pm}\theta^{\mp}\cdot\chi'_{\pm}(z), \tag{3.84}$$

$$D^{\pm}\tilde{\theta}^{\mp} = g_{\mp\pm}(z) + \theta^{\pm}\cdot\left(\psi'_{\mp}(z) + \lambda_{\mp}(z)\right) + \theta^{\pm}\theta^{\mp}\cdot g'_{\mp\pm}(z), \tag{3.85}$$

$$D^{\pm}\tilde{\theta}^{\pm} = g_{\pm\pm}(z) + \theta^{\pm}\cdot\left(\psi'_{\pm}(z) - \lambda_{\pm}(z)\right) + \theta^{\pm}\theta^{\mp}\cdot g'_{\pm\pm}(z). \tag{3.86}$$

Тогда непосредственно из SCf условий (3.39)–(3.40) получаем систему уравнений на компонентные функции

$$\begin{aligned} f'(z) \mp h(z) \;=\; & g_{+-}(z)\,g_{-+}(z) + g_{++}(z)\,g_{--}(z) + \psi'_{\pm}(z)\,\psi_{\mp}(z) + \\ & \psi'_{\mp}(z)\,\psi_{\pm}(z) + \lambda_{\mp}(z)\,\psi_{\pm}(z) - \lambda_{\pm}(z)\,\psi_{\mp}(z), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \chi'_{\pm} \;=\; & g'_{\mp\pm}(z)\,\psi_{\pm}(z) - g_{\mp\pm}(z)\,\psi'_{\pm}(z) + g'_{\pm\pm}(z)\,\psi_{\mp}(z) - \\ & g_{\pm\pm}(z)\,\psi'_{\mp}(z) + 2g_{\mp\pm}(z)\,\lambda_{\pm}(z) - 2g_{\pm\pm}(z)\,\lambda_{\mp}(z), \end{aligned}$$

$$\chi_{\pm} = g_{\mp\pm}(z)\,\psi_{\pm}(z) + g_{\pm\pm}(z)\,\psi_{\mp}(z),$$

$$g_{\mp\pm}(z)\,g_{\pm\pm}(z) = 0,$$

которую можно привести к следующему виду

$$f'(z) = g_{+-}(z)\,g_{-+}(z) + g_{++}(z)\,g_{--}(z) + \psi'_{+}(z)\,\psi_{-}(z) + \psi'_{-}(z)\,\psi_{+}(z), \tag{3.87}$$

$$h(z) = \lambda_{+}(z)\,\psi_{-}(z) - \lambda_{-}(z)\,\psi_{+}(z), \tag{3.88}$$

$$\chi_{\pm} = g_{\mp\pm}(z)\,\psi_{\pm}(z) + g_{\pm\pm}(z)\,\psi_{\mp}(z), \tag{3.89}$$

$$g_{\mp\pm}(z)\,[\lambda_{\pm}(z) - \psi'_{\pm}(z)] = g_{\pm\pm}(z)\,[\lambda_{\mp}(z) + \psi'_{\mp}(z)], \tag{3.90}$$

$$g_{\mp\pm}(z)\,g_{\pm\pm}(z) = 0. \tag{3.91}$$

В терминах матричных функций и их нечетных аналогов (см. 2.5) первые 4 уравнения можно представить в компактном четно-нечетно симметричном виде

$$f'(z) = \operatorname{per} \mathrm{G}_{SCf} + \operatorname{per} \begin{pmatrix} \psi'_{+}(z) & \psi'_{-}(z) \\ \psi_{+}(z) & \psi_{-}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.92}$$

$$h(z) = \det \begin{pmatrix} \lambda_{+}(z) & \lambda_{+}(z) \\ \psi_{+}(z) & \psi_{-}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.93}$$

$$\chi_{\pm} = \pi\mathrm{er} \begin{pmatrix} g_{\mp\pm}(z) & g_{\pm\pm}(z) \\ \psi_{\mp}(z) & \psi_{\pm}(z) \end{pmatrix}, \tag{3.94}$$

$$\pi\mathrm{er} \begin{pmatrix} g_{\mp\pm}(z) & g_{\pm\pm}(z) \\ \psi'_{\mp}(z) & \psi'_{\pm}(z) \end{pmatrix} = \delta\mathrm{et} \begin{pmatrix} g_{\mp\pm}(z) & g_{\pm\pm}(z) \\ \lambda_{\mp}(z) & \lambda_{\pm}(z) \end{pmatrix}. \tag{3.95}$$

Отсюда следует, что число независимых функций, которыми определяется $N = 2$ SCf преобразование равно 12 (супераналитических компонентных функций (3.14)) - 8 (уравнений) = 4. Остальные функции могут быть найдены из 8 уравнений (3.87)–(3.91).

В частности, в обратимом случае, если $\epsilon[\det \mathrm{G}_{SCf}] \neq 0$, то функции $h(z)$ и $\lambda_{\pm}(z)$ можно получить из уравнений (3.93) и (3.94) в явном виде

$$h(z) = \frac{\operatorname{per} \mathrm{G}_{SCf}}{\det \mathrm{G}_{SCf}} (\psi_{+}(z)\,\psi_{-}(z))' + \tag{3.96}$$

ния (

нентных функций. Соответствующие $N = 2$ необратимые SCf преобразования вообще не содержат четных функций и имеют вид

образование

$$\begin{cases} \tilde{z} = f(z) + \theta^- \left[\eta(z)\left(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)\right)\psi_+(z) + \eta(z)\,\psi'_-(z)\,\psi_-(z)\right] + \\ \qquad \theta^+ g_{+-}(z)\,\psi_-(z) + \theta^+\theta^-\left[\lambda_+(z)\,\psi_-(z) - \psi'_-(z)\,\psi_+(z)\right], \\ \tilde{\theta}^+ = \psi_+(z) + \theta^+ g_{+-}(z) + \theta^-\eta(z)\,\psi'_-(z) + \theta^+\theta^-\lambda_+(z), \\ \tilde{\theta}^- = \psi_-(z) + \theta^-\eta(z)\left(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)\right) - \theta^+\theta^-\psi'_-(z), \end{cases} \tag{3.108}$$

где

$$f'(z) = g_{+-}(z)\,\eta(z)\left(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)\right) + \psi'_+(z)\,\psi_-(z) + \psi'_-(z)\,\psi_+(z).$$

В случае **2б** “полных” необратимых преобразований все элементы матрицы G_{SCf} отличны от нуля, но нильпотентны. Тогда решение уравнений (3.90)–(3.91) дает

$$1)\ \mathrm{G}_{SCf} = \begin{pmatrix} \eta(z)\left(\lambda_-(z) - \psi'_-(z)\right) & \rho(z)\left(\lambda_-(z) + \psi'_-(z)\right) \\ \eta(z)\left(\lambda_+(z) + \psi'_+(z)\right) & \rho(z)\left(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)\right) \end{pmatrix}, \tag{3.109}$$

$$2)\ \mathrm{G}_{SCf} = \begin{pmatrix} \eta(z)\left(\lambda_+(z) + \psi'_+(z)\right) & \rho(z)\left(\lambda_+(z) - \psi'_+(z)\right) \\ \eta(z)\left(\lambda_-(z) - \psi'_-(z)\right) & \rho(z)\left(\lambda_-(z) + \psi'_-(z)\right) \end{pmatrix}. \tag{3.110}$$

Такие преобразования параметризуются шестью нечетными функциями $\psi_\pm(z)$, $\lambda_\pm(z)$, $\eta(z)$, $\rho(z)$ и, например, в первом варианте (3.109) имеют вид

$$\begin{aligned} &\tilde{z} = f(z) + \theta^+\theta^-\left[\lambda_+(z)\,\psi_-(z) - \lambda_-(z)\,\psi_+(z)\right] + \\ &\theta^+\left[\eta(z)\,\lambda_+(z) + \eta(z)\,\lambda_-(z) + \left(\psi_+(z)\,\psi_-(z)\right)'\right] + \\ &\theta^-\left[\rho(z)\,\lambda_-(z) + \rho(z)\,\lambda_+(z) - \left(\psi_+(z)\,\psi_-(z)\right)'\right], \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c}\tilde{\theta}^{+}=\psi_{+}(z)+\theta^{+}\eta(z)\left(\lambda_{+}(z)+\psi_{+}^{\prime}(z)\right)+\\ \theta^{-}\rho(z)\left(\lambda_{+}(z)-\psi_{+}^{\prime}(z)\right)+\theta^{+}\theta^{-}\lambda_{+}(z),\\ \\ \tilde{\theta}^{-}=\psi_{-}(z)+\theta^{-}\rho(z)\left(\lambda_{-}(z)+\psi_{-}^{\prime}(z)\right)+\\ \theta^{+}\eta(z)\left(\lambda_{-}(z)-\psi_{-}^{\prime}(z)\right)-\theta^{+}\theta^{-}\lambda_{-}(z),\end{array} \tag{3.111}$$

где

$$\begin{aligned}f^{\prime}(z) &= 2\eta(z)\rho(z)\left[\lambda_{-}(z)\psi_{+}^{\prime}(z)-\lambda_{+}(z)\psi_{-}^{\prime}(z)\right]+\\ &\psi_{+}^{\prime}(z)\psi_{-}(z)+\psi_{-}^{\prime}(z)\psi_{+}(z).\end{aligned}$$

Иной вариант решения уравнений (3.90)–(3.91) возникает, когда обе функции $\lambda_{\pm}(z)$ приравниваются к $\psi_{\pm}^{\prime}(z)$ с различными знаками, что приводит еще к четырем решениям

$$1)\ \mathrm{G}_{SCf}=\begin{pmatrix}\eta(z)\sigma(z) & \rho(z)\psi_{-}^{\prime}(z)\\ \eta(z)\psi_{+}^{\prime}(z) & \rho(z)\mu(z)\end{pmatrix},\ \lambda_{\pm}(z)=\psi_{\pm}^{\prime}(z), \tag{3.112}$$

$$2)\ \mathrm{G}_{SCf}=\begin{pmatrix}\eta(z)\psi_{-}^{\prime}(z) & \rho(z)\mu(z)\\ \eta(z)\sigma(z) & \rho(z)\psi_{+}^{\prime}(z)\end{pmatrix},\ \lambda_{\pm}(z)=-\psi_{\pm}^{\prime}(z), \tag{3.113}$$

$$3)\ \mathrm{G}_{SCf}=\begin{pmatrix}\eta(z)\psi_{-}^{\prime}(z) & \rho(z)\mu(z)\\ \eta(z)\psi_{+}^{\prime}(z) & \rho(z)\sigma(z)\end{pmatrix},\ \lambda_{+}(z)=\psi_{+}^{\prime}(z),\ \lambda_{-}(z)=-\psi_{-}^{\prime}(z), \tag{3.114}$$

$$4)\ \mathrm{G}_{SCf}=\begin{pmatrix}\eta(z)\mu(z) & \rho(z)\psi_{-}^{\prime}(z)\\ \eta(z)\sigma(z) & \rho(z)\psi_{+}^{\prime}(z)\end{pmatrix},\ \lambda_{+}(z)=-\psi_{+}^{\prime}(z),\ \lambda_{-}(z)=\psi_{-}^{\prime}(z). \tag{3.115}$$

Необратимые $N=2$ преобразования, соответствующие, напри-

не является scf-матрицей (см. **Подраздел 5.1**).

Далее выясним действие TPt

Поэтому, по аналогии с $N = 1$ (см. **Определение 2.55**) можно сформулировать

Определение 3.26. *Редуцированные $N = 2$ преобразования, удовлетворяющие следующим условиям $Q(z, \theta^+, \theta^-) = 0$, $\Delta^+(z, \theta^+, \theta^-) = 0$ или $Q(z, \theta^+, \theta^-) = 0$, $\Delta^-(z, \theta^+, \theta^-) = 0$ (3.41)–(3.44), действующие в касательном пространстве как $T\mathbb{C}^{1|1} \to T\mathbb{C}^{0|2}$ назовем сплетающими четность (касательного пространства) $N = 2$ преобразованиями* (TPt — *twisting parity of tangent space transformations*).

Происхождение этого определения ясно из выражения для четной производной

$$\partial = \partial\tilde{\theta}^+_{TPt\pm} \cdot \tilde{D}^- + \partial\tilde{\theta}^-_{TPt\pm} \cdot \tilde{D}^+, \tag{3.128}$$

следующего из (3.124) и (3.126) (ср. SCf (3.66)), а также из TPt формул для четного дифференциала (3.125) и (3.127) (ср. $N = 1$ (2.130)–(2.132)).

По аналогии с $N = 2$ суперконформными дифференциалами (3.67), которые дуальны суперпроизводным $D^\pm$ в смысле формулы (3.64), определим $N = 2$ TPt дифференциалы, исходя из (3.124) следующим образом (ср. $N = 1$ (2.140)).

Определение 3.27. *Назовем $N = 2$ TPt супердифференциалами с кручением четности такие объекты $d\tau_{TPt\pm}$, которые преобразуются при сплетающих четность преобразованиях $Z \to \tilde{Z}$ (см.* **Определение 3.26**) *по закону*

$$\left(\begin{array}{cc} d\tilde{\tau}^{even+}_{TPt\pm} & d\tilde{\tau}^{even-}_{TPt\pm} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} d\tau^{odd}_{TPt\pm} & d\tau^{even\pm}_{TPt\pm} \end{array} \right) \cdot \mathcal{R}_{TPt\pm}, \tag{3.129}$$

где полуматрицы $\mathcal{R}_{TPt\pm}$ определены в (3.27).

В явном виде имеем

$$d\tilde{\tau}^{even+}_{TPt\pm} = d\tau^{odd}_{TPt\pm} \cdot \partial\tilde{\theta}^{+}_{TPt\pm} + d\tau^{even\pm}_{TPt\pm} \cdot D^{\pm}\tilde{\theta}^{+}_{TPt\pm}, \tag{3.130}$$

$$d\tilde{\tau}^{even-}_{TPt\pm} = d\tau^{odd}_{TPt\pm} \cdot \partial\tilde{\theta}^{-}_{TPt\pm} + d\tau^{even\pm}_{TPt\pm} \cdot D^{\pm}\tilde{\theta}^{-}_{TPt\pm}. \tag{3.131}$$

Замечание **3.28.** Четности $d\tilde{\tau}^{even+}_{TPt\pm}$, $d\tilde{\tau}^{even-}_{TPt\pm}$, $d\tau^{even+}_{TPt\pm}$ и $d\tau^{odd-}_{TPt\pm}$ противоположны, поэтому в кокасательном пространстве мы имеем отображение с кручением четности $T^*\mathbb{C}^{1|1} \to T^*\mathbb{C}^{2|0}$ (ср. *Замечание* **3.25**).

По аналогии с суперконформным случаем (3.68) определим внешние $\mathsf{TPt}^{\pm}$ дифференциалы

$$\delta_{TPt+} = d\tau^{odd}_{TPt+} \cdot \partial + d\tau^{even+}_{TPt+} \cdot D^{-}. \tag{3.132}$$

$$\delta_{TPt-} = d\tau^{odd}_{TPt-} \cdot \partial + d\tau^{even-}_{TPt-} \cdot D^{+}. \tag{3.133}$$

$$\tilde{\delta}_{TPt\pm} = d\tilde{\tau}^{even+}_{TPt\pm} \cdot \tilde{D}^{-} + d\tilde{\tau}^{even-}_{TPt\pm} \cdot \tilde{D}^{+}. \tag{3.134}$$

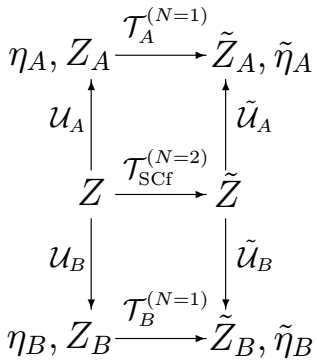
Замечание **3.29.** Четность внешних $N = 2$ TPt дифференциалов (3.132)–(3.134) фиксирована, они — нечетны при любых сплетающих четность преобразованиях.

Предложение 3.30. *Внешние $N = 2$ TPt дифференциалы инвариантны относительно $N = 2$ TPt преобразований.*

Доказательство. Из определений (3.132)–(3.134) и законов преобразования (3.124), (3.126) и (3.129) имеем, например, для TPt^{+} преобразований

$$\delta_{TPt+} = \begin{pmatrix} d\tau^{odd}_{TPt\pm} & d\tau^{even\pm}_{TPt\pm} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \partial \\ D^{-} \end{pmatrix} =$$

Тогда легко видеть, что диграмма преобразований



(3.142)

коммутативна.

Важно отметить фундаментальные равенства

$$H_A(z_A, \theta_A) = \mathrm{Ber}^{N=1}\left(\tilde{Z}_A / Z_A\right), \tag{3.143}$$

$$\Phi_A(z_A, \theta_A) = \frac{\dfrac{\partial F_A(z_A, \theta_A)}{\partial \theta_A}}{\dfrac{\partial \Psi_A(z_A, \theta_A)}{\partial \theta_A}}, \tag{3.144}$$

(и аналогичные для $A \to B$), которые следуют непосредственно из $N = 2$ SCf условий и требования ковариантности преобразования дифференциалов $dZ = dz + \theta^+ d\theta^- + \theta^- d\theta^+ = dz_A + \eta_A d\theta_A = dz_B + \eta_B d\theta_B$.

В обратимом случае, если использовать преобразования $\mathcal{T}_{SCf}^{(N=2)}$ как функции перехода на $N = 2$ суперримановой поверхности, а преобразования $\mathcal{T}_A^{(N=1)}$ и $\mathcal{T}_B^{(N=1)}$ — как функции перехода для $(1|1)$ мерных супермногообразий, то получаем

Утверждение 3.33. *Каждой $N = 2$ суперримановой поверхности без твиста соответствует пара дуальных $(1|1)$-мерных супермногообразий, компонентные функции перехода которых (см. (2.2)) равны*

$$f_A(z) = f_B(z) = f(z) + \psi_+(z)\,\psi_-(z), \tag{3.145}$$

$$g_A(z) = g_{+-}(z), \qquad g_B(z) = g_{-+}(z), \tag{3.146}$$

$$\tilde{A}_A(z) = \sqrt{2}\tilde{A}_+(z); \qquad \tilde{A}_B(z) = \sqrt{2}\tilde{A}_i(z); \tag{3.147}$$

$$\hat{A}_A(z) = \sqrt{2}\tilde{A}_i(z)\,g_{+i}(z); \quad \hat{A}_A(z) = \sqrt{2}\tilde{A}_+(z)\,g_{i+}(z): \tag{3.148}$$

Доказательство. Следует из вида преобразований (3.138)–(3.141). ¥

Отсюда можно получить

Предложение 3.34. *Компонентные функции дуальных* $N = 1$ *преобразований* (*и функции перехода дуальных* $(1|1)$ *супермногообразий*) *связаны между собой соотношениями*

$$f^0_A(z) = f^0_B(z) = g_A(z)\,g_B(z) + \tilde{A}^0_A(z)\,\tilde{A}_B(z); \tag{3.149}$$

$$\hat{A}_A(z) = g_A(z)\,\tilde{A}_B(z); \tag{3.150}$$

$$\hat{A}_B(z) = g_B(z)\,\tilde{A}_A(z): \tag{3.151}$$

Доказательство. Следует непосредственно из (3.135)–(3.136) и выражений (3.145)–(3.148). ¥

Рассмотрим расщепленные дуальные $N = 1$ преобразования, которые не содержат нечетных компонентных функций.

Утверждение 3.35. *Березинианы расщепленных дуальных преобразований взаимообратны относительно* $f^0(z)$.

Доказательство. По общей формуле для березиниана $N = 1$ супераналитических преобразований (e.13) имеем

$$\mathrm{Ber}^{N=1}\left(Z_A/Z_A'\right) = \frac{f^0_A(z)}{g_A(z)}; \quad \mathrm{Ber}^{N=1}\left(Z_B/Z_B'\right) = \frac{f^0_B(z)}{g_B(z)};$$

тогда, пользуясь (3.149) и (3.145), получаем

$$\mathrm{Ber}^{N=1}\left(Z_A/Z_A'\right)\,\mathrm{Ber}^{N=1}\left(Z_B/Z_B'\right) =$$

удобном для дальнейших редукций виде (ср. (3.6))

$$\mathrm{P}_{SA}^{(N=4)} = \begin{pmatrix} Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) & \partial\tilde{\theta}_1^+ & \partial\tilde{\theta}_1^- & \partial\tilde{\theta}_2^+ & \partial\tilde{\theta}_2^- \\ \Delta_1^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) & & & & \\ \Delta_1^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) & & \mathrm{H} & & \\ \Delta_2^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) & & & & \\ \Delta_2^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) & & & & \end{pmatrix}, \tag{3.162}$$

где

$$Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) = \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}_i^+ \cdot \tilde{\theta}_i^- - \partial\tilde{\theta}_i^- \cdot \tilde{\theta}_i^+, \tag{3.163}$$

$$\Delta_i^{\pm}\left(z,\theta_k^+,\theta_k^-\right) = D_i^{\pm}\tilde{z} - D_i^{\pm}\tilde{\theta}_j^- \cdot \tilde{\theta}_j^+ - D_i^{\pm}\tilde{\theta}_j^+ \cdot \tilde{\theta}_j^-, \tag{3.164}$$

а 4×4 матрица H имеет блочный вид

$$\mathrm{H} = \begin{pmatrix} \mathrm{H}_{11} & \mathrm{H}_{12} \\ \mathrm{H}_{21} & \mathrm{H}_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathrm{H}_{ij} = \begin{pmatrix} D_j^-\tilde{\theta}_i^+ & D_j^-\tilde{\theta}_i^- \\ D_j^+\tilde{\theta}_i^+ & D_j^+\tilde{\theta}_i^- \end{pmatrix}. \tag{3.165}$$

Березиниан общих $N = 4$ супераналитических преобразований $Z\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) \to \tilde{Z}\left(\tilde{z},\tilde{\theta}_i^+,\tilde{\theta}_i^-\right)$ определяется как [30]

$$\mathrm{Ber}^{\,N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_0^{(N=4)}, \tag{3.166}$$

где $\mathrm{P}_0^{(N=4)}$ — это 5×5 суперматрица производных, аналогичная 3×3 $N=2$ суперматрице (E.36).

Для $N = 4$ имеет место также подобное **Предложению E.12** следующее

Предложение 3.38. $\mathrm{Ber}^{\,N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=4)}$.

Доказательство. Основывается на $N = 4$ аналоге формулы (E.38), но для 5×5 суперматриц. ■

Тогда в случае $\epsilon\left[\det \mathrm{H}\right] \neq 0$, для березиниана $N=4$ супераналитических преобразований получаем

$$\mathrm{Ber}^{N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=4)} =$$

$$Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) - \left(\partial\tilde{\theta}_1^+ \;\; \partial\tilde{\theta}_1^- \;\; \partial\tilde{\theta}_2^+ \;\; \partial\tilde{\theta}_2^-\right)\cdot \mathrm{H}^{-1}\cdot \frac{\begin{pmatrix} \Delta_1^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) \\ \Delta_1^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) \\ \Delta_2^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) \\ \Delta_2^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) \end{pmatrix}}{\det \mathrm{H}}. \quad (3.167)$$

Легко видеть, что (при условии $\epsilon\left[\det \mathrm{H}\right] \neq 0$)

$$\epsilon\left[\mathrm{Ber}^{N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right)\right] = \epsilon\left[Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)\right], \quad (3.168)$$

поскольку остальные слагаемые в числителе (3.167) не имеют числовой части по их определению. Отсюда следует классификация по необратимости общих $N=4$ супераналитических преобразований.

Определение 3.39. *Обратимые $N=4$ супераналитические преобразования определяются условиями*

$$\epsilon\left[Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)\right] \neq 0,\ \epsilon\left[\det \mathrm{H}\right] \neq 0. \quad (3.169)$$

Определение 3.40. *Полунеобратимые $N=4$ супераналитические преобразования определяются условиями*

$$\epsilon\left[Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)\right] = 0,\ \epsilon\left[\det \mathrm{H}\right] \neq 0. \quad (3.170)$$

Определение 3.41. *Необратимые $N=2$ супераналитические пре-*

Определение 3.45. *Каждое из четырех полунеобратимых и необратимых $N = 4$ редуцированных сплетающих четность*[*)] *касательного пространства преобразований определяется четырьмя условиями*

1) TPt_1^-:

$$
\begin{aligned}
Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}_i^+\cdot\theta_i^- - \partial\tilde{\theta}_i^-\cdot\theta_i^+ = 0, && (3.186)\\
\Delta_1^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_1^-\tilde{z} - D_1^-\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_1^-\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0 && (3.187)\\
\Delta_2^\pm\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_2^\pm\tilde{z} - D_2^\pm\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_2^\pm\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0. && (3.188)
\end{aligned}
$$

2) TPt_1^+:

$$
\begin{aligned}
Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}_i^+\cdot\theta_i^- - \partial\tilde{\theta}_i^-\cdot\theta_i^+ = 0, && (3.189)\\
\Delta_1^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_1^+\tilde{z} - D_1^+\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_1^+\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0 && (3.190)\\
\Delta_2^\pm\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_2^\pm\tilde{z} - D_2^\pm\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_2^\pm\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0. && (3.191)
\end{aligned}
$$

3) TPt_2^-:

$$
\begin{aligned}
Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}_i^+\cdot\theta_i^- - \partial\tilde{\theta}_i^-\cdot\theta_i^+ = 0, && (3.192)\\
\Delta_2^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_2^-\tilde{z} - D_2^-\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_2^-\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0 && (3.193)\\
\Delta_1^\pm\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_1^\pm\tilde{z} - D_1^\pm\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_1^\pm\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0. && (3.194)
\end{aligned}
$$

4) TPt_2^+:

$$
\begin{aligned}
Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}_i^+\cdot\theta_i^- - \partial\tilde{\theta}_i^-\cdot\theta_i^+ = 0, && (3.195)\\
\Delta_2^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_2^+\tilde{z} - D_2^+\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_2^+\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0 && (3.196)\\
\Delta_1^\pm\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) &= D_1^\pm\tilde{z} - D_1^\pm\tilde{\theta}_i^-\cdot\tilde{\theta}_i^+ - D_1^\pm\tilde{\theta}_i^+\cdot\tilde{\theta}_i^- = 0. && (3.197)
\end{aligned}
$$

Примечание. Причина такого названия будет пояснена ниже (для $N = 2$ сплетающих четность преобразований см. **Пункт 3.1.6**).

Из (3.184)–(3.197) видно, что число уравнений во всех случаях одинаково и равно 4.

Определение 3.46. *Назовем условия* (3.184)–(3.185) SCf *условиями, условия* (3.186)–(3.187) — TPt_1^- *условиями,* (3.189)–(3.190) — TPt_1^+ *условиями,* (3.192)–(3.193) — TPt_2^- *условиями и* (3.195)–(3.197) — TPt_2^+ *условиями.*

Любой из этих индексов будет означать применение соответствующего условия к рассматриваемому объекту.

Найдем связь между функциями $Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)$ и $\Delta_k^{\pm}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)$. Для этого продифференцируем $\Delta_k^{\pm}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)$ и применим условия суперсимметрии (3.155), тогда получим

$$Q\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)-\frac{D_k^+\Delta_k^-\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)+D_k^-\Delta_k^+\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)}{4}=$$

$$\frac{\operatorname{per}\mathrm{H}_{11}+\operatorname{per}\mathrm{H}_{12}+\operatorname{per}\mathrm{H}_{21}+\operatorname{per}\mathrm{H}_{22}}{2}, \tag{3.198}$$

(ср. (3.22)).

Исходя из условий редукции (3.184)–(3.197), определим 5 редуцированных суперматриц $(1|4)$ касательного пространства

$$\mathrm{P}_{SCf}^{(N=4)}=\begin{pmatrix} Q_{SCf}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right) & \partial\tilde{\theta}_{1(SCf)}^+ & \partial\tilde{\theta}_{1(SCf)}^- & \partial\tilde{\theta}_{2(SCf)}^+ & \partial\tilde{\theta}_{2(SCf)}^- \\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathrm{H}_{SCf} & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}, \tag{3.199}$$

$$\mathrm{P}_{TPt_1^+}^{(N=4)}=$$

$$\begin{pmatrix} & 0 & \partial\tilde{\theta}^{+}_{1\left(TPt_1^{+}\right)} & \partial\tilde{\theta}^{-}_{1\left(TPt_1^{+}\right)} & \partial\tilde{\theta}^{+}_{2\left(TPt_1^{+}\right)} & \partial\tilde{\theta}^{-}_{2\left(TPt_1^{+}\right)} \\ \Delta^{-} & & & & & \end{pmatrix}$$

Кроме того, из SCf условий следует

$$\operatorname{per} \mathrm{H}_{11}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{12}^{SCf} = \operatorname{per} \mathrm{H}_{21}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{22}^{SCf}, \tag{3.217}$$

поэтому вместо (3.210) имеем

$$Q_{SCf}\left(z, \theta_i^+, \theta_i^-\right) = \operatorname{per} \mathrm{H}_{11}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{12}^{SCf} = \operatorname{per} \mathrm{H}_{21}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{22}^{SCf}. \tag{3.218}$$

Замечание **3.49.** Уравнения (3.213)–(3.217) совпадают с условиями того, что матрица H_{SCf} после нормировки на $\sqrt{\operatorname{per} \mathrm{H}_{11}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{12}^{SCf}}$ (при условии $\epsilon\left[\operatorname{per} \mathrm{H}_{11}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{12}^{SCf}\right] \neq 0$) подобна ортогональной матрице $O_{\Lambda_0}(4)$ (см. **Подраздел 5.1**).

Для березиниана $N = 4$ SCf преобразований (при $\epsilon\left[\det \mathrm{H}_{SCf}\right] \neq 0$) получаем [2]

$$\operatorname{Ber}_{SCf}^{N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \frac{\operatorname{per} \mathrm{H}_{11}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{12}^{SCf}}{\det \mathrm{H}_{SCf}} = \frac{\operatorname{per} \mathrm{H}_{21}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{22}^{SCf}}{\det \mathrm{H}_{SCf}}. \tag{3.219}$$

(ср. $N = 2$ (3.74)).

Из формул (3.213)–(3.215) следует , что матрица H_{SCf} является $N = 4$ scf-матрицей согласно **Определению 5.20**, т. е. $\mathrm{G} \in SCF_{\Lambda_0}(4)$ (см. **Пункт 5.1**). Поэтому детерминант H_{SCf} выражается через перманенты ее блоков (см. общую формулу (5.52))

$$\det \mathrm{H}_{SCf} = k\left(\operatorname{per} \mathrm{H}_{11}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{12}^{SCf}\right)^2 = k\left(\operatorname{per} \mathrm{H}_{21}^{SCf} + \operatorname{per} \mathrm{H}_{22}^{SCf}\right)^2. \tag{3.220}$$

Тогда для березиниана $N = 4$ SCf преобразований окончательно

получаем

$$\mathrm{Ber}\,{}^{N=4}_{SCf}\left(\tilde{Z}/Z\right)=\frac{k}{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{11}^{SCf}+\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{12}^{SCf}}=\frac{k}{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{21}^{SCf}+\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{22}^{SCf}},\qquad(3.221)$$

где $k=\pm 1$ (ср. $N=2$ (3.76)) и здесь подразумевается выполненными условия обратимости

$$\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{11}^{SCf}+\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{12}^{SCf}\right]\neq 0,\ \ \epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{21}^{SCf}+\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{22}^{SCf}\right]\neq 0.\qquad(3.222)$$

В этом случае между матричными функциями блоков H_{ij}^{SCf} имеются соотношения (ср. (3.74))

$$\frac{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{11}^{SCf}}{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{21}^{SCf}}=\frac{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{22}^{SCf}}{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{12}^{SCf}},\qquad(3.223)$$

$$\frac{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{ij}^{SCf}}{\det\mathrm{H}_{ij}^{SCf}}=\frac{\det\mathrm{H}_{ij}^{SCf}}{\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{ij}^{SCf}},\qquad(3.224)$$

$$\det\mathrm{H}_{11}^{SCf}=k\det\mathrm{H}_{22}^{SCf},\qquad(3.225)$$

$$\det\mathrm{H}_{12}^{SCf}=k\det\mathrm{H}_{21}^{SCf}.\qquad(3.226)$$

Полезно также выразить березиниан (3.221) через детерминант матрицы H_{SCf} по формуле (при $\epsilon\left[\det\mathrm{H}_{SCf}\right]\neq 0$)

$$\mathrm{Ber}\,{}^{N=4}_{SCf}\left(\tilde{Z}/Z\right)=\frac{k}{\sqrt{\det\mathrm{H}_{SCf}}}.\qquad(3.227)$$

Отсюда следует

Утверждение 3.50. *Общее выражение для березиниана* SCf *преобра-*

зований при произвольных N имеет следующий вид

$$\mathrm{Ber}_{SCf}\left(\tilde{Z}/Z\right) = k\left(\det \mathrm{H}_{SCf}\right)^{\frac{2-N}{N}}. \tag{3.228}$$

Как и в $N = 2$ (3.76), величина k отличает между собой подгруппу $SO_{\Lambda_0}(4)$ ($\cong U_{\Lambda_0}(2)$) преобразований касательного пространства ($k = +1$) и общую $O_{\Lambda_0}(4)$ группу ($k = -1$) (в обратимом случае) [565, 668].

Замечание **3.51.** Из-за соотношений (3.220)–(3.226) при $N = 4$ не имеется полунеобратимых SCf преобразований (3.170).

Таким образом, мы приходим к следующей классификации $N = 4$ преобразований, удовлетворяющих SCf условиям (3.184)–(3.185):

1. Обратимые $N = 4$ суперконформные преобразования, удовлетворяющие условиям обратимости (3.222).

а) $SO_{\Lambda_0}(4)$ преобразования с $k = +1$;

б) $O_{\Lambda_0}(4)$ преобразования с $k = -1$.

2. Необратимые $N = 4$ SCf преобразования, удовлетворяющие соотношению $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{i1}^{SCf} + \mathrm{per}\,\mathrm{H}_{i2}^{SCf}\right] = 0$.

Относительно $N = 4$ SCf преобразований дифференциал dZ преобразуется однородно, как это следует из (3.159), (3.199) и (3.218)

$$d\tilde{Z} = dZ \cdot \left(\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{11}^{SCf} + \mathrm{per}\,\mathrm{H}_{12}^{SCf}\right) \tag{3.229}$$

(ср. $N = 2$ (3.65)). Используя (3.221), получаем

$$d\tilde{Z} = \frac{kdZ}{\mathrm{Ber}_{SCf}^{N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right)}, \tag{3.230}$$

откуда следует определение N-SCf преобразований через (обратимый)

что суперпроизводные $D_i^{\pm}$ не меняют киральность, т. е.

$$D_1^{\pm} = D_1^{\pm}\tilde{\theta}_1^{\mp}\cdot\tilde{D}_1^{\pm} + D_1^{\pm}\tilde{\theta}_2^{\mp}\cdot\tilde{D}_2^{\pm}, \tag{3.236}$$

$$D_2^{\pm} = D_2^{\pm}\tilde{\theta}_1^{\mp}\cdot\tilde{D}_1^{\pm} + D_2^{\pm}\tilde{\theta}_2^{\mp}\cdot\tilde{D}_2^{\pm}. \tag{3.237}$$

Это приводит к условиям на преобразования

$$D_i^{\pm}\tilde{\theta}_j^{\pm} = 0. \tag{3.238}$$

В нашем формализме условия (3.238) соответствуют тому, что все матрицы H_{ij}^{SCf} являются $N = 2$ scf-матрицами и в случае $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{H}_{ij}^{SCf}\right] \neq 0$ принадлежат группе $GSCF\,(2,\Lambda_0)$ (см. **Пункт 5.1**), а матрица H_{SCf} (3.165) имеет вид

$$\mathrm{H}_{SCf}^{chiral} = \begin{pmatrix} D_1^-\tilde{\theta}_1^+ & 0 & D_2^-\tilde{\theta}_1^+ & 0 \\ 0 & D_1^+\tilde{\theta}_1^- & 0 & D_2^+\tilde{\theta}_1^- \\ D_1^-\tilde{\theta}_2^+ & 0 & D_2^-\tilde{\theta}_2^+ & 0 \\ 0 & D_1^+\tilde{\theta}_2^- & 0 & D_2^+\tilde{\theta}_2^- \end{pmatrix}. \tag{3.239}$$

В инфинитезимальном виде такие преобразования используются для описания $SU(2)$ расширенных суперконформных алгебр [668].

В наиболее общем случае выберем в качестве условий киральности следующие [2]

$$D_i^n\tilde{\theta}_j^{m_{ij}} = 0, \tag{3.240}$$

где $n, m_{ij} = \pm$ и по i, j нет суммирования*).

Тогда закон преобразования суперпроизводных запишется в виде

Примечание. Только в этой формуле.

$$D_i^n = D_i^n \tilde{\theta}_j^{-m_{ij}} \cdot \tilde{D}_j^{m_{ij}}. \tag{3.241}$$

Решением условий (3.240) является следующая параметризация нечетного сектора 16 четными и 8 нечетными функциями [2]

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}_1^n &= \psi_1^n\left(Z^{m_{11},m_{12}}\right) + \theta_1^{m_{11}} g_{11}^{n,-m_{11}}\left(Z^{m_{11},m_{12}}\right) + \\
&\quad \theta_2^{m_{12}} g_{12}^{n,-m_{12}}\left(Z^{m_{11},m_{12}}\right) + \theta_1^{m_{11}}\theta_2^{m_{12}}\lambda_1^n\left(Z^{m_{11},m_{12}}\right), \qquad (3.242)\\
\tilde{\theta}_2^n &= \psi_2^n\left(Z^{m_{21},m_{22}}\right) + \theta_1^{m_{21}} g_{21}^{n,-m_{21}}\left(Z^{m_{21},m_{22}}\right) + \\
&\quad \theta_2^{m_{22}} g_{22}^{n,-m_{22}}\left(Z^{m_{21},m_{22}}\right) + \theta_1^{m_{21}}\theta_2^{m_{22}}\lambda_2^n\left(Z^{m_{21},m_{22}}\right), \qquad (3.243)
\end{aligned}$$

где $Z^{a,b} = z + \theta_1^a\theta_1^{-a} + \theta_2^b\theta_2^{-b}$, $a, b = \pm$.

Здесь при $m_{ij} = n$ киральность суперпроизводных сохраняется, и мы получаем предыдущий случай (3.236)–(3.239). Для простоты ограничимся в дальнейшем рассмотрением лишь киральных обратимых и необратимых конечных $N = 4$ SCf преобразований, поскольку остальные варианты формально отличаются только соответствующей перестановкой индексов.

Утверждение 3.60. *Киральные $N = 4$ SCf преобразования образуют подполугруппу $N = 4$ SCf полугруппы* (*см.* **Определение 3.56**).

Доказательство. Следует из поведения $N = 4$ суперпроизводных (3.241) при композиции двух SCf преобразований, когда киральность сохраняется $m_{ij} = n$. ■

Отметим также, что различные подполугруппы образуют также преобразования с матрицей H_{SCf}, у которой число антидиагональных блочных матриц является четным (см. (Ж.60)).

Применение SCf условий (3.184)–(3.185) к параметризации (3.242)–(3.243) приводит к тому, что, как и в расщепленном случае, матрица G (Ж.47)–(Ж.49) становится $N = 4$ scf-матрицей, т. е. $\mathrm{G} \in SCF(4, \Lambda_0)$

(см. **Подраздел 5.1**). Следовательно, для нее выполняются условия (v .44)–(v .45). Однако, дифференциальные условия на элементы матрицы G

и выполняется условие (3.248).

Если воспользоваться решением (3.249), то получаем параметризацию необратимых преобразований 4 нечетными функциями

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= f(z) + \left(\theta_1^+\theta_1^- + \theta_2^+\theta_2^-\right)\left[\psi_1^+(z)\,\psi_1^-(z) + \psi_2^+(z)\,\psi_2^-(z)\right]' - \qquad (3.259)\\
&\quad 2\theta_1^+\theta_2^+\left[\psi_1^-(z)\,\psi_2^-(z)\right]' - 2\theta_1^-\theta_2^-\left[\psi_1^+(z)\,\psi_2^+(z)\right] + \theta_1^+\theta_1^-\theta_2^+\theta_2^- f''(z),\\
\tilde{\theta}_1^{\pm} &= \psi_1^{\pm}\left(Z^{\pm}\right) + 2\theta_1^{\pm}\theta_2^{\pm}\psi_2^{\mp}\left(Z^{\pm}\right), \qquad (3.260)\\
\tilde{\theta}_2^{\pm} &= \psi_2^{\pm}\left(Z^{\pm}\right) + 2\theta_2^{\pm}\theta_1^{\pm}\psi_1^{\mp}\left(Z^{\pm}\right), \qquad (3.261)
\end{aligned}$$

где $f(z)$ дается в (3.258).

Отметим, что уравнение (3.248) имеет и другое решение

$$\psi_1^{\pm}(z) = \psi_2^{\mp}(z) = \psi^{\pm}(z), \quad \lambda_1^{\pm}(z) = \lambda_2^{\mp}(z) = \lambda^{\pm}(z). \qquad (3.262)$$

Тогда из (3.255)–(3.257) вместо (3.259)–(3.261) имеем

$$\begin{aligned}
\tilde{z} &= f(z) + 2\left(\theta_1^+\theta_2^+ - \theta_1^-\theta_2^-\right)\left[\lambda^+(z)\,\psi^-(z) + \psi^+(z)\,\lambda^-(z)\right] +\\
&\quad \theta_1^+\theta_1^-\theta_2^+\theta_2^- f''(z), \qquad (3.263)\\
\tilde{\theta}_1^{\pm} &= \psi^{\pm}\left(Z^{\pm}\right) + \theta_1^{\pm}\theta_2^{\pm}\lambda^{\pm}\left(Z^{\pm}\right), \qquad (3.264)\\
\tilde{\theta}_2^{\pm} &= \psi^{\mp}\left(Z^{\pm}\right) + \theta_2^{\pm}\theta_1^{\pm}\lambda^{\mp}\left(Z^{\pm}\right), \qquad (3.265)
\end{aligned}$$

где $f'(z) = 2\left[\psi^{+\prime}(z)\,\psi^-(z) + \psi^{-\prime}(z)\,\psi^+(z)\right]$.

Если матрица G отлична от нуля, но содержит нильпотентные элементы, то одним из вариантов решения жесткого смешанного ограничения (3.246)–(3.247) является выбор элементов ее в виде $g_{ij}^{\pm\mp}(z) = \psi_i^{\mp\prime}(z)\,\psi_j^{\pm\prime}(z)$. Тогда SCf условия (3.244)–(3.247) выполняются за счет нильпотентности функций $\psi_i^{\pm}(z)$. В общем, количество различных типов необратимых преобразований велико и их таблица умножений, к со-

$N=2$ TPt дифференциалов), фиксирована, они — нечетны при $N=4$ сплетающих четность преобразованиях.

Предложение 3.68. *Внешние* $N=4$ TPt *дифференциалы "инвариантны" относительно соответствующих* $N=4$ TPt *преобразований.*

Доказательство. Рассмотрим только TPt_1^+ преобразования. Из законов преобразования (3.266), (3.270) и определений (3.271)–(3.272) получаем

$$\delta_{TPt_1^+}=\left(\begin{array}{cccc} d\tau^{odd}_{\left(TPt_1^+\right)} & d\tau^{even-}_{1\left(TPt_1^+\right)} & d\tau^{even+}_{2\left(TPt_1^+\right)} & d\tau^{even-}_{2\left(TPt_1^+\right)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\partial\\ D_1^+\\ D_2^-\\ D_2^+\end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{cccc} d\tau^{odd}_{\left(TPt_1^+\right)} & d\tau^{even-}_{1\left(TPt_1^+\right)} & d\tau^{even+}_{2\left(TPt_1^+\right)} & d\tau^{even-}_{2\left(TPt_1^+\right)}\end{array}\right)\mathcal{R}^{(N=4)}_{TPt_1^+}\left(\begin{array}{c}\tilde{D}_1^-\\ \tilde{D}_1^+\\ \tilde{D}_2^-\\ \tilde{D}_2^+\end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{cccc} d\tilde{\tau}^{even+}_{1\left(TPt_1^+\right)} & d\tilde{\tau}^{even-}_{1\left(TPt_1^+\right)} & d\tilde{\tau}^{even+}_{2\left(TPt_1^+\right)} & d\tilde{\tau}^{even-}_{2\left(TPt_1^+\right)}\end{array}\right)\left(\begin{array}{c}\tilde{D}_1^-\\ \tilde{D}_1^+\\ \tilde{D}_2^-\\ \tilde{D}_2^+\end{array}\right)=\tilde{\delta}_{TPt_1^+}.$$

И аналогично для остальных типов $\mathsf{TPt}_i^{\pm}$ преобразований. ■

Полученные соотношения дают возможность построения $N=4$ расслоений с кручением четности (см. для $N=2$ **Пункт 3.1.6**).

Используя (E.42) и теорему сложения $N=4$ березинианов (3.172), можно трактовать $N=4$ преобразования следующим образом.

Предположение 3.69. *Если считать* $N=4$ SCf *преобразования* $N=4$ *супераналогом обычных голоморфных преобразований* [563, 565]*, то для антиголоморфных преобразований, в отличие от* $N=1$ (*см.* **Под-**

раздел 2.3), *имеется четыре* (!) *нечетных супераналога: редуцированные* $\mathsf{TPt}_1^{\pm}$ *и* $\mathsf{TPt}_2^{\pm}$ *преобразования.*

Из приведенных построений для частных случаев $N = 2$ и $N = 4$ следует ожидать, что в общем случае произвольных N имеет место следующее

Предположение 3.70. *При ослаблении требования обратимости для редуцированных* N *преобразований имеется 1 четный супераналог голоморфных преобразований и* N *нечетных супераналогов антиголоморфных преобразований.*

3.3. Основные результаты и выводы

1. Подробно исследованы все редукции в расширенной суперконформной геометрии с учетом необратимости и проведена их классификация.
2. Альтернативная параметризация введена и использована для построения $N = 2$ и $N = 4$ суперконформных полугрупп.
3. Обобщается на произвольное N понятие комплексной структуры на суперплоскости: имеется 1 супераналог голоморфных преобразований и N необратимых супераналогов антиголоморфных преобразований.
4. Найдено, что переключение типа преобразования производится проекцией введенного спина редукции, который равен $N/2$.
5. Рассмотрены расщепленные N расширенные преобразования и для них построена полугруппа и компонентное представление в альтернативной параметризации.
6. Получена общие формулы для березинианов редуцированных преобразований через перманенты и полуминоры.

7. Изучены сплетающие четность N расширенные преобразования и получены компонентные представления.

8. Введены сплетающие четность дифференциалы как аналог супердифференциалов на суперримановых поверхностях.

9. Построены дуальные преобразования с половинным количеством суперсимметрий, подробно исследован случай $N = 2$.

10. Рассмотрены вложения $N = 1 \hookrightarrow N = 2$ и получены аналитические формулы для обратимого и необратимого случаев.

РАЗДЕЛ 4

СУПЕРМАТРИЧНЫЕ ПОЛУГРУППЫ, ИДЕАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ И РЕДУКЦИИ

Данный раздел посвящен исследованию идеальных свойств суперматриц и построению суперматричных полугрупп, важных с точки зрения их приложений к суперструнным теориям и к феноменологии суперсимметричных моделей элементарных частиц. Рассматриваются общие свойства и классифицируются возможные редукции суперматриц, вводится понятие нечетно-редуцированных суперматриц и показывается их существенная роль как новой категории в изучении суперматричных подструктур. Формулируется теорема сложения березинианов, в рамках которой видна дуальная роль нечетно-редуцированных суперматриц по отношению к четно-редуцированным (треугольным). Оба типа суперматриц объединяются в различные сэндвич-полугруппы с необычными свойствами. Вводятся новые типы супермодулей — нечетные супермодули, нечетное антитранспонирование, представления странной супералгебры Березина. Рассматривается прямая сумма редуцированных суперматриц, где определяются нечетные аналоги собственных чисел и характеристических функций, сформулирована обобщенная теорема Гамильтона-Якоби.

Подробно анализируется идеальная структура многопараметрических полугрупп нечетно-редуцированных суперматриц. Изучаются непрерывные представления полугрупповых связок нечетно-редуцированными суперматрицами антитреугольного вида и вводится новый тип связок — скрученная прямоугольная связка. Для высших связок определяются обобщения отношений Грина — тонкие и смешанные отноше-

Замечание **4.3.** Причина обозначений происходит из нильпотентности березиниана $\mathrm{Ber}\,\mathrm{T}$ и из того факта, что четно-редуцированные суперматрицы S отвечают суперконформным преобразованиям, которые описывают морфизмы касательного расслоения над суперримановыми поверхностями [367], тогда как нечетно-редуцированные суперматрицы T приводят к преобразованиям, сплетающим четность касательного суперпространства $T\mathbb{C}^{1|1}$ в стандартном базисе (см. [1, 13] и **Подраздел 2.3.2**).

Утверждение 4.4. *Множество* $\boldsymbol{\mathcal{M}}$ *представляет собой прямую сумму диагональных* $\boldsymbol{\mathcal{D}}$ *и анти-диагональных* $\boldsymbol{\mathcal{A}}$ *суперматриц* (*четные и нечетные суперматрицы в обозначениях* [30])

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}{=}\boldsymbol{\mathcal{D}} \oplus \boldsymbol{\mathcal{A}}, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D} &\equiv \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{D}} \equiv \mathrm{Mat}_{\Lambda}^{Diag}\,(1|1)\,, \\ \mathrm{A} &\equiv \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{pmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{A}} \equiv \mathrm{Mat}_{\Lambda}^{Adiag}\,(1|1)\,, \end{aligned}$$

где $\boldsymbol{\mathcal{D}} \subset \boldsymbol{\mathcal{S}}$, $\boldsymbol{\mathcal{A}} \subset \boldsymbol{\mathcal{T}}$.

Для редуцированных суперматриц находим

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} \cap \boldsymbol{\mathcal{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & b \end{pmatrix} \neq \varnothing. \tag{4.6}$$

Тем не менее, следующая теорема объясняет фундаментальную и дуальную роль четно-редуцированных суперматриц $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ и нечетно-редуцированных суперматриц $\boldsymbol{\mathcal{T}}$.

Теорема 4.5. (Теорема сложения березинианов) *Березинианы четно- и нечетно-редуцированных суперматриц являются аддитивными компонентами березиниана соответствующей нередуцированной суперматрицы*

$$\operatorname{Ber} \mathrm{M} = \operatorname{Ber} \mathrm{S} + \operatorname{Ber} \mathrm{T}. \tag{4.7}$$

Первое слагаемое в (4.7) покрывает все подгруппы четно-редуцированных суперматриц из $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(1|1)$, и только оно раньше рассматривалось в приложениях. Второе слагаемое в (4.7) дуально к первому в некотором смысле и соответствует нечетно- редуцированным суперматрицам из $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(1|1)$ (см. **Определение 4.2**).

Замечание **4.6.** Соотношение (4.7) представляет собой суперсимметричный вариант очевидного равенства $\det \mathrm{M}_{nonsusy} = \det \mathrm{D}_{nonsusy} + \det \mathrm{A}_{nonsusy}$, где $\mathrm{D}_{nonsusy}$ и $\mathrm{A}_{nonsusy}$ — обыкновенные диагональная и антидиагональная матрицы.

Однако дело в том, что, если A из (4.5) — суперматрица, то BerA не определен вообще [30].

Обозначим множество обратимых элементов из $\mathfrak{M}$ за $\mathfrak{M}^{inv}$, и их разность за $\mathfrak{J} = \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}^{inv}$. В [30] доказывается, что $\mathfrak{M}^{inv} = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M} \mid \epsilon(a) \neq 0 \wedge \epsilon(b) \neq 0\}$. Далее аналогично для редуцированных суперматриц

$$\mathfrak{S}^{inv} = \{\mathrm{S} \in \mathfrak{S} | \, \epsilon(a) \neq 0 \wedge \epsilon(b) \neq 0\}, \;\; \mathfrak{T}^{inv} = \varnothing, \tag{4.8}$$

т. е. получаем

Утверждение 4.7. *Нечетно-редуцированные суперматрицы $T \in \mathfrak{T}$ необратимы и $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{J}$.*

Идеальная структура (1|1)-суперматриц подробно изложена в **Приложении B.5**.

4.1.2. Мультипликативные свойства нечетно-редуцированных суперматриц. Нечетно-редуцированные суперматрицы не образуют полугруппу в общем случае, поскольку

$$\mathrm{T}_1\mathrm{T}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_1\beta_2 & \alpha_1 b_2 \\ b_1\beta_2 & b_1 b_2 + \beta_1\alpha_2 \end{pmatrix} \neq \mathrm{T}. \tag{4.9}$$

Однако,

$$\mathfrak{T} \star \mathfrak{T} \cap \mathfrak{T} \neq \varnothing \Rightarrow \alpha\beta = 0, \tag{4.10}$$

$$\mathfrak{T} \star \mathfrak{T} \cap \mathfrak{S} \neq \varnothing \Rightarrow \beta b = 0, \tag{4.11}$$

что может иметь место из-за наличия дивизоров нуля в Λ.

Предложение 4.8. 1) *Подмножество* $\mathfrak{T}^{SG} \subset \mathfrak{T}$ *нечетно-редуцированных суперматриц удовлетворяющих* $\alpha\beta = 0$ (4.10) *представляют нечетно-редуцированную подполугруппу* $\mathbf{T}^{SG} \stackrel{def}{=} \left\{\mathfrak{T}^{SG}; \cdot\right\}$ *полугруппы* $\mathbf{M}$.

2) *В нечетной-редуцированной подполугруппе* $\mathbf{T}^{SG}$ *подмножество суперматриц с* $\beta = 0$ *представляет собой левый идеал, и с* $\alpha = 0$ *представляет собой правый идеал, суперматрицы с* $b = 0$ *образуют двусторонний идеал.*

Другое условие $\beta b = 0$ (4.11) можно трактовать следующим образом.

Утверждение 4.9. *Подмножество* $\mathfrak{T}^{\sqrt{S}} \subset \mathfrak{T}$ *нечетно-редуцированных суперматриц удовлетворяющих* $\beta b = 0$ *представляет нечетную ветвь корня из четно-редуцированных суперматриц* $\mathfrak{S}$, *четная ветвь которого представляется всеми четно-редуцированными суперматрицами вследствие соотношения* $\mathfrak{S} \star \mathfrak{S} \subseteq \mathfrak{S}$.

4.1.3.

щие на $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}$ *как*

$$\begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix}^{\Upsilon_L} = \begin{pmatrix} \beta & b \\ a & \alpha \end{pmatrix}, \tag{4.18}$$

$$\begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix}^{\Upsilon_R} = \begin{pmatrix} \alpha & a \\ b & \beta \end{pmatrix}. \tag{4.19}$$

Следствие 4.17. *Антитранспонирования являются квадратными корнями оператора смены четности* $\mathbf{\Pi}$ *в следующем смысле*

$$\mathbf{\Upsilon}_L \mathbf{\Upsilon}_R = \mathbf{\Upsilon}_R \mathbf{\Upsilon}_L = \mathbf{\Pi}. \tag{4.20}$$

Интересно сравнить (4.20) с полутранспонированиями, введенными в **Пункте Д.2**, и аналогичной формулой (Д.18).

Утверждение 4.18. *Антитранспонирования удовлетворяют соотношениям*

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{M})^{\Upsilon_L} &= \chi\mathrm{M} \\ (\mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{M})^{\Upsilon_R} &= \chi\mathrm{M}^{\mathbf{\Pi}} \\ (\mathrm{M}\mathcal{E}(\chi))^{\Upsilon_L} &= \mathrm{M}^{\mathbf{\Pi}}\chi \\ (\mathrm{M}\mathcal{E}(\chi))^{\Upsilon_R} &= \mathrm{M}\chi \end{aligned} \tag{4.21}$$

Таким образом, конкретная реализация правого, левого и двустороннего обобщенных $\Lambda_0 \oplus \Lambda_1$- модулей в $\mathrm{Hom}_0\left(\mathbf{\Lambda}^{1|1}, \mathbf{\Lambda}^{1|1}\right)$ определяется новыми действиями

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{M} &= \chi\mathrm{M}^{\Upsilon_L}, \\ \mathrm{M}\mathcal{E}(\chi) &= \mathrm{M}^{\Upsilon_R}\chi, \\ \mathcal{E}(\chi_1)\,\mathrm{M}\mathcal{E}(\chi_2) &= \chi_1\mathrm{M}^{\mathbf{\Pi}}\chi_2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Можно сравнить эти выражения со стандартной структурой Λ-

модуля [106]

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(x)\,\mathrm{M} &= x\mathrm{M}, \\ \mathrm{ME}(x) &= \mathrm{M}x, \\ \mathrm{E}(x_1)\,\mathrm{ME}(x_2) &= x_1\mathrm{M}x_2. \end{aligned} \tag{4.23}$$

Следствие 4.19. *Обобщенные соотношения для* $\Lambda_0 \oplus \Lambda_1$*-модуля имеют следующий вид*

$$\begin{aligned} (\mathrm{E}(x)\,\mathrm{M})\,\mathrm{N} &= \mathrm{E}(x)\,(\mathrm{MN}) \\ (\mathrm{ME}(x))\,\mathrm{N} &= \mathrm{M}\,(\mathrm{E}(x)\,\mathrm{N}) \\ \mathrm{M}\,(\mathrm{NE}(x)) &= (\mathrm{MN})\,\mathrm{E}(x) \\ (\mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{M})\,\mathrm{N} &= \mathcal{E}(\chi)\,(\mathrm{MN}) \\ (\mathrm{M}\mathcal{E}(\chi))\,\mathrm{N} &= \mathrm{M}\,(\mathcal{E}(\chi)\,\mathrm{N}) \\ \mathrm{M}\,(\mathrm{N}\mathcal{E}(\chi)) &= (\mathrm{MN})\,\mathcal{E}(\chi) \end{aligned} \tag{4.24}$$

где $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathrm{Mat}_\Lambda(1|1)$.

Таким же образом определяются и величины, дуальные относительно четности.

Определение 4.20. *Нечетные скаляр и антискаляр определяются формулами*

$$\mathrm{E}(\chi) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} \chi & 0 \\ 0 & -\chi \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_1\left(\mathbf{\Lambda}^{1|1}, \mathbf{\Lambda}^{1|1}\right), \tag{4.25}$$

$$\mathcal{E}(x) \overset{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & x \\ x & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{Hom}_1\left(\mathbf{\Lambda}^{1|1}, \mathbf{\Lambda}^{1|1}\right). \tag{4.26}$$

Предложение 4.21. *Строение обобщенного* $\Lambda_0 \oplus \Lambda_1$*-модуля в* $\mathrm{Hom}_1\left(\mathbf{\Lambda}^{1|1}, \mathbf{\Lambda}^{1|1}\right)$ *определяется аналогичный действию нечетного скаляра и нечетного анти-скаляра* (4.24).

где V *представляет собой вектор-столбец, а собственные значения равны*

$$x_1 = a; \quad x_2 = b; \tag{4.31}$$

ставления [695–700] широко используются в изучении конечных полугрупп [701,702] и топологических полугрупп [703–707]. Обычно матричные полугруппы определяются над полем $\mathbb{K}$ [708–710]. Тем не менее, после обнаружения суперсимметрии физиками [34, 70] реалистичные объединенные теории частиц начали рассматриваться в суперпространстве (см., например, [711] и **Приложение Б**) — аналоге пространства, в котором все величины и функции определяются не над полем $\mathbb{K}$, но над грассман-банаховой супералгеброй над $\mathbb{K}$ [112, 174] (или их обобщениями [117,133]). Следовательно, представляется важным изучить различные представления полугрупп не матрицами, а суперматрицами [10].

В этом подразделе мы рассмотрим непрерывные суперматричные представления различных полугрупп связок, состоящих из идемпотентов [103,425,712]. Отметим, что исследование представлений полугрупп идемпотентов [704,713–715], с идемпотентно-генерированных полугрупп [716] и подмножеств идемпотентов [121, 717–720] и псевдоидемпотентов [721] в полугруппах, в особенности матричных полугрупп [722], является важным с абстрактно-алгебраической точки зрения. Идемпотенты также возникают и широко используются в приложениях случайных матричных полугрупп [699, 700, 723, 724].

Сначала рассмотрим возможные подполугруппы полугруппы редуцированных суперматриц (не множеств и не сэндвич, как в **Подразделе 4.1**). Множества нечетно-редуцированных матриц (см. **Определение 4.2**) образуют Г-полугруппы, которые определены в **Приложении В.6**. Рассмотрим сначала однопараметрические подполугруппы Г-полугрупп из (В.44)–(В.45).

4.2.1. Однопараметрические полугруппы редуцированных суперматриц . Наиболее элементарная однопараметрическая полугруппа суперматриц вида (В.44)–(В.45) предста-

вляется антидиагональными нильпотентыми суперматрицами вида

$$\mathrm{Y}_{\alpha}(t) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.39}$$

Предложение 4.32. *Суперматрицы* $\mathrm{Y}_{\alpha}(t)$ *наряду с нулевой суперматрицей*

$$\mathrm{Z} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

образуют непрерывную полугруппу $\mathbf{Z}_{\alpha} \stackrel{def}{=} \{\bigcup \mathrm{Y}_{\alpha}(t) \bigcup \mathrm{Z}; \cdot\}$ *с нулевым умножением*

$$\mathrm{Y}_{\alpha}(t) \cdot \mathrm{Y}_{\alpha}(u) = \mathrm{Z}. \tag{4.41}$$

Доказательство. Рассмотрим умножение двух элементов

$$Y_{\alpha}(t) \cdot Y_{\alpha}(u) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha u \\ \alpha & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 t & 0 \\ 0 & \alpha^2 u \end{pmatrix}.$$

Поскольку α — нильпотент второй степени $\alpha^2 = 0$, мы получаем необходимый результат — нулевое умножение (4.41). ■

Замечание **4.33.** Это показывает, что здесь (как и во всех доказательствах ниже) нильпотентность играет решающую и обязательную роль, и, таким образом, эти построения возможны только для суперматриц и не имеют аналогов в обычном (несуперсимметричном) случае.

Утверждение 4.34. *Для любого фиксированного* $t = t_0 \in \Lambda^{1|0}$ *множество* $\{\mathrm{Y}_{\alpha}(t_0), \mathrm{Z}\}$ *представляет собой 0-минимальный идеал в полугруппе* $\mathbf{Z}_{\alpha}$.

Среди нетривиальных вариантов однопараметрических подполугруппы полугруппы $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ мы рассмотрим нечетно-редуцированные су-

перматрицы следующего вида

$$\mathrm{P}_{\alpha}(t) \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{4.42}$$

где $t \in \Lambda^{1|0}$ — четный параметр из Λ, который "нумерует" элементы $\mathrm{P}_{\alpha}(t)$, и $\alpha \in \Lambda^{0|1}$ представляет собой фиксированный нечетный элемент Λ, который "нумерует" множества $\bigcup\limits_{t} \mathrm{P}_{\alpha}(t)$.

Замечание **4.35.** Здесь мы исследуем однопараметрические подполугруппы полугруппы $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ как абстрактные полугруппы [102, 104], но не как полугруппы операторов [725, 726].

Сначала установим свойства умножения суперматриц $\mathrm{P}_{\alpha}(t)$. Из (4.42) видно, что

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha t \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha u \\ \alpha & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^2 t & \alpha t \\ \alpha & \end{pmatrix}$$

произведение требует рассмотрения дополнительных элементов, кото-

Мы можем заметить из таблицы Кэли следующие непрерывные подполугруппы в скрученной прямоугольной связке:

- $\boldsymbol{e}$ – одноэлементная “почти тождественная” подполугруппа;
- $\tilde{\boldsymbol{P}}_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{p}_t; * \right\}$ – “приведенная” полугруппа левых нулей;
- $\boldsymbol{P}_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{p}_t \cup \boldsymbol{e}; * \right\}$ – полная полугруппа левых нулей;
- $\tilde{\boldsymbol{Q}}_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{q}_t; * \right\}$ – “приведенная” полугруппа правых нулей;
- $\boldsymbol{Q}_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{q}_t \cup \boldsymbol{e}; * \right\}$ – полная полугруппа правых нулей;
- $\tilde{\boldsymbol{F}}^{(1|1)}_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t,u \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{r}_{tu}; * \right\}$ – “приведенная” прямоугольная связка;
- $\boldsymbol{F}^{(1|1)}_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t,u \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{r}_{tu} \cup \boldsymbol{e}; * \right\}$ – полная прямоугольная связка;
- $\boldsymbol{V}^L_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t,u \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{r}_{tu} \cup \boldsymbol{p}_t; * \right\}$ – “смешанная” левая прямоугольная связка;
- $\boldsymbol{V}^R_\alpha = \left\{ \bigcup\limits_{t,u \neq 1+\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{r}_{tu} \cup \boldsymbol{q}_t; * \right\}$ – “смешанная” правая прямоугольная связка.

Таким образом, мы получили непрерывное суперматричное представление для полугрупп левых и правых нулей и построили из них суперматричное представление прямоугольных связок. Хорошо известно, что любая прямоугольная связка изоморфна декартову произведению полугрупп левых и правых нулей [103, 433]. Здесь мы получили это в явном виде (см. (4.52)) и представили конкретную конструкцию (4.50). Кроме того, мы унифицировали все вышеупомянутые полугруппы в одном объекте, а именно в скрученной прямоугольной связке.

4.2.3. Представления прямоугольных связок . Умножение прямоугольных связок приводится в правом нижнем углу

таблицы Кэли. Обычно [103,104] оно определяется одним соотношением

$$\boldsymbol{r}_{\mathsf{tu}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{vw}} = \boldsymbol{r}_{\mathsf{tw}}. \tag{4.53}$$

В нашем случае индексы — это четные непрерывные грассмановы параметры из $\Lambda^{1|0}$. Что касается полугрупп нулей, это также приводит к некоторым особенностям в идеальном строении таких связок.

Другое отличие представляет собой отсутствие условия $u = v$, что возникает в некотором приложениях из-за конечной природы индексов, рассматриваемых как некоторые величины, соответствующие строкам и столбцам в матрицах элементов (см. например, [727]). Поэтому, при поисках новых результатов в данном непрерывном суперсимметричном случае мы должны рассматривать и должны доказывать некоторые стандартные утверждения с самого начала.

Рассмотрим отношения Грина на $\boldsymbol{F}_{\circledR}^{(1|1)}$.

Предложение 4.45. *Любые два элемента в прямоугольной связке* $\boldsymbol{F}_{\circledR}^{(1|1)}$ *одновременно* $\mathscr{J}$ *- и* $\mathscr{D}$*-эквивалентны.*

Доказательство. Из (4.53) мы имеем

$$\boldsymbol{r}_{\mathsf{tu}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{vw}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{tu}} = \boldsymbol{r}_{\mathsf{tw}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{tu}} = \boldsymbol{r}_{\mathsf{tu}}, \tag{4.54}$$

$$\boldsymbol{r}_{\mathsf{vw}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{tu}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{vw}} = \boldsymbol{r}_{\mathsf{vw}} * \boldsymbol{r}_{\mathsf{tw}} = \boldsymbol{r}_{\mathsf{vw}} \tag{4.55}$$

для любого $t, u, v, w \in \Lambda^{1|0}$.

назовем $(n|n)$-ым α-отношением равенства.

Замечание **4.53.** Полугруппа $\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(n|n)}$ эпиморфна полугруппе $\boldsymbol{F}_{\alpha}$, и два $\boldsymbol{\Delta}_{\alpha}^{(n|n)}$-эквивалентных элемента $\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(n|n)}$ имеют тот же образ.

Рассмотрим идемпотентные суперматрицы из $\mathrm{RMat}_{\Lambda}^{odd}(k|m)$ вида

$$\mathrm{F}_{tu} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathrm{T} \\ \alpha\mathrm{U} & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \tag{4.65}$$

где $\mathrm{T}\,(k \times m)$ и $\mathrm{U}\,(m \times k)$ представляют собой обыкновенные матрицы четных параметров связки, и $\mathrm{I}\,(m \times m)$ — единичная матрица. Данная связка содержит максимум $2km$ параметров из $\Lambda^{1|0}$. Умножение в этой связке есть

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathrm{T} \\ \alpha\mathrm{U} & \mathrm{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathrm{T}' \\ \alpha\mathrm{U}' & \mathrm{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\mathrm{T} \\ \alpha\mathrm{U}' & \mathrm{I} \end{pmatrix}, \tag{4.66}$$

что в блочном виде совпадает с умножением прямоугольной связки (4.53)

$$\mathrm{F}_{\mathrm{TU}}\mathrm{F}_{\mathrm{T'U'}} = \mathrm{F}_{\mathrm{TU'}}. \tag{4.67}$$

Теорема 4.54. *Если $n = km$, то представления, заданные* (4.62) *и* (4.65)*, изоморфны.*

Доказательство. Поскольку в (4.63) и (4.67) не имеется перемножения между параметрами, то представления, заданные матрицами (4.62) и (4.65), отличаются перестановкой, если $n = km$. ■

Следствие 4.55. *Суперматрицы $\mathrm{F}_{t_1t_2\ldots t_n,u_1u_2\ldots u_n}$ из $\mathrm{RMat}_{\Lambda}^{odd}(1|n)$, имеющие вид* (4.62)*, исчерпывают все возможные непрерывные представления $(n|n)$-связок.*

$$\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}\mathscr{D}\boldsymbol{f}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\alpha t_1 = \alpha t'_1 \wedge \alpha t_2 = \alpha t'_2) \vee \\ (\alpha u_1 = \alpha u'_1 \wedge \alpha u_2 = \alpha u'_2) \end{array} \right\}, \tag{4.73}$$

$$\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}\mathscr{H}\boldsymbol{f}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \iff \left\{ \begin{array}{l} (\alpha t_1 = \alpha t'_1 \wedge \alpha t_2 = \alpha t'_2) \wedge \\ (\alpha u_1 = \alpha u'_1 \wedge \alpha u_2 = \alpha u'_2) \end{array} \right\}. \tag{4.74}$$

Теперь мы разбиремся, что отсутствовало в стандартном подходе и введем обобщения отношений Грина.

Из (4.71) и (4.72) видно, что различные четыре возможности для удовлетворения равенств не исчерпываются ординарными отношениями $\mathscr{R}$ - и $\mathscr{L}$-эквивалентности. Ясно, почему мы писали выше восклицательные знаки: эти утверждения *будут исправляться*. Таким образом, мы вынуждены определить более общие отношения, “тонкие отношения эквивалентности”. Они достаточны для описания всех возможных классов элементов в $(n|n)$-связках, пропущенных в стандартном подходе [104, 204].

Во-первых, мы определим их для использования в нашем частном случае.

Определение 4.63. *Тонкие $\mathscr{R}^{(k)}$- и $\mathscr{L}^{(k)}$-отношения в $(2|2)$-связке определяются следующим образом*

$$\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}\mathscr{R}^{(1)}\boldsymbol{f}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \iff \{\alpha t_1 = \alpha t'_1\}, \tag{4.75}$$

$$\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}\mathscr{R}^{(2)}\boldsymbol{f}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \iff \{\alpha t_2 = \alpha t'_2\}, \tag{4.76}$$

$$\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}\mathscr{L}^{(1)}\boldsymbol{f}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \iff \{\alpha u_1 = \alpha u'_1\}, \tag{4.77}$$

$$\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}\mathscr{L}^{(2)}\boldsymbol{f}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \iff \{\alpha u_2 = \alpha u'_2\}. \tag{4.78}$$

Предложение 4.64. *Тонкие $\mathscr{R}^{(k)}$- и $\mathscr{L}^{(k)}$-отношения являются отношениями эквивалентности.*

Доказательство. Следует из явного вида умножения (4.62) и (B.58)–

(B.59). ■

Поэтому они подразделяют связку $\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)}$ на четыре тонких класса эквивалентности $\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)}/\mathscr{R}^{(k)}$ и $\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)}/\mathscr{L}^{(k)}$ следующим образом

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} = \left\{\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2} \in \boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)} \,|\, \alpha t_1 = const\right\}, \tag{4.79}$$

$$\mathsf{R}_{\boldsymbol{f}}^{(2)} = \left\{\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2} \in \boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)} \,|\, \alpha t_2 = const\right\}, \tag{4.80}$$

$$\mathsf{L}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} = \left\{\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2} \in \boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)} \,|\, \alpha u_1 = const\right\}, \tag{4.81}$$

$$\mathsf{L}_{\boldsymbol{f}}^{(2)} = \left\{\boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2} \in \boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)} \,|\, \alpha u_2 = const\right\}. \tag{4.82}$$

Для прозрачности мы можем схематично представить

$$\begin{array}{ccc} & \mathsf{R}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} & \mathsf{R}_{\boldsymbol{f}}^{(2)} \\ & \updownarrow & \updownarrow \\ \mathsf{L}_{\boldsymbol{f}}^{(1)} \leftrightarrow & \alpha t_1 & \alpha t_2 \\ \mathsf{L}_{\boldsymbol{f}}^{(2)} \leftrightarrow & \left(\begin{array}{ccc} 0 & \alpha t_1 & \alpha t_2 \\ \alpha u_1 & 1 & 0 \\ \alpha u_2 & 0 & 1 \end{array}\right), \end{array} \tag{4.83}$$

где стрелки показывают, который элемент суперматрицы фиксируется согласно данному тонкому отношению эквивалентности.

Отсюда мы можем получать также и все известные отношения

$$\mathscr{R}^{(1)} \cap \mathscr{R}^{(2)} = \mathscr{R}, \tag{4.84}$$

$$\mathscr{L}^{(1)} \cap \mathscr{L}^{(2)} = \mathscr{L}, \tag{4.85}$$

$$\left(\mathscr{R}^{(1)} \cap \mathscr{R}^{(2)}\right) \cap \left(\mathscr{L}^{(1)} \cap \mathscr{L}^{(2)}\right) = \mathscr{H}, \tag{4.86}$$

$$\left(\mathscr{R}^{(1)} \cap \mathscr{R}^{(2)}\right) \vee \left(\mathscr{L}^{(1)} \cap \mathscr{L}^{(2)}\right) = \mathscr{D}. \tag{4.87}$$

Однако, кроме стандартных, имеется много других “смешанных” эквивалентностей [10], которые могут классифицироваться, используя

определения

$$H^{(ijj)} = R^{(i)} \setminus L^{(j)}; \tag{4.88}$$

$$D^{(ijj)} = R^{(i)} _ L^{(j)}; \tag{4.89}$$

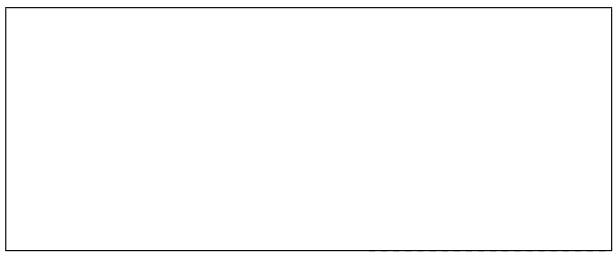
$$H^{(ij\,jk)} = \overset{3}{R}{}^{(i)} \setminus R^{(j)\prime} \setminus L^{(k)}; \tag{4.90}$$

$$H^{(ijkl)} = R^{(i)} \setminus \overset{3}{L}{}^{(k)} \setminus L^{(l)\prime}; \tag{4.91}$$

$$D^{(ij\,jk)} = \overset{3}{R}{}^{(i)} \setminus R^{(j)\prime} _ L^{(k)}; \tag{4.92}$$

$$D^{(ijkl)} = R^{(i)} _ \overset{3}{L}{}^{(k)} \setminus L^{(l)\prime}: \tag{4.93}$$

Графическая интерпретация смешанных отношений эквивалентности дается диаграммой на *Рис.* 4.1



подполугруппы $\mathscr{R}_{\boldsymbol{U}}^{(k)}$-классов. По аналогии можно доказать и остальные равенства. ■

Замечание **4.68.** Второе условие $\alpha t_2 = \alpha t_2'$ (что представляет собой вторую часть определения обыкновенного $\mathscr{R}$-отношения для $\boldsymbol{F}_{\alpha}^{(2|2)}$ (4.71)) выполняется также в $\boldsymbol{U}_{\alpha}^{(1)}$, но из-за собственного определения подполугруппы ($\alpha t_2 = \beta_2 = const$, $\alpha u_2 = \gamma_2 = const$), однако $\alpha t_2 = \alpha t_2'$ вообще не входят в тонкие отношения $\mathscr{R}^{(k)}$. Поэтому последнее представляет собой наиболее общее отношение среди рассматриваемых $\mathscr{R}$-отношений.

Замечание **4.69.** Можно рассматривать доказанную **Теорему 4.67** с точки зрения [238], где доказывались формулы, подобные (4.96)–(4.98), но с обычными отношениями Грина в правой части. Обращаясь к диаграмме на *Рис.* 4.1, мы делаем вывод, что наш результат содержит обычный случай [238] в качестве частного.

Кроме того, мы предполагаем, что **Теорема 4.67** имеет более глубокий смысл и дает другую общую трактовку тонким отношениям эквивалентности для абстрактных полугрупп.

Предположение 4.70. *Отношения Грина на подполугруппе* **U** *полугруппы* **S** *имеют как свой аналог продолженные образы в* **S**, *а именно — тонкие отношения эквивалентности на* **S**.

Мы доказали это утверждение для частного случая непрерывных представлений $(n|n)$-связок. Важно исследовать и другие алгебраические системы, где **Предположение 4.70** истинно.

4.3. Основные результаты и выводы

1. Построены новые суперматричные полугруппы и исследованы их идеальные свойства
2. Предложены нетривиальные редукции необратимых суперматриц, которые играют важную роль в приложениях.
3. Антитреугольные суперматрицы объединены с треугольными в различные сэндвич-полугруппы с необычными свойствами.
4. Получены новые типы нечетных супермодулей и антитранспонирования.
5. Найдены представления странной супералгебры Березина.
6. Введены нечетные аналоги собственных чисел, характеристических функций и сформулирована обобщенная теорема Гамильтона-Якоби.
7. Показано, что полугрупповые связки непрерывно представляются суперматричными полугруппами антитреугольного вида.
8. Построено непрерывное представление скрученной прямоугольной связки однопараметрическими суперматричными полугруппами, вычислены отношения Грина для различных подполугрупп.
9. Определен новый тип высших связок и для них введены обобщения отношений Грина — тонкие и смешанные отношения эквивалентности, которые трактуются как продолжения стандартных отношений Грина с подполугруппы на всю полугруппу.
10. Введены и изучены многомерные аналоги eggbox диаграмм для высших связок.

ничивало их применение комбинаторными построениями и вероятност

формулой[*)]

$$\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1per} \stackrel{def}{=} \frac{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{MT}}{\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}. \tag{5.13}$$

Утверждение 5.5. *Для* per*-обратной матрицы выполняется соотношение*

$$\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1per} \cdot \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} = \mathrm{I}. \tag{5.14}$$

Доказательство. Непосредственно получается из (5.11) при условии $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right] \neq 0$. ■

Отметим некоторые свойства $N = 2$ scf-матриц, следующие из их определения, которые, однако, не выполняются для обычных матриц. Например, для n-ой степени любой $N = 2$ scf-матрицы имеют место соотношения

$$\mathrm{tr}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{n} = a^n + d^n + \left[1 + (-1)^n\right](bc)^{\frac{n}{2}}, \tag{5.15}$$

$$\begin{pmatrix} \mathrm{per} \\ \det \end{pmatrix}^{n} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} = \begin{pmatrix} \mathrm{per} \\ \det \end{pmatrix} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{n} = (ad)^n + (\pm 1)^n (bc)^n. \tag{5.16}$$

Отсюда, в частности, следуют связи между перманентом и детерминантом scf-матриц

$$\mathrm{per}^{\,2n}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}} = \det{}^{2n}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}, \tag{5.17}$$

$$\mathrm{per}\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{2n} = \det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{2n}. \tag{5.18}$$

Утверждение 5.6. *Если хотя бы один из элементов* scf*-матрицы на каждой из диагоналей нильпотентен и индекс нильпотентности равен 2 или элементы на каждой диагонали ортогональны, то произведение детерминанта на перманент равно нулю.*

Примечание. Ср. со стандартной формулой $A^{-1} = A^{DT}/\det A$ и (5.9).

Доказательство. Из определений детерминанта и перманента (5.1) получаем

$$\det \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} \cdot \operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} = a^2 d^2 - b^2 c^2, \tag{5.19}$$

откуда и следует утверждение. ■

Кроме того, имеется нетривиальная связь между перманентом и следом scf-матрицы

$$\left(2\operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} - \operatorname{tr} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^2\right)\left(2\operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} + \operatorname{tr} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^2 - \operatorname{tr}^2 \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\right) = 0, \tag{5.20}$$

где каждый из сомножителей отличен от нуля, а их ортогональность достигается за счет scf-условий (5.10).

По-видимому, одной из причин, почему перманенты не применялись широко в приложениях, как детерминанты, служит тот факт, что в общем случае перманент не мультипликативен, т. е. формула Бине-Коши $\det(\mathrm{AB}) = \det \mathrm{A} \cdot \det \mathrm{B}$ не выполняется[*)] без дополнительных условий для перманентов [626]. Замечательно, что именно уравнения (5.10) и являются требуемыми дополнительными условиями.

Предложение 5.7. (Формула Бине-Коши для перманентов) *Если* $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ *и* $\mathrm{B}_{\mathrm{scf}}$ *— любые* scf*-матрицы, то между их перманентами выполняется соотношения*

$$\operatorname{per}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{scf}} \cdot \mathrm{B}_{\mathrm{scf}}\right) = \operatorname{per} \mathrm{A}_{\mathrm{scf}} \cdot \operatorname{per} \mathrm{B}_{\mathrm{scf}}. \tag{5.21}$$

Доказательство. Для $N = 2$ scf-матриц соотношение (5.21) следует из (5.1) непосредственным перемножением и затем применением scf-условий (5.10) . ■

Отметим также и другие важные формулы, справедливые для

Примечание. Также, как и инвариантность при линейных операциях над матрицами [626].

детерминантов и *только* для scf-матриц [2]

$$\operatorname{per}\left(\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{B}_{\mathrm{scf}}\cdot\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1}\right) = \operatorname{per}\mathrm{B}_{\mathrm{scf}}, \tag{5.22}$$

$$\operatorname{per}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1} = \operatorname{per}{}^{-1}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}, \tag{5.23}$$

где $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}^{-1}$ — обратная матрица в обычном определении.

5.1.2. О р т о г о н а л ь н ы е и scf - м а т р и ц ы . Важным свойством scf-матриц является их связь с ортогональными матрицами при смене базиса [2], что использовалось нами при рассмотрении необратимых редуцированных $N = 2$ и $N = 4$ преобразований (см. **Раздел 3**).

Действительно, пусть

$$\mathrm{A}_0 = \mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{A}\cdot\mathrm{U}, \quad \mathrm{B}_0 = \mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{U}, \tag{5.24}$$

где

$$\mathrm{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \tag{5.25}$$

— матрица перехода*) в комплексный базис, причем

$$\mathrm{U}^T\cdot\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \sigma_3,\ \mathrm{U}\cdot\mathrm{U}^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \sigma_1, \tag{5.26}$$

где σ_i — матрицы Паули.

Тогда для произведения двух матриц в разных базисах можно получить

$$\mathrm{A}_0^T\cdot\mathrm{B}_0 = \mathrm{U}^{-1}\cdot\mathrm{A}^{MT}\cdot\mathrm{B}\cdot\mathrm{U}. \tag{5.27}$$

Если выбрать $\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0$, то получим связь ортогональности в ко-

---

Примечание. С нулевым перманентом $\operatorname{per}\mathrm{U} = 0$ и $\det\mathrm{U} = -i$.

нений для определения элементов x_i и y_i

$$\begin{cases} \mu\alpha\,(\gamma\nu+\beta\rho)\,x_1=\alpha\gamma, \\ \mu\alpha\,(\gamma\nu+\beta\rho)\,x_2=\alpha\beta, \\ \mu\alpha\,(\gamma\nu+\beta\rho)\,x_3=\mu\rho, \\ \mu\alpha\,(\gamma\nu+\beta\rho)\,x_3=\mu\nu, \end{cases} \quad \begin{cases} \mu\alpha\,(\gamma\nu-\beta\rho)\,y_1=\alpha\gamma, \\ \mu\alpha\,(\gamma\nu-\beta\rho)\,y_2=-\alpha\beta, \\ \mu\alpha\,(\gamma\nu-\beta\rho)\,y_3=-\mu\rho, \\ \mu\alpha\,(\gamma\nu-\beta\rho)\,y_3=\mu\nu, \end{cases} \tag{5.39}$$

которые могут быть решены разложением по образующим Λ.

5.1.4. П о л у г р у п п а $N=2$ scf - м а т р и ц . Наряду с мультипликативностью перманента $N=2$ scf-матриц (5.21) важным также является поведение введенной матричной функции $\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A}$ при умножении.

Рассмотрим функцию $\mathrm{scf}_{\pm}$ от произведения матриц A и $\mathrm{B}=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$. Пользуясь определением (5.7), получаем

$$\mathrm{scf}_{+}(\mathrm{AB}) = p^2\cdot\mathrm{scf}_{+}\mathrm{A}+r^2\cdot\mathrm{scf}_{-}\mathrm{A}+2\mathrm{per}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{scf}_{+}\mathrm{B}, \tag{5.40}$$

$$\mathrm{scf}_{-}(\mathrm{AB}) = q^2\cdot\mathrm{scf}_{+}\mathrm{A}+s^2\cdot\mathrm{scf}_{-}\mathrm{A}+2\mathrm{per}\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{scf}_{-}\mathrm{B}. \tag{5.41}$$

Обозначим множество 2×2 четных матриц, удовлетворяющих условию (5.10), $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}}=\cup\,\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$. Тогда мы имеем

Предложение 5.15. *Множество $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}}$ образует подполугруппу полной линейной полугруппы 2×2 четных матриц.*

Доказательство. Из (5.40)–(5.41) получаем отношения

$$\mathrm{scf}_{\pm}(\mathrm{AB})=0\Leftrightarrow\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{A}=0\wedge\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{B}=0, \tag{5.42}$$

что дает $\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}}\star\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}}\subseteq\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\mathrm{scf}}$ и этим доказывает утверждение. ■

Определение 5.16. *Линейную полугруппу, изоморфную* $\{\boldsymbol{\mathcal{A}}_{\rm scf}|\cdot\}$, *где* $(\cdot)$ — *матричное умножение, назовем полугруппой* $N=2$ scf-*матриц* $SCF_{\Lambda_0}(2)$.

Определение 5.17. *Обратимые элементы из полугруппы* $SCF_{\Lambda_0}(2)$ *образуют группу* $N=2$ scf-*матриц* $GSCF_{\Lambda_0}(2)$.

Определение 5.18. *Небратимые элементы изполугруппы* $SCF_{\Lambda_0}(2)$ *образуют идеал* $ISCF_{\Lambda_0}(2)$.

Поскольку имеется соотношение подобия (5.24) и для scf-матриц выполняется ортогональность (5.29), в обратимом случае получаем

Утверждение 5.19. *Группа* $GSCF_{\Lambda_0}(2)$ *изоморфна ортогональной группе* $O_{\Lambda_0}(2)$.

Нетривиальным является необратимый случай $\epsilon\left[\mathrm{per\,A_{scf}}\right]=0$, когда scf-условия (5.7) выполняются не за счет зануления одного из сомножителей, а за счет ортогональности нильпотентных ненулевых сомножителей. Такие scf-матрицы принадлежат идеалу $ISCF_{\Lambda_0}(2)$ (см. *Пример* **5.14**).

5.1.5. $N=4$ scf-матрицы. Пусть

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ \mathrm{A}_{21} & \mathrm{A}_{22}\end{pmatrix}\in \mathrm{Mat}_{\Lambda_0}(4) \tag{5.43}$$

— блочная 4×4 матрица, состоящая из четных элементов. Поставим ей в соответствие блочную 4×4 матрицу в координатном базисе

$$\mathrm{X}_0=\begin{pmatrix}\mathrm{U}^{-1}\mathrm{A}_{11}\mathrm{U} & \mathrm{U}^{-1}\mathrm{A}_{12}\mathrm{U}\\ \mathrm{U}^{-1}\mathrm{A}_{21}\mathrm{U} & \mathrm{U}^{-1}\mathrm{A}_{22}\mathrm{U}\end{pmatrix}, \tag{5.44}$$

деленных преобразований $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)$, а $L_{\Lambda_0}(2)$ — полугруппа матриц $\mathrm{A} \in \mathrm{Mat}_{\Lambda_0}(2)$. Поскольку для любых двух матриц A и B имеет место

$$\bar{f}_{\mathrm{A}} \circ \bar{f}_{\mathrm{B}} = \bar{f}_{\mathrm{AB}}, \tag{5.60}$$

то отображение полугрупп $\varphi : L_{\Lambda_0}(2) \to \bar{\mathbf{F}}$ есть гомоморфизм*) полугрупп.

Предложение 5.27. *Доопределенные дробно-линейные преобразования $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)$ имеют дополнительную неподвижную точку с нильпотентной координатой.*

Доказательство. Неподвижная точка z_{fix} отображения $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z)$ определяется формулой $\bar{f}_{\mathrm{A}}(z_{\mathrm{fix}}) \stackrel{\circ}{=} z_{\mathrm{fix}}$. Из (5.58) имеем $cz_{\mathrm{fix}}^2 + (d-a)\, z_{\mathrm{fix}} - b = 0$, откуда следует не одна, как в стандартном рассмотрении при $c \neq 0$ [734], а *две* (!) возможности:

1. $\epsilon[b] \neq 0$, $\epsilon[z_{\mathrm{fix}}] \neq 0$, тогда $z_{\mathrm{fix}}^{(\pm)} \stackrel{\circ}{=} \dfrac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4\det \mathrm{A}}}{2c}$;

2. $\epsilon[b] = 0$, $\epsilon\left[z_{\mathrm{fix}}^{(0)}\right] = 0$, $\left(z_{\mathrm{fix}}^{(0)}\right)^2 = 0$, тогда $z_{\mathrm{fix}}^{(0)} \stackrel{\circ}{=} \dfrac{b}{d-a}$.

■

Если выбрать в качестве матрицы A комплексную матрицу с единичным детерминантом, то $f_{\mathrm{A}}(z)$ — преобразование Мебиуса, играющее важную роль в теории струн и римановых поверхностей.

5.2.1. О п р е д е л е н и е и с в о й с т в а per - о т о б р а ж е н и й . Выберем в качестве A введенные в **Подразделе 5.1** $N = 2$ scf-матрицы $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$. Мы покажем, что наиболее ключевые соотношения будут иметь дуальные, где детерминант заменяется на перманент [2].

Примечание. Точнее — эпиморфизм с ненулевым ядром $a \cdot \mathrm{I}$, $a \in \Lambda_0$ (см. [733]).

Поскольку $N = 2$ scf-матрицы $\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ образуют полугруппу $SCF_{\Lambda_0}(2)$ (см. **Предложение 5.15**), то соответствующие дробно-линейные преобразования $\bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z)$ образуют полугруппу $\bar{\mathbf{F}}_{\mathrm{scf}} \subset \bar{\mathbf{F}}$ относительно композиции в силу (5.60), и отображение полугрупп $\varphi_{\mathrm{scf}} : SCF_{\Lambda_0}(2) \to \bar{\mathbf{F}}_{\mathrm{scf}}$ есть также гомоморфизм полугрупп.

Определение 5.28. *Назовем per-отображением дробно-линейное преобразование* (5.59) *с* $N = 2$ scf-*матрицей* $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$.

Основным для дальнейшего рассмотрения будет

Утверждение 5.29. Per-*отображения* (*и только они*) *удовлетворяют следующему тождеству*

$$n_1 \cdot \bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_1) \;+\; n_2 \cdot \bar{f}_{\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}(z_2) \stackrel{\circ}{=}$$
$$\frac{(n_1+n_2)(z_1+z_2)\cdot \operatorname{per}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{2(cz_1+d)(cz_2+d)} \;+\; \frac{(n_1-n_2)(z_1-z_2)\cdot \det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}}{2(cz_1+d)(cz_2+d)}. \quad (5.61)$$

Доказательство. Обозначим разность между левой и правой частями в (5.61) за $\Delta f(z_1, z_2)$. Для любой матрицы A непосредственно из (5.59) имеем

$$\Delta f(z_1, z_2) = (z_1 z_2 \cdot \operatorname{scf}_{+}\mathrm{A} + \operatorname{scf}_{-}\mathrm{A})(n_1 + n_2), \quad (5.62)$$

тогда в силу того, что в нашем случае $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ — $N = 2$ scf-матрица, из scf-условий (5.10) $\operatorname{scf}_{\pm}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}} = 0$ получаем $\Delta f(z_1, z_2) = 0$. ■

Из тождества (5.61) явно прослеживается дуальная роль $\operatorname{per}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$ и $\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$. Поэтому наряду с новыми формулами мы будем приводить и стандартные.

Предложение 5.30. *При* per-*отображениях разность координат преобразуется множителем, пропорциональным* $\det\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$, *а сумма координат преобразуется множителем, пропорциональным* $\operatorname{per}\mathrm{A}_{\mathrm{scf}}$.

Кроме того,

$$\left|\bar{f}\right.$$

Утверждение 5.37. *Отображения группы перестановок*

$$\omega^{\pm} : \sigma \to p_{\sigma}^{\pm} \tag{5.76}$$

являются гомоморфизмами.

Доказательство. Для двух последовательных перестановок из (5.75) имеем

$$\begin{aligned} p_{\pi}^{\pm}\left[p_{\sigma}^{\pm}\left(\boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)\right)\right] &= p_{\pi}^{\pm}\left[\boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_{\sigma 1},z_{\sigma 2},z_{\sigma 3},z_{\sigma 4}\right)\right] = \\ \boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_{\pi\sigma 1},z_{\pi\sigma 2},z_{\pi\sigma 3},z_{\pi\sigma 4}\right) &= p_{\pi\sigma}^{\pm}\left(\boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right)\right), \end{aligned} \tag{5.77}$$

т. е. $p_{\pi}^{\pm}p_{\sigma}^{\pm} = p_{\pi\sigma}^{\pm}$, что и доказывает утверждение. ■

Найдем образ, например, транспозиции $\sigma = \sigma_{23} = (2,3)$ при гомоморфизме $\omega^{\pm}$ (5.76). Из (5.73) следует, что имеется *два (!)* per-отображения $h^{\pm}(z_1)$, переводящих точки z_2, z_3, z_4 в $1, 0, \infty$ соответственно

$$\boldsymbol{D}^{\pm}\left(z_1,z_2,z_3,z_4\right) = \boldsymbol{D}^{\pm}\left(h^{\pm}\left(z_1\right),1,0,\infty\right). \tag{5.78}$$

С другой стороны, пользуясь (5.72), имеем $\boldsymbol{D}^{\pm}\left(h^{\pm}\left(z_1\right),1,0,\infty\right) = h^{\pm}\left(z_1\right)$. А из определения инвариантов (5.73) имеем

$$\boldsymbol{r}^{\pm} = \boldsymbol{D}^{\pm}\left(h^{\pm}\left(z_1\right),1,0,\infty\right) = h^{\pm}\left(z_1\right) = \boldsymbol{D}^{\pm}\left(\boldsymbol{r}^{\pm},1,0,\infty\right). \tag{5.79}$$

Применяем далее транспозицию σ_{23} к (5.79) и получаем

$$p_{\sigma_{23}}^{\pm}\left(\boldsymbol{r}^{\pm}\right) = \boldsymbol{D}^{\pm}\left(\boldsymbol{r}^{\pm},0,1,\infty\right) = 1 \pm \boldsymbol{r}^{\pm}, \tag{5.80}$$

и, следовательно, $\sigma_{23} \overset{\omega^{\pm}}{\to} 1 \pm \boldsymbol{r}^{\pm}$. Проделывая подобные выкладки для

Имеются и другие формулы для расстояния *) [733, 737], которые учитывают явно условие $\operatorname{Im} z \geq 0$, определяющее верхнюю полуплоскость $\mathbb{H}^2_{im}$ [734, 740]. Например, из (5.70) следует, что выражение [733]

$$\boldsymbol{d}^{-}_{im}(z_1, z_2) = \operatorname{Arch}\left(1 + \frac{|z_1 - z_2|^2}{\operatorname{Im} z_1 \operatorname{Im} z_2}\right) \tag{5.99}$$

инвариантно относительно дробно-линейных преобразований. Однако в случае per-отображений (см. **Определение 5.28**) мы имеем другую инвариантность (5.69), что приводит к необходимости рассмотрения "правой полуплоскости" $\mathbb{H}^2_{re}$, определяемой условием $\operatorname{Re} z \geq 0$. Тогда по аналогии с (5.99) можно определить правое расстояние [2]

$$\boldsymbol{d}^{+}_{re}(z_1, z_2) = \operatorname{Arch}\left(1 + \frac{|z_1 + z_2|^2}{\operatorname{Re} z_1 \operatorname{Re} z_2}\right), \tag{5.100}$$

инвариантное относительно per-отображений вследствие (5.69).

В терминах правого двойного отношения $\boldsymbol{D}^{+}(z_1, z_2, z_3, z_4)$ и правого расстояния $\boldsymbol{d}^{+}(z_1, z_2)$ (5.97) (или $\boldsymbol{d}^{+}_{re}(z_1, z_2)$) можно последовательно построить per-аналог гиперболической геометрии [733, 741], тригонометрии [737, 739] на комплексной суперплоскости или в многомерных комплексных суперпространствах [742].

Примечание. Левого в нашем определении.

5.3. Основные результаты и выводы

1. Определены и подробно изучены специальные необратимые матрицы с нильпотентными элементами — scf-матрицы, возникающие в N-расширенной суперконформной геометрии.

2. Обнаружена дуальность между перманентом и детерминантом и между минорами и алгебраическими дополнениями.

3. Предложена новая формула для обратной матрицы через перманент и миноры.

4. Получена новая формула Бине-Коши для перманентов.

5. Построены полугруппы $N = 2$ и $N = 4$ scf-матриц.

6. Приведены дробно-линейные преобразования специального вида, для которых найден новый вид симметрии.

7. Сформулирована необратимая гиперболическая геометрия на суперплоскости, в которой имеется два различных инвариантных двойных отношения и, соответственно, два расстояния.

8. Получены аналоги производной Шварца и различных классических формул на суперплоскости.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Duplij S. *On semigroup nature of superconformal symmetry* // *J. Math. Phys.* - 1991. - V. **32**. - № 11. - P. 2959–2965.

2. Duplij S. *On $N = 4$ super Riemann surfaces and superconformal semigroup* // *J. Phys.* - 1991. - V. **A24**. - № 13. - P. 3167–3179.

3. Duplij S. *Semigroup of $N = 1, 2$ superconformal transformations and conformal superfields* // *Acta Phys. Pol.* - 1990. - V. **B21**. - № 10. - P. 783–811.

4. Duplij S. *Towards gauge principle for semigroups* // *Acta Phys. Pol.* - 1992. - V. **B23**. - № 7. - P. 733–743.

5. Duplij S. *Some abstract properties of semigroups appearing in superconformal theories* // *Semigroup Forum.* - 1997. - V. **54**. - № 2. - P. 253–260.

6. Duplij S. *On semi-supermanifolds* // *Pure Math. Appl.* - 1998. - V. **9**. - № 2. - P. 1–28.

7. Duplij S. *Superconformal-like transformations and nonlinear realizations* // *Southwest J. Pure and Appl. Math.* - 1998. - V. **2**. - P. 85–112.

8. Duplij S. *On an alternative supermatrix reduction* // *Lett. Math. Phys.* - 1996. - V. **37**. - № 3. - P. 385–396.

9. Duplij S. *Noninvertible $N=1$ superanalog of complex structure* // *J. Math. Phys.* - 1997. - V. **38**. - № 2. - P. 1035–1040.

10. Duplij S. *Supermatrix representations of semigroup bands* // *Pure Math. Appl.* - 1996. - V. **7**. - № 3-4. - P. 235–261.

11. Duplij S. *On superconformal-like transformations and their nonlinear realization // Supersymmetries and Quantum Symmetries.* - Heidelberg: *Springer-Verlag*, 1998. - P. 243–251.

12. Дуплий С. А. *О типах $N = 2$ суперконформных преобразований // Теор. мат. физ.* - 1991. - Т. **86**. - № 1. - С. 138–143.

13. Дуплий С. А. *Идеальное строение суперконформных полугрупп // Теор. мат. физ.* - 1996. - Т. **106**. - № 3. - С. 355–374.

14. Дуплий С. А. *Поиски суперсимметричных партнеров на ускорителях высоких энергий.* **I** *// Пробл. яд. физ. и косм. лучей.* - 1985. - Т. **24**. - С. 82–96.

15. Дуплий С. А. *Поиски суперсимметричных партнеров на ускителях высоких энергий.* **II** *// Пробл. яд. физ. и косм. лучей.* - 1986. - Т. **26**. - С. 1–22.

16. Дуплий С. А. *Нильпотентная механика и суперсимметрия // Пробл. яд. физ. и косм. лучей.* - 1988. - Т. **30**. - С. 41–49.

17. Дуплий С. А. *Об $N = 2$ суперконформных преобразованиях // Пробл. яд. физ. и косм. лучей.* - 1990. - Т. **33**. - С. 22–38.

18. Дуплий С. А. *Об $N = 1$ суперконформной инвариантности // Ядерная физика.* - 1990. - Т. **52**. - № 4(10). - С. 1169–1175.

19. Duplij S. *Noninvertibility and "semi-" analogs of (super) manifolds, fiber bundles and homotopies.* - Kaiserslautern: 1996. - 30 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH-96/10, `q-alg/9609022`).

20. Duplij S. *Nonlinear realization of $N = 1$ superconformal-like transformations.* - Kaiserslautern: 1998. - 15 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH 98/02).

21. Duplij S. *Ideal structure of superconformal semigroups.* - Kaiserslautern: 1995. - 50 p. (*Preprint / Univ. Kaiserslautern*; KL-TH 95/4,

CERN-SCAN-9503192).

22. Березин Ф. А. *Математические основы суперсимметричных теорий поля* // *Ядерная физика*. - 1979. - Т. **29**. - № 6. - С. 1670–1687.

23. Nelson P. *Introduction to supermanifolds* // *Int. J. Mod. Phys.* - 1988. - V. **A3**. - № 3. - P. 585–590.

24. Martin J. L. *General classical dynamics, and the 'classical analogue' of a Fermi oscillator* // *Proc. Roy. Soc. London*. - 1959. - V. **A251**. - № 12571. - P. 536–543.

25. Martin J. L. *The Feymann principle for a Fermi system* // *Proc. Roy. Soc. London*. - 1959. - V. **A251**. - № 1267. - P. 543–549.

26. Schwinger J. *A note on the quantum dynamical principle* // *Phil. Mag.* - 1953. - V. **44**. - № 3. - P. 1171–1193.

27. Березин Ф. А., Кац Г. И. *Группы Ли с коммутирующими и антикоммутирующими параметрами* // *Мат. сборник*. - 1970. - Т. **82**. - № 3. - С. 343–359.

28. Кац Г. И., Коронкевич А. И. *Теорема Фробениуса для функций от коммутирующих и антикоммутирующих аргументов* // *Функц. анализ и его прил.* - 1971. - Т. **5**. - № 1. - С. 78–80.

29. Лейтес Д. А. *Спектры градуированно коммутативных колец* // *Успехи мат. наук*. - 1974. - Т. **29**. - № 3. - С. 209–210.

30. Березин Ф. А. *Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными*. - М.: *Изд-во МГУ*, 1983. - 208 с.

31. Волков Д. В. *Феноменологические лагранжианы взаимодействия голдстоуновских частиц*. - Киев: 1969. - 23 с. (*Препринт* / *Инст. теор. физики*; ИТФ-69-75).

32. Волков Д. В. *Феноменологические лагранжианы* // *ЭЧАЯ*. - 1973. - Т. **4**. - № 1. - С. 1–57.

78. Ibanez L. E., Munoz C., Rigolin S. *Aspect of Type* I *string phenomenology.* - Madrid: 1998. - 45 p. (*Preprint / Univ. Autónoma*; IFT-UAM/CSIC-98-28, hep-ph/9812397).

79. Deo B. B. *Supersymmetry in the standard model.* - Bhubaneswar: 1998. - 6 p. (*Preprint / Utkal Univ.*, hep-th/9806183).

80. Mansouri F. *Exact local supersymmetry, absence of superpartners, and noncommutative geometries.* - Cincinnati: 1998. - 16 p. (*Preprint / Univ. Cincinnati*, hep-th/9704187).

81. Gunion J. F., Haber H. E. *Low-energy supersymmetry at future colliders.* - Santa Cruz: 1997. - 21 p. (*Preprint / Inst. for Part. Phys.*; SCIPP 97-37, hep-ph/9806330).

82. Baer H. A. *Supersymmetry at supercolliders* // *Particles and fields '91.* V. **1**. - Singapore: *World Sci.*, 1991. - P. 472–474.

83. Bashford J. D., Tsohantjis I., Jarvis P. D. *Codon and nucleotide assignments in a supersymmetric model of the genetic code* // *Phys. Lett.* - 1997. - V. **A233**. - P. 481–488.

84. Bashford J. D., Tsohantjis I., Jarvis P. D. *A supersymmetric model for the evolution of the genetic code* // *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* - 1998. - V. **95**. - P. 987–992.

85. Forger F. M., Sachse R. S. *Lie superalgebras and the multiplet structure of the genetic code* **I***: Codon representations.* - Sao Paulo: 1998. - 23 p. (*Preprint / Inst. de Mat. e Estat.*, math-ph/9808001).

86. Bashford J. D., Jarvis P. D., Tsohantjis I. *Supersymmetry and the genetic code* // *Physical Applications and Mathematical Aspects of Geometry, Groups, and Algebras.* - Singapore: *World Sci.*, 1997. - P. 826–831.

87. Stavros K. *Prospects for supersymmetry at LEP*200 // *From Superstrings to Supergravity.* - Singapore: *World Sci.*, 1994. - P. 113–

130.

88. Dutta B., Muller D. J., Nandi S. *Gauge mediated supersymmetry signals at the Tevatron involving τ leptons.* - Stillwater: 1998. - 22 p. (*Preprint / Oklahoma State Univ.*; OSU-HEP-98-4, hep-ph/9807390).

89. Buscher V. *Searches for supersymmetry at LEP2 // Nucl. Phys. Proc. Suppl.* - 1998. - V. **65**. - P. 302–326.

90. Kachelriess M. *Ultrahigh-energy cosmic rays and supersymmetry.* - Assergi: 1998. - 9 p. (*Preprint / Lab. Naz. del Gran Sasso*, hep-ph/9806322).

91. Хренников А. Ю. *Суперанализ.* - М.: *Наука*, 1997. - 304 с.

92. Bars I. *Supergroups and their representations // Introduction to Supersymmetry in Particle and Nuclear Physics.* - New York: *Plenum Press*, 1984. - P. 107–184.

93. Rittenberg V., Scheunert M. *Elementary constructions of graded Lie groups // J. Math. Phys.* - 1978. - V. **19**. - P. 709–713.

94. Rogers A. *Super Lie groups: global topology and local structure // J. Math. Phys.* - 1981. - V. **22**. - № 6. - P. 939–945.

95. MacLane S. *Categories for the Working Mathematician.* - Berlin: *Springer-Verlag*, 1971. - 189 p.

96. Dodson C. T. J. *Categories, Bundles and Spacetime Topology.* - Kent: *Shiva Publishing*, 1980. - 421 p.

97. Mitchell B. *Theory of Categories.* - New York: *Academic Press*, 1965. - 346 p.

98. Segal G. *Categories and homology theory // Topology.* - 1974. - V. **13**. - P. 293–312.

99. Quinn F. *Group categories and their field theories.* - Blacksburg: 1998. - 36 p. (*Preprint / Virginia State Univ.*, math.GT/9811047).

100. Сушкевич А. К. *Теория обобщенных групп.* - Харьков: *Изд-во ХГУ*, 1937. - 147 с.

101. Биркгоф Г. *Теория структур.* - М.: *ИЛ*, 1952. - 407 с.

102. Ляпин Е. С. *Полугруппы.* - М.: *Физматгиз*, 1960. - 562 с.

103. Howie J. M. *An Introduction to Semigroup Theory.* - London: *Academic Press*, 1976. - 270 p.

104. Клиффорд А., Престон Г. *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. **1**. - М.: *Мир*, 1972. - 283 с.

105. Pultr A., Trnkova V. *Combinatorial, Algebraic and Topological Representations of Groups, Semigroups and Categories.* - Prague: *Prague Univ.*, 1980. - 236 p.

106. Лейтес Д. А. *Введение в теорию супермногообразий* // *Успехи мат. наук.* - 1980. - Т. **35**. - № 1. - С. 3–57.

107. Березин Ф. А. *Дифференциальные формы на супермногообразиях* // *Ядерная физика.* - 1979. - Т. **30**. - № 4. - С. 1168–1174.

108. Воронов А. А., Манин Ю. И., Пенков И. Б. *Элементы супергеометрии* // *Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.* Т. **9**. - М.: *ВИНИТИ*, 1986. - С. 3–25.

109. Рослый А. А., Худавердян О. М., Шварц А. С. *Суперсимметрия и комплексная геометрия* // *Современные проблемы математики. Итоги науки и техники.* Т. **32**. - М.: *ВИНИТИ*, 1988. - С. 247–284.

110. Tuynman G. M. *An introduction to supermanifolds.* - Lille: 1995. - 256 p. (*Preprint / Univ. de Lille*).

111. Crane L., Rabin J. M. *Super Riemann surfaces: uniformization and Teichmüller theory* // *Comm. Math. Phys.* - 1988. - V. **113**. - № 4. - P. 601–623.

Analysis. - 1997. - V. **9**. - № 1. - P. 107–161.

144. Hertling C., Manin Y. *Weak Frobenius manifolds.* - Bonn: 1988. - 9 p. (*Preprint / Max-Planck-Inst.*, math.QA/9810132).

145. Dubrovin B. *Geometry of 2D topological field theories // Lect. Notes Math.* - 1996. - V. **1620**. - P. 120–348.

146. Dubrovin B. *Painlevé transcendents andtwo-dimensional topological field theory.* - Trieste: 1998. - 117 p. (*Preprint / SISSA*; SISSA 24/98/FM, math.AG/9803107).

147. Vacaru S. I. *Superstrings in higher order extensions of Finsler superspaces // Nucl. Phys.* - 1997. - V. **B494**. - P. 590–656.

148. Vacaru S. *Interactions and strings in higher order anisotropic and inhomogeneous superspace and isospaces.* - Palm Harbor: 1997. - 33 p. (*Preprint / Inst. Basic Research*, physics/9706038).

149. Vacaru S. I. *Spinors, nonlinear connections, and nearly autoparallel maps of generalized Finsler spaces.* - Chisinău: 1996. - 77 p. (*Preprint / Inst. Appl. Phys.*, dg-ga/9609004).

150. Рунд Х. *Дифференциальная геометрия финслеровых пространств.* - М.: *Наука*, 1981. - 502 с.

151. Beil R. G. *New class of Finsler metrics // Int. J. Theor. Phys.* - 1989. - V. **28**. - № 6. - P. 659–667.

152. Bimonte G., Musto R., Stern A., Vitale P. *Comments on the non-commutative description of classical gravity.* - Tuscaloosa: 1998. - 13 p. (*Preprint / Univ. Alabama*; UAHEP982, gr-qc/9805022).

153. Dragon N., Günter H., Theis U. *Supergravity with a noninvertible vierbein.* - Hannover: 1997. - 8 p. (*Preprint / Univ. Hannover*; ITP-UH-21/97, hep-th/9707238).

154. Leites D. *Selected problems of supermanifold theory* // *Duke Math. J.* - 1987. - V. **54**. - № 2. - P. 649–656.

155. Sitarz A. *On the n-ary algebras, semigroups and their universal covers.* - Paris: 1998. - 10 p. (*Preprint / Univ. Pierre et Marie Curie*, `math.RA/9807019`).

156. Любашенко В. В. *Березиниан в некоторых моноидальных категориях* // *Укр. мат. журнал.* - 1986. - Т. **38**. - № 5. - С. 588–592.

157. Balteanu C., Fiedorowicz Z., Schwaenzl R., Vogt R. *Iterated monoidal categories.* - Columbus: 1998. - 55 p. (*Preprint / Ohio State Univ.*; 98-5, `math.AT/9808082`).

158. Bohta S. G., Buys A. *Nilpotence, solvability and radicals in categories* // *Quaestiones Math.* - 1991. - V. **14**. - № 2. - P. 129–137.

159. Gomes G. M. S., Howie J. M. *Nilpotents in finite symmetric inverse semigroups* // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* - 1987. - V. **30**. - № 3. - P. 383–395.

160. Munn W. D. *Nil ideals in inverse semigroup algebras* // *J. London Math. Soc.* - 1987. - V. **35**. - P. 433–438.

161. Sotomayor J. *Inversion of smooth mappings* // *Z. Angew. Math. Phys.* - 1990. - V. **41**. - № 2. - P. 306–310.

162. Beehler E., Johanson A. *Semigroups and the structure of categories* // *Math. Slovak.* - 1976. - V. **26**. - № 3. - P. 207–216.

163. Brooks B. P., Clark W. E. *On the categoricity of semigroup-theoretical properties* // *Semigroup Forum.* - 1971/72. - V. **3**. - № 3. - P. 259–266.

164. Kang S.-J., Kwon J.-H. *Graded Lie superalgebras, supertrace formula, and orbit Lie superalgebras.* - Seoul: 1998. - 54 p. (*Preprint / Seoul Nat. Univ.*, `math.RT/9809025`).

165. Kelarev A. *On semigroup graded PI-algebras // Semigroup Forum.* - 1993. - V. **47**. - P. 294–298.

166. Kelarev A. *Radicals of graded rings and applications to semigroup rings // Commun. Algebra.* - 1992. - V. **20**. - № 3. - P. 681–700.

167. Juriev D. V. *On the infinite-dimensional hidden symmetries.* **II**. *q_R-conformal modular functors.* - Moscow: 1997. - 21 p. (*Preprint / Res. Center for Math. Phys. and Informatics "Thalassa Aitheria"*, `funct-an/9701009`).

168. Juriev D. V. *Hidden symmetries and categorical representation theory.* - Moscow: 1996. - 6 p. (*Preprint / Res. Center for Math. Phys. and Informatics "Thalassa Aitheria"*, `q-alg/9612026`).

169. Kontsevich M., Manin Y. *Gromov-Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // Comm. Math. Phys.* - 1994. - V. **164**. - № 3. - P. 525–562.

170. Parks A. D. *The Fermi and Bose congruences for free semigroups on two generators // J. Math. Phys.* - 1992. - V. **33**. - № 11. - P. 3649–3652.

171. Lesniewski A., Osterwalder K. *Superspace formulation of the Chern character of a theta-summable Fredholm module // Comm. Math. Phys.* - 1995. - V. **168**. - P. 643–651.

172. Gaberdiel M. R., Zwiebach B. *Tensor constructions of open string theories* **II***: Vector bundles, D-branes and orientifold groups // Phys. Lett.* - 1997. - V. **B410**. - № 151. - P. 11.

173. Минахин В. В. *Березинианы в подстановочных структурах // Функц. анализ и его прил.* - 1988. - Т. **22**. - № 4. - С. 90–91.

174. De Witt B. S. *Supermanifolds.* - Cambridge: *Cambridge Univ. Press*, 2nd edition. - 1992. - 407 p.

175. Rabin J. M., Crane L. Global properties of supermanifolds // Comm. Math. Phys. - 1985. - V. 100. - ¼ 2. - P. 141{160.

176. Rabin J. M. Supermanifolds and super Riemann surfaces // Super Field Theories - New York: Plenum Press, 1987. - P. 557{569.

177. bI[OP r . l ., kRITTENDEN r d . gEOMETRIQ MNOGOOBRAZIJ. mIR , 1967. -335 S.

178. {WARC d. dIFFERENCIALXNAQ GEOMETRIQ I TOPOLOGIQ. mIR , 1970. -221 S.

179. Kosinski A. A. Di®erential Manifolds. - Boston: Academic Press, 1993. -243 p.

180. Okubo T. Di®erential Geometry. - New York: Dekker, 1987. -425 p.

181. Bryant P. Global properties of supermanifolds and their bodies //

198. Kobayashi M. Semi-invariant submanifolds in an f -manifold with complemented frames// Tensor

221. Паламодов В. П. *Инварианты аналитических $\mathbb{Z}_2$ многообразий // Функц. анализ и его прил.* - 1983. - Т. **18**. - № 1. - С. 78–79.

222. Bohr C. *On the relation between lifting obstructions and ordinary obstructions.* - München: 1998. - 9 p. (*Preprint / Math. Inst.*, `math.AT/9812054`).

223. Milnor J. W., Stasheff J. D. *Characteristic Classes.* - Princeton: *Princeton University Press*, 1974. - 231 p.

224. Kamber F. W., Tondeur P. *Foliated bundles and characteristic classes // Lect. Notes Math.* - 1975. - V. **493**. - P. 1–234.

225. Matsumoto S., Kakazu K. *A note on topology of supermanifolds // J. Math. Phys.* - 1986. - V. **27**. - № 11. - P. 2690–2692.

226. Pestov V. *Interpreting superanalycity in terms of convergent series // Class. Q. Grav.* - 1989. - V. **6**. - № 8. - P. L145–L149.

227. Rabin J. M. *Super Riemann surfaces // Mathematical Aspects of String Theory.* - Singapore: *World Sci.*, 1987. - P. 345–367.

228. Rogers A. *Super Riemann surfaces // The Interface of Mathematics and Particle Physics.* - New York: *Clarendon Press*, 1990. - P. 87–96.

229. Bednarek A., Wallace A. *The functional equation $(xy)(yz) = xz$ // Rev. Remaine Math. Pures Appl.* - 1971. - V. **16**. - P. 3–6.

230. Fomenko A. T., Fuchs D. B., Gutenmacher V. L. *Homotopic Topology.* - Budapest: *Akadémiai Kiadó*, 1986.

231. Фоменко А. Т., Фукс Д. Б. *Курс гомотопической топологии.* - М.: *Наука*, 1989. - 494 с.

232. Hall T. E. *On regular semigroups // J. Algebra.* - 1973. - V. **24**. - P. 1–24.

233. Ault J. *Regular semigroups which are extensions // Pacific J. Math.* - 1972. - V. **41**. - P. 303–306.

234. Cliford A. H. *The fundamental representation of a regular semigroup* // *Semigroup Forum*. - 1975/76. - V. **10**. - № 1. - P. 84–92.

235. Ault J., Petrich M. *The structure of W -regular semigroups* // *J. Reine Angew. Math.* - 1971. - V. **251**. - P. 110–141.

236. Munn W. D., Penrose R. *Pseudoinverses in semigroups* // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* - 1961. - V. **57**. - P. 247–250.

237. Fabrici I. *Classes of regularity in semigroups* // *Mat. Gasopis Sloven. Akad. Vied.* - 1969. - V. **19**. - P. 299–304.

238. Hall T. *Congruences and Green's relations on regular semigroups* // *Glasgow Math. J.* - 1972. - V. **11**. - P. 167–175.

239. Fitz-Gerald D. G. *On inverses of products of idempotents in regular semigroups* // *J. Austr. Math. Soc.* - 1972. - V. **13**. - P. 335–337.

240. Cliford A. H. *The fundamental representation of a completely regular semigroup* // *Semigroup Forum*. - 1976. - V. **12**. - № 4. - P. 341–346.

241. Penrose R. *A generalized inverse for matrices* // *Math. Proc. Cambridge Phil. Soc.* - 1955. - V. **51**. - P. 406–413.

242. Rao C. R., Mitra S. K. *Generalized Inverse of Matrices and its Application*. - New York: *Wiley*, 1971. - 251 p.

243. Miao J.-M. *General expressions for the Moore-Penrose inverse of a* 2×2 *block matrix* // *Linear Alg. and Appl.* - 1991. - V. **151**. - № 1. - P. 1–15.

244. Decell H. P. *A characterization of the maximal subgroups of the semigroup of* $n \times n$ *complex matrices* // *Theory and Application of Generalized Inverses of Matrices*. - Lubbock: *Texas Techn. Press*, 1968. - P. 177–182.

245. Rabson G. *The Generalized Inverses in Set Theory and Matrix Theory*. - Providence: *Amer. Math. Soc.*, 1969. - 324 p.

246. Nashed M. Z. *Generalized Inverses and Applications.* - New York: *Academic Press*, 1976. - 321 p.

247. Davis D. L., Robinson D. W. *Generalized inverses of morphisms* // *Linear Algebra Appl.* - 1972. - V. **5**. - P. 329–338.

248. Thomas R. P. *An obstructed bundle on a Calabi-Yau 3-fold.* - Oxford: 1999. - 8 p. (*Preprint / Math. Inst.*, `math.AG/9903034`).

249. Рокцький . О. *деальн розширення пвкатегорй* // *ДАН УРСР.* - 1974. - № 4. - С. 310–313.

250. Simpson C. *On the Breen-Baez-Dolan stabilization hypothesis for Tamsamani's weak n-categories.* - Tolouse: 1998. - 17 p. (*Preprint / CNRS*, `math.CT/9810058`).

251. Leinster T. *General operads and multicategories.* - Cambridge: 1998. - 34 p. (*Preprint / Univ. Cambridge*, `math.CT/9810053`).

252. Breen L. *Braided n-categories and Σ-structures.* - Paris: 1998. - 25 p. (*Preprint / Univ. Paris*, `math.CT/9810045`).

253. Leinster T. *Generalized enrichment for categories and multicategories.* - Cambridge: 1999. - 79 p. (*Preprint / Univ. Cambridge*, `math.CT/9901139`).

254. Gaucher P. *Homotopy invariants of multiple categories and concurrency in computer science.* - Strasbourg: 1999. - 34 p. (*Preprint / Inst. Rech. Math. Avan.*, `math.CT/9902151`).

255. Simpson C. *Homotopy types of strict 3-groupoids.* - Tolouse: 1998. - 29 p. (*Preprint / CNRS*, `math.CT/9810059`).

256. Bartocci C., Bruzzo U. *Some remarks on the differential-geometric approach to supermanifolds* // *J. Geom. and Phys.* - 1987. - V. **4**. - № 3. - P. 391–404.

257. Sardanashvily G. *On the geometric arena of supermechanics.* - Moscow: 1999. - 6 p. (*Preprint /*

305. Chryssomalakos C., de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Pérez Bueno J. C. *The geometry of branes and extended superspaces.* - Valladolid: 1999. - 34 p. (*Preprint / Univ. de Valladolid*; FTUV-99/20, hep-th/9904137).

306. Kallosh R. *Black holes, branes and superconformal symmetry.* - Stanford: 1999. - 9 p. (*Preprint / Stanford Univ.*; SU-ITP-99/4, hep-th/9901095).

307. Claus P., Derix M., Kallosh R., Kumar J., Townsend P. K., Van Proeyen A. *Black holes and superconformal mechanics.* - Stanford: 1998. - 9 p. (*Preprint / Stanford Univ.*; SU-ITP-98/27, hep-th/9804177).

308. de Azcárraga J. A., Izquierdo J. M., Pérez Bueno J. C., Townsend P. K. *Superconformal mechanics, black holes and non-linear realizations.* - Cambridge: 1998. - 20 p. (*Preprint / DAMTP*; DAMTP-1998-136, hep-th/9810230).

309. Maldacena J. *The large \ limit of superconformal field theories and supergravity.* - Cambridge: 1997. - 20 p. (*Preprint / Harvard Univ.*; HUTP-97/A097, hep-th/9711200).

310. Douglas M. R., Randjbar-Daemi S. *Two lectures on the AdS/CFT correspondence.* - Trieste: 1999. - 21 p. (*Preprint / ICTP*; IC/99/7, hep-th/9902022).

311. Ghezelbash A. M., Khorrami M., Aghamohammadi A. *Logarithmic conformal field theories and AdS correspondence.* - Tehran: 1998. - 9 p. (*Preprint / Alzahra Univ.*, hep-th/9807034).

312. Kallosh R., Van Proeyen A. *Conformal symmetry of supergravities in AdS spaces.* - Leuven: 1998. - 14 p. (*Preprint / Kath. Univ.*; KUL-TF-98/20, hep-th/9804099).

313. D'Hoker E., Freedman D. Z., Skiba W. *Field theory tests for*

correlators in the AdS/CFT correspondence. - Cambridge: 1998. - 14 p. (*Preprint / MIT*; MIT-CTP-2756, hep-th/9807098).

314. Witten E. *AdS/CFT correspondence and topological field theory.* - Princeton: 1998. - 33 p. (*Preprint / Inst. Adv. Study*, hep-th/9812012).

315. Elitzur S., Feinerman O., Giveon A., Tsabar D. *String theory on* $AdS_3 \times S^3 \times S^3 \times S^1$. - Jerusalem: 1998. - 12 p. (*Preprint / Hebrew Univ.*; RI-11-98, hep-th/9811245).

316. Aharony O., Oz Y., Yin Z. *M theory on* $AdS_p \times S^{11-p}$ *and superconformal field theories.* - Piscataway: 1998. - 12 p. (*Preprint / Rutgers Univ.*; RU-98-05, hep-th/9803051).

317. Giveon A., Kutasov D., Seiberg N. *Comments on string theory on* AdS_3. - Princeton: 1998. - 46 p. (*Preprint / Inst. Adv. Study*; IASSNS-HEP-98-52, hep-th/9806194).

318. Leigh R. G., Rozali M. *The large N limit of the* $(2,0)$ *superconformal field theory.* - Urbana: 1998. - 11 p. (*Preprint / Univ. of Illinois*; ILL-(TH)-98-01, hep-th/9803068).

319. Giddings S. B. *A brief introduction to super Riemann surface theory* // *Superstrings '88.* - Singapore: *World Sci.*, 1989. - P. 129–158.

320. D'Hoker E., Phong D. H. *A geometry of string perturbation theory* // *Rev. Mod. Phys.* - 1988. - V. **60**. - № 4. - P. 917–1065.

321. Batchelor M., Bryant P. *Graded Riemann surfaces* // *Comm. Math. Phys.* - 1988. - V. **114**. - № 2. - P. 243–255.

322. Rabin J. M., Topiwala P. *Super Riemann surfaces are algebraic curves.* - San Diego: 1988. - 32 p. (*Preprint / Univ. California*).

323. D'Hoker E., Phong D. H. *Superstrings, super Riemann surfaces and supermoduli space.* - Los Angeles: 1989. - 25 p. (*Preprint / Univ.*

335. Knizhnik V. G. *Covariant superstring fermion amplitudes from the sum over fermionic surfaces* // *Phys. Lett.* - 1986. - V. **B178**. - № 1. - P. 21–27.

Inst. Cond. Matter Phys.; ICMP-98-22E, hep-th/9811020).

378. Акулов В. П., Дуплий С. А. *Квазиклассическое квантование в суперсимметричной квантовой механике // Укр. физ. журнал.* - 1988. - Т. **33**. - № 2. - С. 309–311.

379. Manton N. S. *Deconstructing supersymmetry.* - Cambridge: 1998. - 19 p. (*Preprint / Univ. Cambridge*; DAMTP 1998-39, hep-th/9806077).

380. Akulov V. P., Duplij S. *Nilpotent marsh and SUSY QM.* - New York: 1998. - 8 p. (*Preprint / City Coll. of City Univ.*, hep-th/9809089).

381. Громов Н. А. *Контракция и аналитические продолжения классических групп. Единый подход.* - Сыктывкар: *Уральское отделение АН СССР*, 1990. - 220 с.

382. Gromov N. A. *Contraction of algebraical structures and different couplings of Cayley-Klein and Hopf structures // Group Theory in Physics.* - Edirne: *Turkish Journal of Physics, Vol. 21, No. 3*, 1995. - P. 113–119.

383. Ballesteros A., Gromov N. A., Herranz F. J., del Olmo M. A., Santander M. *Lie bialgebra contractions and quantum deformations of quasiorthogonal algebras // J. Math. Phys.* - 1995. - V. **36**. - P. 5916–5937.

384. Barbaro M. B., Molinari A., Palumbo F. *Bosonization and even Grassmann variables // Nucl. Phys.* - 1997. - V. **B487**. - P. 492–511.

385. Palumbo F. *Nilpotent commuting scalar fields and random walk // Phys. Lett.* - 1994. - V. **B328**. - P. 79–83.

386. Palumbo F. *Nilpotent commuting fields // Nucl. Phys. Proc. Suppl.* - 1994. - V. **34**. - P. 522–531.

387. Palumbo F. *ϕ^4 theory with even elements of a Grassmann algebra* // *Phys. Rev.* - 1994. - V. **D50**. - P. 2826–2829.

388. Гальперин А., Иванов Е., Огиевецкий В. *Грассманова аналитичность и расширение суперсимметрии* // *Письма в ЖЭТФ*. - 1981. - Т. **33**. - № 3. - С. 176–181.

389. Pestov V. *Soul expansion of G^∞ superfunctions* // *J. Math. Phys.* - 1993. - V. **34**. - № 7. - P. 3316–3323.

390. Hsiang W. H. *Invertibility and monotonicity on function systems* // *An. Inst. Math. Univ. Nac. Aut. Mexico*. - 1988. - V. **28**. - P. 27–45.

391. Magill K. D. *Recent results and open problems in semigroups of continuous selfmaps* // *Russian Math. Surv.* - 1980. - V. **35**. - № 1. - P. 91–97.

392. Когаловский С. Р. *О мультипликативных полугруппах колец* // *Теория полугрупп и ее приложения*. - Саратов: *Изд-во Саратовского университета*, 1965. - С. 251–261.

393. Gilmer R. *Multiplicative Ideal Theory*. - New York: *Dekker*, 1972.

394. Hiley D. M., Wilson M. C. *Associative algebras satisfying a semigroup identity*. - Tuscaloosa: 1998. - 11 p. (*Preprint / Univ. Alabama*, `math.RA/9802039`).

395. Eremenko A. *On the characterization of a riemann surface by its semigroup of endomorphisms* // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1993. - V. **338**. - № 1. - P. 123–131.

396. Hinkkanen A. *Functions conjugating to entire functions and semigroups of analytic endomorphisms* // *Complex Variables Theory Appl.* - 1992. - V. **18**. - № 3–4. - P. 149–154.

397. Неретин Ю. А. *Голоморное расширение представлений группы диффеоморфизмов* // *Мат. сборник*. - 1989. - Т. **180**. - № 5. -

421. Magill K. D. *Homomorphic images of restrictive star semigroups*

446. Clifford A. H. *Remarks on* 0*-minimal quasi-ideals in semigroups* // *Semigroup Forum*. - 1978. - V. **16**. - № 2. - P. 183–196.

447. Steinfeld O. *Quasi-ideals in Rings and Semigroups*. - Budapest: *Akadémiai Kiado*, 1978.

448. Steinfeld O., Thang T. T. *Remarks on canonical quasi-ideals in semigroups* // *Beitrage Alg. Geom*. - 1988. - V. **26**. - P. 127–135.

449. Catino F. *On bi-ideals in eventually regular semigroups* // *Riv. Mat. Pure Appl*. - 1989. - V. **4**. - P. 89–92.

450. Miccoli M. M. *Bi-ideals in orthodox semigroups* // *Note Mat*. - 1987. - V. **7**. - № 1. - P. 83–89.

451. Lajos S. *Generalized ideals in semigroups* // *Acta Sci. Math. Seged*. - 1961. - V. **22**. - № 1. - P. 217–222.

452. Lajos S. *Bi-ideals in semigroups.* **I**. *A survey* // *Pure Math. Appl*. - 1992. - V. **A2**. - № 3–4. - P. 215–237.

453. Hmelnitsky I. L. *On semigroups with the idealizer condition* // *Semigroup Forum*. - 1985. - V. **32**. - P. 135–144.

454. Long D. Y. *A necessary and sufficient condition for the Shevrin problem* // *Chinese Ann. Math*. - 1992. - V. **A13**. - № 3. - P. 360–363.

455. Shevrin L. N., Prosvirov A. S. *Semigroups with isotone idealizer function* // *Trans. Moscow Math. Soc*. - 1973. - V. **29**. - P. 235–246.

456. Abrhan I. *Note on the set of nilpotent elements and on redicals of semigroups* // *Mat. Gasopis Sloven. Akad. Vied*. - 1971. - V. **21**. - P. 124–130.

457. Garba G. U. *Nilpotents in semigroups of partial one-to-one transformations* // *Semigroup Forum*. - 1994. - V. **48**. - № 1. - P. 37–49.

458. King D. R. *The component groups of nilpotents in exceptional simple Lie algebras* // *Commun. Algebra*. - 1992. - V. **20**. - № 1. - P. 219–284.

459. Howie J. M. *Embeddingsemigroupsin nilpotent-generated semigroups* // *Math. Slovaca*. - 1989. - V. **39**. - № 1. - P. 47–54.

460. Giri R. D., Wazalwar A. K. *Prime ideals and prime radicals in noncommutative semigroups* // *Kyungpook Math. J.* - 1993. - V. **33**. - № 1. - P. 37–48.

461. Levi I. *Green's relations on G-normal semigroups*. - Louisville: 1992. - 15 p. (*Preprint / Univ. Louisvile*).

462. Levi I., Seif S. *On congruences of G-normal semigroups* // *Semigroup Forum*. - 1991. - V. **43**. - P. 93–113.

463. Levi I. *Normal sets and their order-automorphisms* // *Note Mat.* - 1987. - V. **7**. - P. 159–166.

464. Levi I. *Order-automorphisms of normal subsets of a power set* // *Discr. Math.* - 1987. - V. **66**. - P. 139–155.

465. Schein B. M. *Cosets in groups and semigroups* // *Semigroups With Applications*. - River Edge: *World Sci.*, 1992. - P. 205–221.

466. Levi I. *Normal semigroups of one-to-one transformations* // *Proc. Edinburgh Math. Soc.* - 1991. - V. **34**. - P. 65–76.

467. Symons J. S. V. *Normal transformation semigroups* // *J. Austr. Math. Soc.* - 1976. - V. **A22**. - P. 385–390.

468. Levi I. *Automorphisms of normal partial transformation semigroups* // *Glasgow Math. J.* - 1987. - V. **29**. - P. 149–157.

469. Levi I., Williams W. *Normal semigroups of partial one-to-one transformations,* **2** // *Semigroup Forum*. - 1991. - V. **43**. - P. 344–356.

470. Meakin J. *The partially ordered set of $\mathscr{J}$-classes of a semigroup* // *J. London Math. Soc.* - 1980. - V. **21**. - P. 244–256.

471. Petrich M. *The translational hull in semigroups and rings* // *Semigroup Forum.* - 1970. - V. **1**. - P. 293–360.

472. Ault J. *Translational hull of an inverse semigroup* // *Glasgow Math. J.* - 1973. - V. **14**. - P. 56–64.

473. Anderson L., Hunter R., Koch R. *Some results on stability in semigroups* // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1965. - V. **117**. - P. 521–529.

474. Штерн А. И. *Квазипредставления и псевдопредставления* // *Функц. анализ и его прил.* - 1991. - Т. **25**. - № 2. - С. 70–73.

475. Файзиев В. А. *О псевдохарактерах свободной полугруппы, инвариантных относительно ее эндоморфизмов* // *Успехи мат. наук.* - 1992. - Т. **47**. - № 2. - С. 205–206.

476. Файзиев В. А. *О псевдохарактерах, инвариантных относительно эндоморфизмов полугрупп* // *ДАН Тадж. ССР. Сер. Математика.* - 1988. - Т. **31**. - № 9. - С. 567–569.

477. Anderson J. *Characters of commutative semigroups.* **1** // *Math. Sem. Notes.* - 1979. - V. **7**. - № 2. - P. 301–308.

478. Comfort W. W., Hill P. *On extending nonvanishing semicharacters* // *Proc. Amer. Math. Soc.* - 1966. - V. **17**. - P. 936–941.

479. Ross K. A. *Extending characters on semigroups* // *Proc. Amer. Math. Soc.* - 1961. - V. **12**. - P. 15.

480. Brown D. R., Friedberg M. *A new notion of semicharacter* // *Trans. Amer. Math. Soc.* - 1969. - V. **141**. - P. 387–401.

481. Grassmann H. *Characters and the structure of finite semigroups* // *Semigroup Forum.* - 1984. - V. **30**. - P. 211–220.

482. McAlister D. B. *Characters of finite semigroups* // *J. Algebra*. - 1972. - V. **22**. - P. 183–200.

483. Manin Y. I. *Topics in Noncommutative Differential Geometry*. - Princeton: *Princeton University Press*, 1991.

484. Felipe R., Ongay F. *N-extended superelliptic integrable systems* // *J. Math. Phys.* - 1998. - V. **39**. - № 7. - P. 3730–3737.

485. Gieres F., Gourmelen S. *$d = 2$, $N = 2$ superconformally covariant operators and super W-algebras* // *J. Math. Phys.* - 1998. - V. **39**. - № 6. - P. 3453–3475.

486. Delduc F., Gallot L. *Supersymmetric Drinfeld-Sokolov reduction* // *J. Math. Phys.* - 1998. - V. **39**. - № 9. - P. 4729–4745.

487. Huang W.-J. *Superconformal covariantization of superdifferential operator on $(1|1)$ superspace and classical $N = 2$ W superalgebras* // *J. Math. Phys.* - 1994. - V. **35**. - № 5. - P. 2570–2582.

488. Devchand C., Schiff J. *The supersymmetric Camassa-Holm equation*

512. Акулов В. П., Волков Д. В.

523. Ferrara S., Maiani L., West P. C. *Non-linear representations of extended supersymmetry with central charges // Z. Phys.* - 1983. - V. **C19**. - P. 267–273.

524. Samuel S., Wess J. *A superfield formulation of the non-linear realization of supersymmetry and its coupling to supergravity // Nucl. Phys.* - 1983. - V. **B221**. - № 1. - P. 153–177.

525. Samuel S., Wess J. *Secret supersymmetry // Nucl. Phys.* - 1984. - V. **B233**. - № 3. - P. 488–510.

526. Акулов В. П., Бандос И. А., Зима В. Г. *Нелинейная реализация расширенной суперконформной симметрии // Теор. мат. физ.* - 1983. - Т. **56**. - № 1. - С. 3–14.

527. Marchildon L. *Nonlinear realization of the superconformal group and conformal supergravity // Phys. Rev.* - 1978. - V. **18**. - № 8. - P. 2804–2809.

528. Hamamoto S. *Nonlinear realization of graded conformal group // Progr. Theor. Phys.* - 1980. - V. **63**. - № 6. - P. 2095–2111.

529. Hamamoto S. *Nonlinear realization of affine group on superspace // Progr. Theor. Phys.* - 1980. - V. **64**. - № 4. - P. 1453–1465.

530. Hughes J., Polchinski J. *Partially broken supersymmetry and superstring // Nucl. Phys.* - 1986. - V. **B278**. - № 1. - P. 147–169.

531. Kunitomo H. *On the nonlinear realization of the superconformal symmetry // Phys. Lett.* - 1995. - V. **B343**. - № 1. - P. 144–146.

532. Berkovits N., Vafa C. *On the uniqueness of string theory // Mod. Phys. Lett.* - 1994. - V. **A9**. - P. 653–657.

533. Kunitomo H., Sakuguchi M., Tokura A. *A hierarchy of super w strings // Progr. Theor. Phys.* - 1994. - V. **92**. - P. 1019–1032.

534. Ishikawa H., Kato M. *Note on $N = 0$ string as $N = 1$ string* // *Mod. Phys. Lett.* - 1994. - V. **A9**. - P. 725–728.

535. Kato M. *Physical spectra in string theories.* - Tokyo: 1995. - 17 p. (*Preprint / University of Tokyo*; UT-Komaba/95-12, `hep-th/9512201`).

536. Berkovits N., Ohta N. *Embeddings for non-critical superstrings* // *Phys. Lett.* - 1994. - V. **B334**. - № 1. - P. 72–78.

537. McArthur I. N. *Gauging of nonlinearly realized symmetries* // *Nucl. Phys.* - 1995. - V. **B452**. - P. 456–467.

538. McArthur I. N. *The Berkovits-Vafa construction and nonlinear realizations* // *Phys. Lett.* - 1995. - V. **B342**. - № 1. - P. 94–98.

539. Ivanov E., Krivonos S., Pichugin A. *Nonlinear realizations of w_3 symmetry* // *Phys. Lett.* - 1992. - V. **B284**. - P. 260–267.

540. Belucci S., Gribanov V., Krivonos S., Pashnev A. *Nonlinear realizations of $W_3^{(2)}$ algebra* // *Phys. Lett.* - 1994. - V. **A191**. - P. 216–222.

541. Belucci S., Gribanov V., Ivanov E., Krivonos S., Pashnev A. *Nonlinear realizations of superconformal and W algebras as embeddings of strings* // *Nucl. Phys.* - 1998. - V. **B510**. - P. 477–501.

542. Inanov E., Krivonos S., Leviant V. *Geometric superfield approach to superconformal mechanics* // *J. Phys.* - 1989. - V. **A22**. - № 19. - P. 4201–4222.

543. Bandos I. A., Sorokin D., Volkov D. *On the generalized action principle for superstrings and supermembranes* // *Phys. Lett.* - 1995. - V. **B352**. - P. 269–275.

544. Bandos I. A., Sorokin D., Tonin M., Pasti P., Volkov D. V. *Superstrings and supermembranes in the doubly supersymmetric*

geometrical approach // *Nucl. Phys.* - 1995. - V. **B446**. - P. 79–118.

545. Kallosh R. *Volkov-Akulov theory and D-branes* // *Supersymmetry and Quantum Field Theory*. - Heidelberg: *Springer-Verlag*, 1998. - P. 49–58.

546. Claus P., Kallosh R., Kummar J., Townsend P. K., van Proeyen A. *Conformal theory of M2, D3, M5, and 'D1+D5' branes*. - Stanford: 1998. - 32 p. (*Preprint / Stanford Univ.*; SU-ITP-98/02, hep-th/9801206).

547. Rocek M., Tseytlin A. A. *Partial breaking of global D = 4 supersymmetry, constrained superfields, and 3-brane actions*. - Stony Brook: 1998. - 28 p. (*Preprint / Inst. Theor. Phys.*; ITP-SB-98-68, hep-th/9811232).

548. Bellucci S., Ivanov E., Krivonos S. *Partial breaking of N = 1 D = 10 supersymmetry*. - Dubna: 1998. - 12 p. (*Preprint / JINR*, hep-th/9811244).

549. Ivanov E., Krivonos S. *N = 1 D = 4 supermembrane in the coset approach*. - Dubna: 1999. - 11 p. (*Preprint / JINR*, hep-th/9901003).

550. Ivanov E. A., Kapustnikov A. A. *General relationship between linear and nonlinear realisations of supersymmetry* // *J. Phys.* - 1978. - V. **A11**. - № 12. - P. 2375–2384.

551. Ivanov E. A., Kapustnikov A. A. *The non-linear realisation structure of modeals with spontaneously broken supersymmetry* // *J. Phys.* - 1982. - V. **G8**. - № 2. - P. 167–191.

552. Uematsu T., Zachos C. K. *Structure of phenomenological lagrangians for broken supersymmetry* // *Nucl. Phys.* - 1982. - V. **B201**. - № 2. - P. 250–268.

553. Lindström U., Roček M. *Constrained local superfields* // *Phys. Rev.*

- 1979. - V. D19. - № 8. - P. 2300{2303

554. Rocek M. Linearizing the Volkov-Akulov model// Phys. Rev. Lett. - 1978. - V. 41. - № 7. - P. 451{453

555. Wess J. Nonlinear realization of supersymmetry// Mathematical Aspects of Superspace. - Dordrecht: D. Reidel, 1984. - P. 1{14.

556. Kobayashi K., Uematsu T. Non-linear realization of superconformal symmetry// Nucl. Phys. - 1986. - V. B263. - № 2. - P. 309{324

557. Zumino B. Non-linear realization of supersymmetry in anti De Sitter space// Nucl. Phys. - 1977. - V. B127. - P. 189{201

558. Наймарк М. А. tEORIQ PREDSTAWLENIJ GRUPP. M.: nAUKA, 1976. - 559 с.

559. Кириллов А. А. |LEMENTY TEORII PREDSTAWLENIJ. M.: nAUKA, 1978. -343 с.

560.

596. Kiritsis E. B. *Structure of $N = 2$ superconformally invariant unitary "minimal" theories: Operator algebra and correlation functions* // *Phys. Rev.* - 1987. - V. **36**. - № 10. - P. 3048–3065.

597. Yu M., Zheng H. B. *$N = 2$ superconformal invriance in two-dimensional quantum field theories* // *Nucl. Phys.* - 1986. - V. **B288**. - № 1. - P. 275–300.

598. Ito K. *$N = 2$ super coulomb gas formalism* // *Nucl. Phys.* - 1990. - V. **B332**. - № 3. - P. 566–582.

599. Aspinwall P. S. *The moduli space of $N = 2$ superconformal field theories.* - Ithaca: 1994. - 53 p. (*Preprint / Cornell Univ.*; CLNS-94/1307, `hep-th/9412115`).

600. Chung W.-S., Kang S.-K., Lee J.-J., You C.-K., Kim J.-K. *$N = 2$ superconformal gravity and $osp\,(2/2)$ Kac-Moody algebra in $(1 + 1)$ dimensions* // *Phys. Lett.* - 1990. - V. **B238**. - № 2,3,4. - P. 252–256.

601. Shaflekhani A., Chung W. S. *$N = 2$ superconformal field theory on the basis of $osp\,(2|2)$.* - Tehran: 1997. - 10 p. (*Preprint / Inst. Studies Theor. Phys. and Math.*, `hep-th/9703222`).

602. Delduc F., Gieres F., Gourmelen S. *$d = 2$, $N = 2$ superconformal symmetries and models* // *Class. Q. Grav.* - 1997. - V. **14**. - P. 1623–1649.

603. Martinec E. *M-theory and $N = 2$ strings.* - Chicago: 1997. - 29 p. (*Preprint / Enrico Fermi Inst.*, `hep-th/9710122`).

604. Hanany A., Hori K. *Branes and $N = 2$ theories in two dimensions.* - Princeton: 1997. - 70 p. (*Preprint / Inst. Adv. Study*; IASSNS-HEP-97/81, `hep-th/9707192`).

605. Obers N. A., Pioline B. *U-duality and M-theory.* - Palaiseau: 1998. - 154 p. (*Preprint / Centre de Phys. Theor.*; CPHT-S639-0898, `hep-th/9809039`).

606. Argurio R. *Brane physics in M-theory.* - Bruxelles: 1998. - 204 p. (*Preprint / Univ. Libre de Bruxelles*; ULB-TH-98/15, Ph.D. Thesis, hep-th/9807171).

607. Bachas C. P. *Lectures on D-branes.* - Palaiseau: 1998. - 60 p. (*Preprint / Ecole Polytechnique*; CPHT/CL-615-0698, hep-th/9806199).

608. Nicolai H., Helling R. *Supermembranes and M(atrix) theory.* - Potsdam: 1998. - 46 p. (*Preprint / Albert-Einstein Inst.*; AEI-093, hep-th/9809103).

609. Giveon A., Kutasov D. *Brane dynamics and gauge theory.* - Jerusalem: 1998. - 289 p. (*Preprint / Hebrew Univ.*; RI-2-98, hep-th/9802067).

610. Ooguri H., Vafa C. *Geometry of $N = 2$ string* // *Nucl. Phys.* - 1991. - V. **B361**. - № 2. - P. 469–518.

611. Bonini M., Gava E., Iengo R. *Amplitudes in the $N = 2$ string* // *Mod. Phys. Lett.* - 1991. - V. **A6**. - № 9. - P. 795–803.

612. Li M. *Gauge symmetries and amplitudes in $N = 2$ strings* // *Nucl. Phys.* - 1992. - V. **B395**. - P. 129–137.

613. Berkovits N. *Super-Poincaré invariant superstring field theory* // *Nucl. Phys.* - 1985. - V. **B450**. - P. 90–102.

614. Kazama Y., Suzuki H. *Characterization of $N = 2$ superconformal models generated by the coset space method* // *Phys. Lett.* - 1989. - V. **216**. - № 1,2. - P. 112–116.

615. Ohta N., Suzuki H. *$N = 2$ superconformal models and their free field realization* // *Nucl. Phys.* - 1990. - V. **B322**. - № 1. - P. 146–168.

616. Kazama Y., Suzuki H. *Bosonic construction of conformal field theories with extended supersymmetry* // *Mod. Phys. Lett.* - 1988. - V. **4**. - № 3. - P. 235–242.

617. Семихатов А. М. *Суперсимметричные косет-модели в терминах свободных суперполей* // *Письма в ЖЭТФ*. - 1989. - Т. **50**. - № 11. - С. 441–445.

618. Font A., Ibanes L. E., Quevedo F. *String compactifications and* $N = 2$ *superconformal coset constructions* // *Phys. Lett.* - 1989. - V. **224**. - № 1,2. - P. 79–88.

619. Kazama Y., Suzuki H. *New* $N = 2$ *superconformal field theories and superstrings compactificacion* // *Nucl. Phys.* - 1989. - V. **B321**. - № 1. - P. 232–268.

620. Kanno H., Myung Y. *Torsion constraints of* $(2, 0)$ *supergravity and line integrals on* $N = 2$ *super Riemann surfaces* // *Phys. Rev.* - 1989. - V. **40**. - № 6. - P. 1974–1979.

621. Натанзон С. М. *Топологические инварианты и модули гиперболических* $N = 2$ *римановых суперповерхностей* // *Мат. сборник*. - 1993. - Т. **184**. - № 5. - С. 15–31.

622. Cho S. $N = 2$ *super Riemann surfaces* // *Progr. Theor. Phys.* - 1993. - V. **90**. - № 2. - P. 455–463.

623. Myung Y. S. *Spin structures in* $N = 2$ *super Riemann surfaces of genus* 1 // *Int. J. Mod. Phys.* - 1988. - V. **A4**. - № 11. - P. 2779–2787.

624. Falqui G., Reina C. $N = 2$ *super Riemann surfaces and algebraic geometry* // *J. Math. Phys.* - 1990. - V. **31**. - № 4. - P. 948–952.

625. Melzer E. $N = 2$ *supertori and their representation as algebraic curves* // *J. Math. Phys.* - 1988. - V. **29**. - P. 1555–1568.

626. Минк Х. *Перманенты*. - М.: *Мир*, 1982. - 213 с.

627. Ano N. *Geometrical aspect of topologically twisted two-dimensional conformal superalgebra* // *J. Math. Phys.* - 1996. - V. **37**. - P. 880–

659. Witten E. *On the conformal field theory of the Higgs branch* // *J. High*

P. 413–421.

669. Кобаяси Ш. *Группы преобразований в дифференциальной геометрии.* - М.: *Наука*, 1986. - 223 с.

670. Damgaard P. H. *Langevin equations with Grassmann variables* // *Prog. Theor. Phys. Suppl.* - 1993. - V. **111**. - P. 43–52.

671. Grosche C. *Seilberg supertrace formula for super Riemann surfaces, analytic properties of Selberg super Zeta-functions and multiloop contributions for the fermionic string* // *Comm. Math. Phys.* - 1990. - V. **133**. - № 3. - P. 433–486.

672. Супруненко Д. А. *Группы матриц.* - М.: *Наука*, 1972. - 349 с.

673. Mostow G. D. *On maximal subgroups of real Lie groups* // *Adv. Math.* - 1961. - V. **74**. - № 3. - P. 503–517.

674. Мерзляков Ю. И. *Рациональные группы.* - М.: *Наука*, 1987. - 448 с.

675. Kelarev A. V., van der Merwe A. B., van Wyk L. *The minimum number of idempotent generators of an upper triangular matrix algebra* // *J. Algebra.* - 1998. - V. **205**. - P. 605–616.

676. Rosly A., Schwarz A. *Geometry of $N = 1$ supergravity* // *Comm. Math. Phys.* - 1984. - V. **95**. - № 1. - P. 161.

677. Кон П. *Универсальная алгебра.* - М.: *Мир*, 1968. - 351 с.

678. Грин М., Шварц Д., Виттен Э. *Теория суперструн. Петлевые амплитуды, аномалии и феноменология.* Т. **2**. - М.: *Мир*, 1990. - 656 с.

679. Манин Ю. И. *Калибровочные поля и комплексная геометрия.* - М.: *Наука*, 1984. - 335 с.

680. Гантмахер Ф. Р. *Теория матриц.* - М.: *Наука*, 1988. - 548 с.

681. Urrutia L. F., Morales N. *The Cayley-Hamilton theorem for supermatrices* // *J. Phys.* - 1994. - V. **A27**. - № 6. - P. 1981–1997.

682. Backhouse N. B., Fellouris A. G. *On the superdeterminant function for supermatrices* // *J. Phys.* - 1984. - V. **17**. - № 6. - P. 1389–1395.

683. Hussin V., Nieto L. M. *Supergroups factorizations through matrix realization* // *J. Math. Phys.* - 1993. - V. **34**. - № 9. - P. 4199–4220.

684. Backhouse N. B., Fellouris A. G. *Grassmann analogs of classical matrix groups* // *J. Math. Phys.* - 1985. - V. **26**. - № 6. - P. 1146–1151.

685. Berenstein D. E., Urrutia L. F. *The relation between the Mandelstam and the Cayley-Hamilton identities* // *J. Math. Phys.* - 1994. - V. **35**. - P. 1922–1930.

686. Alfaro J., Medina R., Urrutia L. F. *Orthogonality relations and supercharacter formulas of $U(m|n)$ representations* // *J. Math. Phys.* - 1997. - V. **38**. - P. 5319–5349.

687. Kobayashi Y., Nagamishi S. *Characteristic functions and invariants of supermatrices* // *J. Math. Phys.* - 1990. - V. **31**. - № 11. - P. 2726–2730.

688. Urrutia L. F., Morales N. *An extension of the Cayley-Hamilton theorem to the case of supermatrices* // *Lett. Math. Phys.* - 1994. - V. **32**. - № 3. - P. 211–219.

689. Jodeit M., Lam T. Y. *Multiplicative maps of matrix semigroups* // *Archiv Math.* - 1969. - V. **20**. - P. 10–16.

690. Rhodes J. *Infinite iteration of matrix semigroups* **II** // *J. Algebra.* - 1986. - V. **100**. - P. 25–137.

691. Putcha M. S. *Linear Algebraic Monoids.* - Cambridge: *Cambridge Univ. Press*, 1988.

692. Kelarev A. *A simple matrix semigroup which is not completely simple*

// Semigroup Forum. - 1988. - V. **37**. - P. 123{125

693. Okniński J. *Semigroups of Matrices.* - Singapore: World Sci., 1998. - 453 p.

694. Petrich M. *Inverse Semigroups.* - New York: Wiley, 1984. - 214 p.

695. McAlister D. B. *Representations of semigroups by linear transformations.* **1,2** // Semigroup Forum. - 1971. - V. **2**. - P. 189{320

696. Скорняков Л. А. *Обратимые матрицы над дистрибутивными кольцами* // *Сиб. мат. журнал.* - 1986. - Т. **27**. - № 2. - С. 182{185

697. Okniński J., Ponizovskii J. S. *A new matrix representation theorem for semigroups* // Semigroup Forum. - 1996. - V. **52**. - P. 293{305

698. Petrich M. *Semigroups and rings of linear transformations.* - Philadelphia: 1969. - 97 p. (*Preprint* / Pennsylvania State Univ; Lectures).

699. Darling R. W. R., Mukherjea A. *Probability measures on semigroups of nonnegative matrices* // The Analytical and Topological Theory of Semigroups. - Berlin: Walter de Gruyter, 1990. - P. 361{377.

700. Mukherjea A. *Convergence in distribution of products of random matrices: a semigroup approach* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1987. - V. **303**. - P. 395{411

701. Lallement G., Petrich M. *Irreducible matrix representations of finite semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1969. - V. **139**. - P. 393{412

702. Zalstein Y. *Studies in the representation theory of finite semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1971. - V. **161**. - P. 71{87.

703. Brown D. R., Friedberg M. *Linear representations of certain compact semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. - 1971. - V. **160**. - P. 453{

727. Lallement G. *Semigroups and Combinatorial Applications.* - New York: *Willey*, 1979.

728. Higgins P. M.

P. 1177–1192.

750. Haske C., Well R. O. *Serre duality on complex supermanifolds* // *Duke Math. J.* - 1987. - V. **54**. - № 2. - P. 493–500.

751. LeBrun C., Poon Y. S., Wells R. O. *Projective embeddings of complex supermanifolds* // *Comm. Math. Phys.* - 1990. - V. **126**. - № 3. - P. 433–452.

752. Choquet-Bruhat Y. *Graded Bundles and Supermanifolds.* - Naples: *Bibliopolis*, 1990. - 214 p.

753. Rothstein M. *Deformations of complex supermanifolds* // *Proc. Amer. Math. Soc.* - 1985. - V. **95**. - № 2. - P. 255–260.

754. Bernstein J. *Lectures on supersymmetry.* - Princeton: 1996. - 22 p. (*Preprint / Ins. Adv. Study*).

755. Rogers A. *Integration and global aspects of supermanifolds* // *Topological Properties and Global Structure of Space and Time.* - New York: *Plenum Press*, 1985. - P. 199–219.

756. Rogers A. *Aspects to geometrical approach to supermanifold* // *Mathematical Aspects of Superspace.* - Dordrecht: *D. Reidel*, 1984. - P. 135–147.

757. Rogers A. *Some examples of compact supermanifolds with non-Abelian fundamental group* // *J. Math. Phys.* - 1081. - V. **22**. - № 3. - P. 443–444.

758. Волович И. В. *∧-супермногообразия и расслоения* // *ДАН СССР.* - 1983. - Т. **269**. - № 3. - С. 524–527.

759. Хренников А. Ю. *Принцип соответствия в квантовых теориях поля и релятивистской бозонной струны* // *Мат. сборник.* - 1989. - Т. **180**. - № 6. - С. 763–786.

760. Molotkov V. *Infinite-dimensional $\mathbb{Z}_2^k$ supermanifolds.* - Trieste: 1984. - 52 p. (*Preprint / ICTP*; IC/84/183).

761. Захаров О. А. *Об определении суперпространства в теории супергравитации // Изв. вузов. Физика.* - 1989. - Т. **32**. - № 4. - С. 65–70.

762. Schmitt T. *Supergeometry and quantum field theory, or: What is a classical configuration // Rev. Math. Phys.* - 1997. - V. **9**. - P. 993–1052.

763. Bryant P. *De Witt supermanifolds and infinite-dimensional ground rings // J. London Math. Soc.* - 1989. - V. **39**. - № 2. - P. 347–368.

764. Cianci R. *Introduction to Supermanifolds.* - Naples: *Bibliopolis*, 1990. - 176 p.

765. Batchelor M. *Two approaches to supermanifolds // Trans. Amer. Math. Soc.* - 1980. - V. **258**. - P. 257–270.

766. Годеман Р. *Алгебраическая топология и теория пучков.* - М.: *ИЛ*, 1961. - 319 с.

767. Kashiwara M., Schapira P. *Scheaves on Manifolds.* - Berlin: *Springer-Verlag*, 1990. - 235 p.

768. Boyer C. P. *On the structure of supermanifolds // Symposium on Algebraic Topology in Honor of José Adem.* - Providence: *Amer. Math. Soc.*, 1982. - P. 53–59.

769. Batchelor M. *The structure of supermanifolds // Trans. Amer. Math. Soc.* - 1979. - V. **253**. - P. 329–338.

770. Batchelor M. *Graded manifolds and supermanifolds // Mathematical Aspects of Superspace.* - Dordrecht: *Reidel*, 1984. - P. 91.

771. Прохоров Л. В. *Интегралы над алгеброй Грассмана // Теор. мат. физ.* - 1981. - Т. **47**. - № 2. - С. 210–215.

772. Гайдук А. В., Худавердян О. М., Шварц А. С. *Интегрирование по поверхностям в суперпространстве* // *Теор. мат. физ.* - 1982. - Т. **52**. - № 3. - С. 375–383.

773. Гельфанд И. М., Минахин В. В., Шандер В. Н. *Интегрирование на супермногообразиях и суперпреобразования Радона* // *Функц. анализ и его прил.* - 1986. - Т. **20**. - № 4. - С. 67–69.

774. Воронов Ф. Ф., Зорич А. В. *Интегрирование на векторных расслоениях* // *Функц. анализ и его прил.* - 1988. - Т. **22**. - № 2. - С. 14–25.

775. Voronov T. *Supermanifold forms and integration. A dual theory.* - Moscow: 1996. - 20 p. (*Preprint / Moscow State Univ.*, dg-ga/9603009).

776. Rogers A. *Fermionic path integration and Grassmann Brownian motion* // *Comm. Math. Phys.* - 1987. - V. **113**. - P. 353–368.

777. Rogers A. *Consistent superspace integration* // *J. Math. Phys.* - 1985. - V. **26**. - № 3. - P. 385–392.

778. Alfaro J., Urrutia L. F. *Berezin integration on noncompact supermanifolds.* - Mexico: 1998. - 5 p. (*Preprint / Univ. Nac. Autonoma*, hep-th/9810130).

779. Kobayashi Y., Nagamachi S.

// *Ann. Inst. Fourier.* - 1987. - V. **37**. - P. 99–137.

804. Dereli T., Önder M., Tucker R. W.

of N.S.R. scattering amplitudes involving arbitraly many external Ramond string. - Chicago: 1988. - 17 p. (*Preprint / Enrico Fermi Inst.*; EFI 88-87).

814. Berkovits N. *Supersheet functional integration integration and the integracting Neveu-Schwarz string // Nucl. Phys.* - 1988. - V. **B304**. - № 3. - P. 537–556.

815. Vaintrob A. Y. *Deformations of complex structures on supermanifolds // Seminar on Supermanifolds.* - *V.* **24**. - № 6. - Stockholm: *Univ. Stockholm*, 1987. - P. 1–139.

816. Ninnemann H. *Deformations of super Riemann surfaces // Comm. Math. Phys.* - 1992. - V. **150**. - № 2. - P. 267–288.

817. Falqui G., Reina C. *A note on global structure of supermoduli spaces // Comm. Math. Phys.* - 1990. - V. **128**. - № 2. - P. 247–261.

818. Kodaira K., Spenser D. C. *Multifoliate structures // Adv. Math.* - 1961. - V. **74**. - № 1. - P. 52–100.

819. Kodaira K. *Complex Manifolds and Deformations of Complex Structure.* - Berlin: *Springer-Verlag*, 1986. - 312 p.

820. Burns D. *Some background and examples in deformation theory // Complex Manifold Techniques in Theoretical Physics.* - London: *Pitman*, 1979. - P. 135–165.

821. Spenser D. *Deformation of structures on manifolds defined by transitive continuos pseudogroups // Ann. Math.* - 1962. - V. **76**. - № 2. - P. 306–312.

822. de Montigny M., Patera J. *Discrete and continuous graded contractions of Lie algebras and superalgebras // J. Phys.* - 1991. - V. **A24**. - P. 525–548.

823. Moody R. V., Patera J. *Discrete and continuous graded contractions*

of representations of Lie algebras // *J. Phys.* - 1991. - V. **A24**. - P. 2227–2258.

824. Ботт Р., Ту Л. В. *Дифференциальные формы в алгебраической топологии*. - М.: *Наука*, 1989. - 336 с.

825. Постников М. М. *Дифференциальная геометрия*. - М.: *Наука*, 1988. - 496 с.

826. Baranov A. M., Manin Y. I., Frolov I. V., Schwarz A. S. *A superanalog of the Selberg trace formula and multiloop contributions for fermionic strings* // *Comm. Math. Phys.* - 1987. - V. **111**. - № 3. - P. 373–392.

827. Ekstrand C. *$\mathbb{Z}_2$-Graded cocycles in higher dimensions* // *Lett. Math. Phys.* - 1998. - V. **43**. - P. 359–378.

828. Ekstrand C. *Neutral particles and super Schwinger terms*. - Stockholm: 1999. - 13 p. (*Preprint / Royal Inst. Technology*, `hep-th/9903148`).

829. LeBrun C., Rothstein M. *Moduli of super Riemann surfaces* // *Comm. Math. Phys.* - 1988. - V. **117**. - № 1. - P. 159–176.

830. Воронов А. А. *Формула для меры Мамфорда в теории суперструн* // *Функц. анализ и его прил.* - 1988. - Т. **22**. - № 2. - С. 67–68.

831. Bershadsky M., Radul A. *Fermionic fields on $\mathbb{Z}_N$-curves* // *Comm. Math. Phys.* - 1988. - V. **116**. - № 4. - P. 689–700.

832. McArtur I. N. *An obstruction to factorization of determinants on super-Teichmüller parameters in* $(1,0)$ *supergravity* // *Nucl. Phys.* - 1988. - V. **B296**. - P. 929–954.

СПИСОК РИСУНКОВ

Рис. 1.1 Переход от обратимого к необратимому морфизму при $n = 2$ 55

Рис. 1.2 Обобщение условия коцикла на необратимый вариант составляющих морфизмов 55

Рис. 4.1 Тонкие отношения эквивалентности для $(2|2)$-связки (кружками отмечены стандартные отношения Грина) 255

СПИСОК ТАБЛИЦ

Таблица 1.1 Сравненительные типы суперчисел и полусуперм-ногообразий 49

Таблица 2.1 Умножение обратимых и необратимых редуцированных $N = 1$ преобразований, включая вырожденные 98

Таблица 4.1 Таблица Кэли для непрерывной скрученной прямоугольной связки 243

Приложение A

Теория абстрактных полугрупп

Введем понятия алгебраической теории полугрупп [102–104], необходимые для понимания основного текста.

A.1. Группоиды, полугруппы и идеалы

Бинарной операцией на множестве S называется отображение S£ S в S, где S £ S есть множество всех упорядоченных пар элементов из S. Если это отображение обозначается (¤), то образ в S элемента (a; b) 2 S £ S будет обозначаться через a ¤ b. *Частичной бинарной операцией* на множестве S называется отображение непустого подмножества множества S £ S в S. Под *частичным группоидом* мы будем понимать систему f S; ¤g, состоящую из непустого множества S и частичной бинарной операции (¤) на нем. Бинарная операция (¤) на множестве S называется *ассоциативной*, если a ¤ (b ¤ c) = (a ¤ b) ¤ c для всех a; b; c; из S. *Полугруппа* S -

сте обычно называются *односторонними*. Подмножество полугруппы, являющееся как левым, так и правым идеалом, называется *двусторонним идеалом* или просто *идеалом*. Если $\mathbf{I}$ есть левый (правый, двусторонний) идеал полугруппы $\mathbf{S}$, то пишут $\mathbf{I} \trianglelefteq_l \mathbf{S}$ ($\mathbf{I} \trianglelefteq_r \mathbf{S}, \mathbf{I} \trianglelefteq \mathbf{S}$), опуская черточку внизу, если идеал собственный. Всякий односторонний идеал является подполугруппой. Для любого подмножества $\mathbf{A}$ полугруппы $\mathbf{S}$ множество $\mathbf{S} \star \mathbf{A}$ ($\mathbf{A} \star \mathbf{S}$, $\mathbf{S} \star \mathbf{A} \star \mathbf{S}$) будет левым (правым, двусторонним) идеалом; в частности, таковым будет множество $\mathbf{S} \star \mathbf{a}$ ($\mathbf{a} \star \mathbf{S}$, $\mathbf{S} \star \mathbf{a} \star \mathbf{S}$) для любого элемента $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$. Для любого n полугруппа $\mathbf{S}^{\star n}$ есть идеал в $\mathbf{S}$. Если $\mathbf{S}^{\star n} = \mathbf{S}^{\star n+k}$ для некоторого k, то $\mathbf{S}^{\star n} = \mathbf{S}^{\star m}$ для любого $m \geq n$; если $\mathbf{S}^{\star 2} = \mathbf{S}$, то полугруппа $\mathbf{S}$ называется *глобально идемпотентной*. Для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$ множество $\mathbf{L}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a}\} \cup \mathbf{S} \star \mathbf{a}$ ($\mathbf{R}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a}\} \cup \mathbf{a} \star \mathbf{S}$, $\mathbf{J}(\mathbf{a}) = \{\mathbf{a}\} \cup \mathbf{S} \star \mathbf{a} \cup \mathbf{a} \star \mathbf{S} \cup \mathbf{a} \star \mathbf{S} \star \mathbf{a}$) будет левым (правым, двусторонним) идеалом, содержащим $\mathbf{a}$ и содержащимся в любом левом (правом, двустороннем) идеале $\mathbf{I}$ таком, что $\mathbf{a} \in \mathbf{I}$, идеал $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ ($\mathbf{R}(\mathbf{a}), \mathbf{J}(\mathbf{a})$) называют *главным левым* (*правым, двусторонним*) *идеалом*, порожденным элементом $\mathbf{a}$. Подполугруппу $\mathbf{T}$ полугруппы $\mathbf{S}$ называют *изолированной* (*вполне изолированной*), если для любого $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$ и любого натурального n (любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{S}$) из того, что $\mathbf{a}^{*n} \in \mathbf{T}$ ($\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{T}$), следует, что $\mathbf{a} \in \mathbf{T}$ (хотя бы один из элементов $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ принадлежит $\mathbf{T}$); если это условие выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbf{S} \setminus \mathbf{T}$ есть объединение подполугрупп (подполугруппа) или $\mathbf{T} = \mathbf{S}$. Вполне изолированный идеал называется также *вполне первичным или простым*.

Подполугруппа $\mathbf{T}$ полугруппы $\mathbf{S}$ называется *выпуклой* (или *фильтром*, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{S}$ из того, что $\mathbf{a} * \mathbf{b} \in \mathbf{T}$, следует $\mathbf{a} \in \mathbf{T}$ и $\mathbf{b} \in \mathbf{T}$; это условие выполняется, очевидно, тогда и только тогда, когда $\mathbf{T} = \mathbf{S} \setminus \mathbf{I}$ для некоторого (необходимо вполне изолированного) идеала $\mathbf{I}$ или $\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Всякое множество попарно не пересекающихся подполугрупп $\mathbf{T}_i$ полугруппы будем называть *россыпью*. Типичный пример — россыпь максимальных подгрупп. Если $\{\mathbf{T}_i\}_{i \in I}$ — россыпь полугруппы

S TAKAQ^TO $\bigcup_{i2I} T_i = S$ (T. E KOMPONENTY ROSSYPI OBRAZU@T RAZBIEN
S), TO BUDEM GOWORITX DANNAQ ROSSYPX PORYWAET. eSLI $\bigcup_{i2I} T_i$
QWLQETSQ POROVDA@]IM MNOVESTWOM POLUGRUPPY, TO BUDEM GOWORITX
^TO ROSSYPX $fT_i g_{i2I}$ PORODAET.

a .2. pOLUGRUPPY I PREOBRAZOWANIQ

oDIN IZ WAVNEJ[IH PRIMEROW POLUGRUPP DOSTAWLQET MNOVE
T (X) WSEH PREOBRAZOWANIJ MNOVESTWA X. eTO PREOBRAZOWANIE W SEBQ IZWOLXNOGO MNO
VESTWA X . oBRAZ \LEMENTA x 2 X PRI PREOBRAZOWANII 2 T BUDEM
OBOZNA^ATX ^ERE(x). pROIZWEDENIE (SUPERPOZICI, KOMPOZICI) PREOBRAZOWANIJ ZADAETSQ TOGDA FORMULOJ ((x)) = (x)) . wWEDENNAQ OPERACIQ ASSOCIATIWNA. tAK^TO T (X) PREWRA]AETSQ W POLUGRUPPU, KOTORAQ NAZYWAETSQ SIMMETRI^ESKOJ POLUGRUPPOJ PREOBRAZOWANIJ MNOVESTWA X.

pRINCIPIALXNAQ WAVNOSTX SIMMETRI^ESKIH POLUGRUPP SOSTOIT TOM, ^TO SPRAWEDLIW SLEDU@]IJ ANALOG IZWESTNOJ TEOREMY kLI
GRUPPE. lL@BAQ POLUGRUPPA WLOVIMA W PODHODQ]U@ SIMMETRI^ESKU
LUGRUPPU

$\mathbf{x} * \mathbf{y} * \mathbf{x} = \mathbf{x}$; такие полугруппы называются *прямоугольными* (или *прямоугольными связками*).

Элемент $\mathbf{a}$ полугруппы $\mathbf{S}$ называется регулярным, если имеет место включение $\mathbf{a} \in \mathbf{a} \star \mathbf{S} \star \mathbf{a}$, т. е., если в $\mathbf{S}$ существует такой элемент $\mathbf{x}$, что $\mathbf{a} = \mathbf{a} * \mathbf{x} * \mathbf{a}$. Из последнего равенства вытекает, что элементы $\mathbf{e} = \mathbf{a} * \mathbf{x}$ и $\mathbf{f} = \mathbf{x} * \mathbf{a}$ — идемпотенты, причем элемент $\mathbf{e}$ (элемент $\mathbf{f}$) служит для $\mathbf{a}$ левой (правой) единицей; если при этом $\mathbf{e} = \mathbf{f}$, то $\mathbf{a}$ будет групповым элементом. Обратно, если элемент $\mathbf{a} \in \mathbf{S}$ обладает левой (правой) единицей, принадлежащей множеству $\mathbf{a} \star \mathbf{S}$ (множеству $\mathbf{S} \star \mathbf{a}$) то $\mathbf{a}$, очевидно, регулярен. Элемент $\mathbf{a}$ регулярен тогда и только тогда, когда главный левый идеал $\mathbf{L}(\mathbf{a})$ (главный правый идеал $\mathbf{R}(\mathbf{a})$) порождается некоторым идемпотентом. Элементы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются *инверсными* друг к другу (*обобщеннообратными*, *регулярносопряженными*), если $\mathbf{a} * \mathbf{b} * \mathbf{a} = \mathbf{a}$ и $\mathbf{b} * \mathbf{a} * \mathbf{b} = \mathbf{b}$. Всякий регулярный элемент обладает хотя бы одним инверсным к нему элементом. Всякий группой элемент $\mathbf{g}$ будет регулярным, обратный к нему в соответствующей максимальной подгруппе $\mathbf{G}$ элемент $\mathbf{g}^{-1}$будет инверсным к $\mathbf{g}$ (подчеркнем, что вне $\mathbf{G}$ могут существовать и другие инверсные к $\mathbf{g}$ элементы), и кроме того, $\mathbf{g}$ и $\mathbf{g}^{-1}$ перестановочны. Обратно, два перестановочных инверсных друг к другу элемента будут групповыми и взаимно обратными в соответствующей подгруппе $\mathbf{G}_e$. Групповые элементы называют также *вполне регулярными.*

Для элемента $\mathbf{a}$ произвольной полугруппы среди степеней $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^{*2}\ldots$ будет лишь конечное число различных тогда и только тогда, когда некоторая степень $\mathbf{a}$ равна идемпотенту; элемент $\mathbf{a}$ с таким свойством называется элементом *конечного порядка,* в противном случае $\mathbf{a}$ называется элементом *бесконечного порядка.* Полугруппа, все элементы которой иметют конечный порядок, называется *периодической.* Периодическая полугруппа с законом сокращения будет группой. Полярный к группам класс унипотентных периодических полугрупп составляют *нильполу-*

конгруэнцию $\operatorname{Ker}\theta$ (ядерную конгруэнцию отображения θ) :

$$\operatorname{Ker}\theta = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{S}\times\mathbf{S} : \theta(\mathbf{x}) = \theta(\mathbf{y})\}.$$

Единственная возможность удовлетворяющей равенству $\hat{\theta}\circ\chi_{\operatorname{Ker}\theta} = \theta$, это положить $\hat{\theta}(\tilde{\mathbf{x}}) = \theta(\mathbf{x})$ для любого $x \in S$,где $\tilde{\mathbf{x}} = \chi_{\operatorname{Ker}\theta}(\mathbf{x})$. Этот результат является частным случаем следующей теоремы.

Теорема А.3. *Пусть $\theta : \mathbf{S} \to \mathbf{S}'$ — гомоморфизм полугруппы S на полугруппу $\mathbf{S}'$, ρ — конгруэнция на S, для которой $\operatorname{Ker}\theta \subseteq \rho$. Определим бинарное отношение ρ' на S', положив*

$$\rho' = \{(\mathbf{x}',\mathbf{y}') \in \mathbf{S}'\times\mathbf{S}' \mid \exists \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{S},\ \mathbf{x}\rho\mathbf{y},\ \theta(\mathbf{x}) = \mathbf{x}', \theta(\mathbf{y}) = \mathbf{y}'\}.$$

Тогда:

1. *Отношение ρ' есть конгруэнция на $\mathbf{S}'$.*

2. *Существует единственное отображение $\hat{\theta}$ из $\mathbf{S}/\rho$ в $\mathbf{S}'/\rho'$, такое, что $\hat{\theta}\circ\chi_\rho = \chi_{\rho'}\circ\theta$, причем $\hat{\theta}$ — изоморфизм.*

3. *Отображение $\rho' \longmapsto \rho$ определяет изоморфизм решетки всех конгруэнций на $\mathbf{S}$, содержащих $\operatorname{Ker}\theta$,на решетку всех конгруэнций на $\mathbf{S}'$.*

А.5. Теория идеалов

Двусторонний идеал $\mathbf{I}$ полугруппы $\mathbf{S}$ называется *минимальным идеалом,* если для любого идела $\mathbf{J}\subseteq\mathbf{S}$ из $\mathbf{J}\subseteq I$ следует $\mathbf{J} = \mathbf{I}$. Если $\mathbf{I}$ — минимальный идеал и $\mathbf{J}$ —любой другой идеал, то пересечение $\mathbf{I}\cap\mathbf{J}$ непусто, поскольку $\mathbf{I}\star\mathbf{J}\subseteq\mathbf{I}\cap\mathbf{J}$; кроме того, включение $\mathbf{I}\cap\mathbf{J}\subseteq\mathbf{I}$ влечет за собой равенство $\mathbf{I}\cap\mathbf{J} = \mathbf{I}$ и поэтому $\mathbf{J}\subseteq\mathbf{I}$. Таким образом, минимальный идеал является универсально минимальным (т. е. наименьшим) и,

следовательно, *единственным*. По этой причине минимальный идеал полугруппы (если он существует) называют ее ядром Сушкевича. Любая конечная полугруппа обладает минимальным идеалом.

Полугруппа называется *простой*, если она не содержит идеалов, отличных от самой себя. Если полугруппа S проста, то для любого $a \in S$ выполняется равенство $S?a?S = S$. Обратно, если $S?a?S = S$ для любого $a \in S$, то, взяв идеал I в S и элемент $a \in I$, получим $S = S?a?S \subseteq I$, т. е. $S = I$, и потому S проста. Следовательно, чтобы доказать простоту полугруппы S, достаточно предъявить по крайней мере одну пару $x; y$ | решение уравнения $x \cdot a \cdot y = b$ | для любых $a; b \in S$.

Определение А.4. *Главным идеальным рядом полугруппы* S *называется конечная цепь* $I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n = S$ *идеалов из* S, *где* I_1 | *мимальный идеал, а* I_k *является максимальным среди идеалов из* S, *содержащихся в* I_{k+1}; $k = 1; 2; \ldots; n - 1$. *Факторполугруппы Риса* I_{k+1}/I_k *и идеал* J_1 *называются факторами этого ряда.*

pRIMERA.5. Полугруппами с главными идеальными рядами являются, например, конечные полугруппы и полугруппа $\mathrm{End}_K V$ всех линейных преобразований конечномерного векторного пространства V над полем K.

Лемма А.6. *Пусть* I | *идеал полугруппы* S *и* J | *максимальнный идеал из* S, *строго содержащийся в* I. *Для произвольного* $a \in I \setminus J$ *обозначим через* $I(a)$ *множество всех таких* $x \in S^1?a?S^1$; *что* $S^1?x?S^1 \supseteq S^1?a?S^1$: *Тогда* $I(a)$ *является идеалом в* S *и фактор полугруппы Риса* $S^1?a?S^1/I(a)$ *и* I/J *изоморфны.*

Множество $S^1?a?S^1 \setminus I(a)$ есть J -класс элемента a. Заметим, что множество $I(a)$, если оно непусто, является максимальным идеалом из S, содержащимся в $S^1?a?S^1$. В самом деле, если I | такой идеал

в обычном смысле. Однако такое отождествление нарушается при суперкоординатном преобразовании, поскольку четные образующие $[y_i]$ пучка в отличие от новых координат содержат нильпотентную часть.

Нечетные образующие пучка $[\xi_A]$ не являются координатами в обычном смысле. Например, в алгебраическом подходе не существует глобальных трансляций $[\xi_A] \to [\xi_A + \alpha]$,где α — нечетный элемент Λ,не зависящий от ξ_A. Следовательно, координаты $[x_i], [\xi_A]$ супермногообразия и суперполя $f([x_i], [\xi_A])$ допускают представления супералгебры Пуанкаре, но не супергруппы Пуанкаре.

Необходимо отметить, что элементы супергрупп Ли параметризуются определенным набором четных и нечетных элементов Λ [27, 30, 186]. И, таким образом, нечетные координаты группового пространства отличаются от функциональных нечетных координат $[\xi_A]$. Поэтому групповое пространство супергрупп Ли не является супермногообразием в рамках алгебраического подхода.

Б.2. Функциональный подход

На алгебре Грассмана может быть задана структура банаховой алгебры. Это можно сделать, например, с помощью нормы вида [112]

$$\|\xi\| = \sum \left|a^{A_1 \ldots A_J}\right|, \; \xi = \sum_{J=0}^{K} a^{A_1 \ldots A_J} \xi_{A_1} \ldots \xi_{A_J}. \qquad \text{(Б.2)}$$

Суперпространство *функционального подхода* [91] размерности $(n|m)$ определяется как прямое произведение n экземпляров четной части Λ и m экземпляров нечетной части Λ: $B^{n|m} = \Lambda_0^n \times \Lambda_1^m$. С одной стороны, такое суперпространство может рассматриваться как Λ-оболочка $\mathbb{Z}_2$-градуированного векторного пространства $L^{n|m} = L_0 \oplus L_1 = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m$, которая получается умножением четных (нечетных) эле-

взаимодействия струн сводится к изучению топологически нетривиальных мировых поверхностей струны. Для бозонной струны в силу конформной инвариантности вычисление струнных амплитуд в критической размерности ($d = 26$) сводится к интегрированию по так называемому конформному пространству модулей — множеству конформных классов двумерных римановых многообразий [349, 782, 783]. Этот факт был впервые установлен в работе Полякова [333] и подробно проанализирован в работах Книжника [280, 326, 328, 336, 784–786]. Аналогичные утверждения имеет место и для фермионной струны [277, 334, 335]. При этом конформное пространство модулей следует заменить на суперконформное пространство модулей — классов суперконформной эквивалентности $(1|1)$-мерных комплексных многообразий с суперконформной структурой [353, 356, 362].

Понятие суперримановa многообразия, появлялось ранее в работах, в которых исследовалась связь двумерной супергравитации и суперструны [320, 323]. В этих работах рассматривались $(2|2)$-мерные римановы супермногообразия с определенными ограничениями на кривизну и кручение. Можно проверить, что суперримановы многообразия в определенном выше смысле находятся во взаимно однозначном соответсвии с многообразиями, исследовавшимися в этих работах (это вытекает из доказанной в них возможности выбора супертетрады в конформно-плоском виде).

Суперконформным многообразием будем называть многообразие, склеенное из $(1|1)$-мерных суперобластей с помощью суперконформных преобразований. Примером суперконфомного многообразия является суперпроективное пространство $\mathbb{C}P^{1,1}$, получающееся из комплексного суперпространства $\mathbb{C}^{2|1}$ с координатами (w_1, w_2, η) при отождествлении $(w_1, w_2, \eta) \sim (\lambda w_1, \lambda w_2, \lambda\eta)$ (здесь w_1, w_2, λ — четные элементы, η — нечетный). Вводя координаты $(z, \theta) = \left(w_1, w_2^{-1}, \eta w_2^{-1}\right)$ и $(z', \theta') = \left(w_1, w_2^{-1}, \eta w_2^{-1}\right)$, мы можем представлять себе $\mathbb{C}P^{1,1}$ как суперпространство, склеенное

из двух суперобластей с помощью суперконформного преобразования $z' = z^{-1}$, $\theta' = \theta z^{-1}$.

Более общий пример суперконформного многообразия можно построить, исходя из произвольного комплексного многообразия размерности 1. Если исходное многообразие склеено из областей $\mathscr{U}_i$, локальные координаты которых связаны аналитическими преобразованиями $z_i = f_{ij}(z_j)$, то соответствующее суперконформное многообразие склено из суперобластей с помощью суперконформных преобразований $z_i = f_{ij}(z_j)$, $\theta_i = \sqrt{f'_{ij}(z_j)}\theta_j$. Отметим, что описанная процедура не вполне однозначна из-за свободы в выборе ветви квадратного корня.

Можно дать инвариантное определение суперконформного многообразия. Для этого заметим, что в каждой точке суперконформного-многообразия выделено $(0,1)$-мерное комплексное подпространство касательного пространства, порожденное в локальных координатх $Z = (z,\theta)$ вектором D (как обычно дифференциальный оператор первого порядка отождествляется в векторным полем). В силу того, что $\tilde{D} = F^{-1}D$, где F — конформный фактор, это подпространство не зависит от выбора локальной системы координат. Мы можем определить суперконформное многообразие как $(1|1)$-мерное комплексное многообразие, в каждой точке которого выделено $(0|1)$-мерное подпространство касательного пространства, аналитически зависящее от точки. При этом должно быть выполнено следующее условие невырожденности: если $\hat{e}$ — четное векторное поле, касающееся в каждой точке выделенного $(0|1)$-мерного подпространства, то векторные поля $\hat{e}$ и $\hat{E} = \frac{1}{2}\{\hat{e},\hat{e}\}$ должны составлять базис комплексного касательного пространства к рассматриваемому многообразию. Можно доказать, что при этом условии в окрестности каждой точки найдется такая система координат (z,θ),что $\hat{e} = \Phi\left(z,\theta,\tilde{z},\tilde{\theta}\right)D$. Суперконформное преобразование $Z \to \tilde{Z}$ характеризуется как аналитическое преобразование, переводящее выделенное $(0|1)$-мерное подпространство в точке Z в аналогичное подпростран-

ство в точке $\tilde{Z}$.

Два суперримановa многообразия суперконформно-эквиалентны, если эквивалентны соответствующие суперконформные структуры. Другими словами, если на супермногообразии заданы суперримановы структуры с помощью векторных полей $\hat{e}$ и $\hat{e}'$, то эти структуры эквивалентны в случае, когда существует преобразование многообразия $\mathscr{M}$ (суперконформное пространство модулей) может быть получено с помощью факторизации пространства всех суперримановых структур на $\mathscr{M}$. Мы воспользуемся этим замечанием, чтобы описать касательное пространство T к суперпространству модулей T.

Всякое комплексное многообразие может быть получено из односвязного комплексного многообразия с помощью факторизации по дискретной подгруппе его группы автоморфизмов (аналитических преобразований). Этот факт следует из замечания, что всякое многообразие получается с помощью факторизации своего универсального накрывающего. Поскольку односвязные одномерные комплексные многообразия и их группы автоморфизмов хорошо известны (см., например, [188, 733, 734]), этот факт позволяет дать некоторое описание всех одномерных компактных комплексных многообразий с точностью до аналитической эквивалентности (или, что то же самое, описание всех конформных структур на ориентируемом двумерном компактном многообразии). Задача сводится к описанию всех таких подгрупп группы автоморфизмов, при факторизации по которым снова получается многообразие. Для того, чтобы подгруппа обладала этим свойством, нужно, чтобы она действовала свободно, т. е. чтобы отличные от тождественного преобразования не имели неподвижных точек. Подгруппа, по которой происходит факторизация, изоморфна фундаментальной группе профакторизованного многообразия. Фундаментальные группы компактных двумерных поверхностей хорошо известны. Для поверхности рода 0 (сферы) фундаменталная группа равна нулю. Это означает, что все компакт-

ные комплексные многообразия рода 0 совпадают со сферой Римана. Если компактное комплексное многообразие имеет род 1 (топологически эквивалентно тору), то его фундаментальная группа яаляется абелевой группой с двумя образующими. Отсюда следует, что оно может быть получено из $\mathbb{C}^1$ факторизацией по решетке (т. е. с помощью отождествления $z \sim z + m_1 e_1 + m_2 e_2$, где m_1, m_2 — произвольные целые числа, e_1, e_2 — фиксированные комплексные числа $e_1 \neq \lambda e_2, \lambda = \tilde{\lambda}$. Две разные решетки приводят к эквивалентным многообразиям, если одну можно перевести в другую с помощью автоморфизма.

Во всяком односвязном одномерном комплексном многообразии можно ввести метрику, имеющую постоянную кривизну. Автоморфизмы многообразия реализуются как движения (преобразования, сохраняющие метрику). Это позволяет ввести метрику постоянной кривизны на любом компактном комлексном многообразии; метрику можно нормировать так, чтобы площадь была единичной. Тем самым в каждом классе конформно-эквивалентных метрик выбирается единственный представитель. Классификация суперконформных многообразий может быть проведена с помощью аналогичных рассуждений [341, 342].

Приложение B

Суперматрицы и необратимость

Здесь мы вначале изложим необходимые сведения из линейной супералгебры и теории суперматриц [30, 106, 186], а затем рассмотрим некоторые новые свойства и явления, связанные с необратимостью суперматриц [8, 10].

B.1. Линейная супералгебра

Линейным суперпространством называется $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство $\mathbf{\Lambda}$, разложенное в прямую сумму $\mathbf{\Lambda} = \Lambda_0 \oplus \Lambda_1$. Элементы из Λ_0 и Λ_1 называются *однородными* (*четными* и *нечетными* соответственно) элементами. Если $a \in \Lambda_i$, где $i \in \mathbb{Z}_2$, то будем писать $\mathrm{p}\,(a) = \mathrm{i}$ и называть $\mathrm{p}\,(a)$ четностью элемента a. Любой элемент (за исключением нуля) может быть единственным образом представлен в виде $a = a_0 + a_1$, где $a_i \in \Lambda_i$. *Линейное подсуперпространство* — это такое $\mathbb{Z}_2$-градуированное подпространство $\mathrm{L} \subset \mathbf{\Lambda}$, что $\mathrm{L}_i = \mathrm{L} \cap \Lambda_i$. *Размерностью* $\mathbb{Z}_2$-градуированного линейного пространства называется пара $(p|q)$, где p — размерность четного и q — размерность нечетного подпространств. Будем обозначать $\mathbb{Z}_2$-градуированное линейное пространство с фиксированной четность как $\mathbf{\Lambda}^{p|q}$. Тогда четные и нечетные подсуперпространства будут обозначаться $\mathbf{\Lambda}^{p|0}$ и $\mathbf{\Lambda}^{0|q}$ соответственно. Отметим, что размерность $(p|q)$ не связана с числом образующих Λ.

Пусть $\mathbf{\Lambda}^{p|q}$ и $\mathbf{\Lambda}^{m|n}$ — линейные суперпространства. На $\mathbf{\Lambda}^{p|q} \oplus \mathbf{\Lambda}^{m|n}$, $\mathbf{\Lambda}^{p|q} \otimes \mathbf{\Lambda}^{m|n}$ и $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{m|n}\right)$ структура суперпространства вводится естественным образом. Элементы суперпространства $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{m|n}\right)$ называются *гомоморфизмами* из $\mathbf{\Lambda}^{p|q}$ в $\mathbf{\Lambda}^{m|n}$. Четные гомоморфизмы,

т. е. элементы из $\mathrm{Hom}_0\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{m|n}\right)$, называются *морфизмами суперпространств*. Обозначим через $\mathbf{\Pi}(\mathbf{\Lambda})$ суперпространство, определенное формулами $\mathbf{\Pi}(\Lambda_0) = \Lambda_1$, $\mathbf{\Pi}(\Lambda_1) = \Lambda_0$, т. е. $\mathbf{\Pi}$ — оператор смены четности, а гомоморфизм $\mathbf{\Pi} : \mathbf{\Lambda} \to \Pi(\mathbf{\Lambda})$ по назовем *каноническим нечетным гомоморфизмом суперпространства* $\mathbf{\Lambda}$ в $\mathbf{\Pi}(\mathbf{\Lambda})$.

Супералгеброй называется суперпространство A вместе с морфизмом суперпространств $\mathrm{A} \oplus \mathrm{A} \to \mathrm{A}$. Отметим, что каждая супералгебра является алгеброй. *Идеал* в супералгебре A — идеал алгебры A, являющийся одновременно подсуперпространством. *Подсупералгеброй* в A, являющаяся подсуперпространством.

Пусть A и B — супералгебры. Гомоморфизм алгебр $\varphi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ называется *морфизмом супералгебр*, если $\mathrm{p}(\varphi) = 0$. Для любой супералгебры A определим *коммутирование* (или *скобку*) $[,] : \mathrm{A} \oplus \mathrm{A} \to \mathrm{A}$ по правилу о знаках, положив $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = \mathrm{ab} - (-1)^{\mathrm{p(a)p(b)}}\,\mathrm{ba}$. Элементы $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$ называются *коммутирующими*, если $[\mathrm{a}, \mathrm{b}] = 0$. Супералгебра называется *коммутативной*, если любые два ее элемента коммутируют.

Централизатором множества S однородных элементов из A называется множество $C(\mathrm{S}) = \{\mathrm{a} \in \mathrm{A} \mid [\mathrm{a}, \mathrm{s}] = 0, \mathrm{s} \in \mathrm{S}\}$. *Нормализатором* такого множества S называется $N(\mathrm{S}) = \{\mathrm{a} \in \mathrm{A} \mid \mathrm{aS} = \mathrm{Sa}\}$. *Центром* супералгебры A называется множество $Z(\mathrm{A}) = \{\mathrm{a} \in \mathrm{A} \mid [\mathrm{a}, \mathrm{A}] = 0\}$. Множества $C(\mathrm{S})$ и $Z(\mathrm{A})$ являются коммутативными супералгебрами, а $N(\mathrm{S})$ — супералгеброй.

Обозначим через $\Lambda(n)$ внешнюю (грассманову) алгебру от n переменных $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — образующих, которые удовлетворяют соотношениям $\xi_1\xi_j + \xi_j\xi_i = 0$, $1 \le i, j \le n$. В частности $\xi_i^2 = 0$. Произвольный элемент $f \in \Lambda(n)$ можно единственным образом представить в виде

$$f = f_0 + \sum_{1 \le r \le n} \sum_{1 < i_1 < \ldots < i_r \le n} f_{i_1 \ldots i_r} \xi_{i_1} \ldots \xi_{i_r}. \qquad \text{(B.1)}$$

Определим на $\Lambda(n)$ структуру супералгебры, полагая $\mathrm{p}(\xi_i) = 1$. Очевидно, что супералгебра $\Lambda(n)$ коммутативна. В дальнейшем $\Lambda(n)$ называется *супералгеброй Грассмана.*

Тензорным произведением супералгебр A и B называется суперпространство $\mathrm{A} \otimes \mathrm{B}$, на котором задана структура супералгебры по формуле

$$(\mathrm{a} \otimes \mathrm{b})(\mathrm{a}_1 \otimes \mathrm{b}_1) = (-1)^{\mathrm{p}(a_1)\mathrm{p}(b)}\, \mathrm{a}\mathrm{a}_1 \otimes \mathrm{b}\mathrm{b}_1, \tag{B.2}$$

где $\mathrm{a}, \mathrm{a}_1 \in \mathrm{A}$, $\mathrm{b}, \mathrm{b}_1 \in \mathrm{B}$.

Тензорное произведение коммутативных супералгебр является коммутативной супералгеброй. В частности, $\Lambda(n) \otimes \Lambda(m) \cong \Lambda(n+m)$.

Каждой коммутативной супералгебре $\mathrm{C} = \mathrm{C}_0 \oplus \mathrm{C}_1$ соответствует *каноническая проекция* $\epsilon : \mathrm{C} \to \mathrm{C}/\mathrm{id}\,\mathrm{C}_1 = \mathrm{C}_0/(\mathrm{id}\,\mathrm{C}_1)^2$, где $\mathrm{id}\,\mathrm{X}$ обозначает идеал, порожденный множеством X.

Лемма B.1. *Пусть* C — *коммутативная супералгебра. Тогда элемент* $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$ *обратим в том случае, когда обратим* $\epsilon[\mathrm{c}]$.

Пусть A — супералгебра с единицей, M — некоторое суперпространство. *Левым действием* супералгебры A на M,или *левым* A*-действием*, называется морфизм суперпространств $\mathrm{A} \otimes M \to M$, удовлетворяющий условиям: $\mathrm{a}(\mathrm{b}m) = (\mathrm{ab})\,m$, $\mathrm{a}, \mathrm{b}, 1 \in \mathrm{A}$, $m \in M, 1m = m$.

Левым модулем над A, или левым A-модулем, называется суперпространство M, на котором задано левое A-действие. Понятие *правого* A-модуля вводится аналогично.

Пусть C-коммутативноая супералгебра. Тогда каждый левый C-модуль можно превратить в правый C-модуль (и наоборот) p:

$$m\mathrm{c} = \begin{cases} (-1)^{\mathrm{p}(m)p(\mathrm{c})}\, \mathrm{c}m \\ (-1)^{(\mathrm{p}(m)+1)p(\mathrm{c})}\, \mathrm{c}m \end{cases}, \tag{B.3}$$

где $\mathrm{c} \in \mathrm{C}, m \in M$.

Структуры левого и правого модуля на M согласованы в следующем смысле:

$$(\mathrm{a}m)\,\mathrm{b} = \mathrm{a}\,(m\mathrm{b})\,, \quad \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{C},\ m \in M. \tag{B.4}$$

Множество C-гомоморфизмов из M в N является подсуперпространством в $\mathrm{Hom}\,(M, N)$,которое обозначается через $\mathrm{Hom}_{\,\mathrm{C}}\,(M, N)$. Когда $M = N$, суперпространство $\mathrm{Hom}_{\,\mathrm{C}}\,(M, N)$ обозначается через $\mathrm{End}_{\,\mathrm{C}}\,(M)$ называются *автоморфизмами* M, и они образуют группу $GL_{\mathrm{C}}\,(M)$.

Определим на суперпространстве $\mathrm{Hom}_{\,\mathrm{C}}\,(M, \mathrm{C})$ структуру C-модуля, полагая

$$(\mathrm{cF})\,(m) = c\,(\mathrm{F}\,(m))\,;\ (\mathrm{F}c)\,(m) = \mathrm{F}\,(cm)\,, \tag{B.5}$$

где $\mathrm{F} \in \mathrm{Hom}_{\,\mathrm{C}}\,(M, \mathrm{C})$.

Из формул (B.3) и (B.5) немедленно следует, что

$$c\mathrm{F} = (-1)^{\mathrm{p(c)p(F)}}\,\mathrm{Fc} \tag{B.6}$$

Тензорным произведением C-модулей M и N называется тензорное произведение суперпространств $M \otimes N$, профакторизированное по соотношениям $m\mathrm{c} \otimes n = m \otimes \mathrm{c}n$, где $m \in M$, $n \in N$, $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$. Обозначим факторпространство через $M \otimes_{\mathrm{C}} N$. На суперпространстве $M \otimes_C N$ структрура C-модуля вводится по формулам $\mathrm{c}\,(m \otimes n) = \mathrm{c}m \otimes n$, $(m \otimes n)\,\mathrm{c} = m \otimes n\mathrm{c}$. Легко проверяется, что C-модули $(L \otimes_{\mathrm{C}} M) \otimes_{\mathrm{C}} N$ и $L \otimes_{\mathrm{C}} (M \otimes_{\mathrm{C}} N)$ естественно изоморфны. Следовательно, такой C-модуль можно обозначить через $L \otimes_{\mathrm{C}} M \otimes_{\mathrm{C}} N$.

Если A и B суть C-алгебры, то на C-модуле $\mathrm{A} \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$ можно ввести

структуру C-алгебры, полагая

$$\mathrm{c}\,(\mathrm{a}\otimes\mathrm{b}) = \mathrm{ca}\otimes\mathrm{b},\ \mathrm{c}\in\mathrm{C},\ \mathrm{a}\in\mathrm{A},\ \mathrm{b}\in\mathrm{B}. \tag{B.7}$$

Легко проверить, что изоморфизм C-модулей $\mathrm{T} : \mathrm{A}\otimes_{\mathrm{C}}\mathrm{B}\to\mathrm{B}\otimes_{\mathrm{C}}\mathrm{A}$ согласован с умножением и является поэтому изоморфизмом C-алгебр.

Пусть I-множество, представленное в виде объединения непересекающихся подмножеств I_0 и I_1.

Базисом C-модуля M называется набор однородных элементов $m_i\in M$, где $i\in I$, такой, что $\mathrm{p}\,(m_i) = 0$ при $i\in I_0$ и $p\,(m_i) = 1$ при $i\in I_1$, причем каждый элемент m однозначно записывается в виде суммы $\sum\limits_i \mathrm{c}_i m_i$, где все $\mathrm{c}_i\in\mathrm{C}$, кроме конечного числа, равны нулю. C-модуль называется *свободным*, если в нем можно выбрать базис, соответствующий некоторому набору индексов.

B.2. Суперматричная алгебра

Суперматричной структурой назовем матричную структуру с приписанной каждой строке и каждому столбцу четностью. Четность i-й строки обозначим $\mathrm{p}_{row}\,(i)$, четность j-столбца — $\mathrm{p}_{col}\,(j)$. Обычно суперматричная структура будет выбираться так, чтобы все четные строки и столбцы шли сначала, а нечетные — потом. Такая суперматричная структура будет называться *стандартной*[*)]. Стандартную суперматричную структуру можно записывать в блочном 2×2 виде:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{S} \\ \mathrm{T} & \mathrm{U} \end{pmatrix}, \tag{B.8}$$

Примечание. Нестандартные суперматричные структуры (когда нечетные элементы располагаются не блоками, а по диагоналям) рассматривались в [787].

где $\mathrm{R}, \mathrm{S}, \mathrm{T}, \mathrm{U}$ — матричные структуры, согласованные с делением строк и столбцов на четные и нечетные. В случае обобщенной $\mathbb{Z}_3$ суперсимметрии [788] суперматричная структура описывается блочной 3×3 матрицей [789].

Если суперматричная структура содержит p четных и q нечетных строк и m четных и n нечетных столбцов, то размер этой структуры равен $(p|q) \times (m|n)$. *Порядком* суперматричной структуры размера $(p|q) \times (p|q)$ называется пара натуральных чисел $(p|q)$. Суперматричные структуры порядка $(p|q)$ соответствуют элементам $\mathrm{Hom}\left(\mathbf{\Lambda}^{p|q}, \mathbf{\Lambda}^{p|q}\right)$.

Пусть задана суперматричная структура M и некоторое суперпространство Λ. *Матрицей* с элементами из $\mathbf{\Lambda}$ называется множество $\{\mathrm{X}_{ij} \mid \mathrm{X}_{ij} \in \mathbf{\Lambda}\}$, соответствующее клеткам суперматричной структуры M. Определим на линейном пространстве матриц с элементами из $\mathbf{\Lambda}$ четность следующим образом: $\mathrm{p}(\mathrm{M}) = 0$, если $\mathrm{p}(\mathrm{X}_{ij}) + \mathrm{p}_{row}(i) + \mathrm{p}_{col}(j) = 0$, и $p(\mathrm{X}) = 1$, если $\mathrm{p}(\mathrm{X}_{ij}) + \mathrm{p}_{row}(i) + \mathrm{p}_{col}(j) = 1$, для всех i, j.

Легко проверить, что относительно таким образом введенной четности линейное пространство матриц превращается в суперпространство. Если суперматричная структура стандартна, то определение четности матриц (B.8) можно переписать в виде $\mathrm{p}(\mathrm{M}) = 0$, если $\mathrm{p}(\mathrm{R}_{ij}) = \mathrm{p}(\mathrm{U}_{kl}) = 0$, $\mathrm{p}(\mathrm{S}_{il}) = \mathrm{p}(\mathrm{T}_{kj}) = 1$, и $\mathrm{p}(\mathrm{X}) = 1$, если $\mathrm{p}(\mathrm{R}_{ij}) = \mathrm{p}(\mathrm{U}_{kl}) = 1$, $\mathrm{p}(\mathrm{S}_{il}) = \mathrm{p}(\mathrm{T}_{kj}) = 0$.

Введем на суперпространстве матриц размера $(p|q) \times (m|n)$ с элементами из коммутативной супералгебры C структуру C-модуля, полагая

$$(\mathrm{Mc})_{ij} = (-1)^{\mathrm{p(c)p}_{col}(j)}\, \mathrm{X}_{ij}\mathrm{c}, \quad (\mathrm{cX})_{ij} = (-1)^{\mathrm{p}(c)\mathrm{p}_{row}(i)}\, \mathrm{cX}_{ij}. \tag{B.9}$$

Эту структуру можно задать и другим, эквивалентным образом, а именно, определив для каждой пары целых чисел $(p|q)$ гомоморфизм

супералгебр $\mathrm{C} \to \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$, который каждому элементу $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$ ставит в соответствие диагональную матрицу

$$\mathrm{scalar}_{p|q}(\mathrm{C}) = \mathrm{diag}\left(\mathrm{c}, \ldots, \mathrm{c}, (-1)^{\mathrm{p(c)}}\,\mathrm{c}, \ldots, (-1)^{\mathrm{p(c)}}\,\mathrm{c}\right) \tag{B.10}$$

со стандартной суперматричной структурой. Теперь структуру C-модуля на суперпространстве матриц размера $(p,q)\times(m,n)$ можно ввести по формуле

$$\mathrm{cM} = \mathrm{scalar}_{p|q}(\mathrm{C})\cdot\mathrm{M} = \mathrm{M}\cdot\mathrm{scalar}_{m|n}(\mathrm{C}). \tag{B.11}$$

Из ассоциативности матричного умножения следует, что

$$(\mathrm{cX})\,\mathrm{Y} = \mathrm{c}\,(\mathrm{XY}),\ (\mathrm{Xc})\,\mathrm{Y} = \mathrm{X}\,(\mathrm{cY}),\ \ \mathrm{X}\,(\mathrm{Yc}) = (\mathrm{XY})\,\mathrm{c} \tag{B.12}$$

при $\mathrm{X},\mathrm{Y} \in \mathrm{Mat}\,(p|q;\mathrm{C})$. Следовательно, супералгебра $\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$ является C-алгеброй.

Пусть $\mathrm{M}=(\mathrm{X}_{ij})$ — матрица размера $(p,q)\times(m,n)$ с элементами из суперпространства $\mathbf{\Lambda}$. *Супертранспонированной* к ней назовем матрицу размера $(m,n)\times(p,q)$,элементы которой имеют вид:

$$\left(\mathrm{M}^{\mathrm{st}}\right)_{ij} = (-1)^{(\mathrm{p}_{row}(i)+\mathrm{p}_{col}(j))(\mathrm{p}(X)+\mathrm{p}_{row}(i))}\,\mathrm{X}_{ji} =$$

$$(-1)^{(\mathrm{p}_{row}(i)+\mathrm{p}_{col}(j))(\mathrm{p}(X)+\mathrm{p}_{col}(j))}\,\mathrm{X}_{ji}, \tag{B.13}$$

а суперматричная структура определяется естественным образом. В формуле (B.13) четности $\mathrm{p}_{row}(i)$, $\mathrm{p}_{col}(j)$ берутся согласовано с суперматричной структурой матрицы M. Как увидим, при таком выборе знаков переход от матрицы C-линейного оператора осуществляется с помощью супертранспонирования. Если суперматричная структура имеет стан-

дарный вид, то формула (B.13) дает

$$\mathrm{M}^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{S} \\ \mathrm{T} & \mathrm{U} \end{pmatrix}^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}^T & \mathrm{T}^T \\ -\mathrm{S}^T & \mathrm{U}^T \end{pmatrix}, \tag{B.14}$$

если $\mathrm{p}\,(\mathrm{M}) = 0$, и

$$\mathrm{M}^{st} = \begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{S} \\ \mathrm{T} & \mathrm{U} \end{pmatrix}^{st} = \begin{pmatrix} \mathrm{R}^T & -\mathrm{T}^T \\ \mathrm{S}^T & \mathrm{U}^T \end{pmatrix}, \tag{B.15}$$

если $\mathrm{p}\,(\mathrm{M}) = 1$.

Дважды транспонированная матрица имеет вид:

$$\left(\begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{S} \\ \mathrm{T} & \mathrm{U} \end{pmatrix}^{\mathrm{st}}\right)^{\mathrm{st}} = \begin{pmatrix} \mathrm{R} & -\mathrm{S} \\ -\mathrm{T} & \mathrm{U} \end{pmatrix}. \tag{B.16}$$

Следовательно, порядок супертранспонирования равен 4.

B.3. Суперслед и супердетерминант

Пусть C — коммутативная супералгебра. Аналогом обычной матричной алгебры является супералгебра $\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}\,(p|q)$. *Суперследом* называется гомоморфизм супералгебр $\mathrm{str} : \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}\,(p|q) \to \mathrm{C}$, определяемый по формуле

$$\mathrm{str}\,\mathrm{M} = \sum_{i,j} (-1)^{(\mathrm{p}(X)+1)\mathrm{p}_{row}(i)}\,\mathrm{X}_{ij} = \sum_{i,j} (-1)^{(\mathrm{p}(X_{ij})+1)\mathrm{p}_{row}(i)}\,\mathrm{X}_{ij}. \tag{B.17}$$

Иначе говоря, если $\mathrm{M}=\begin{pmatrix} \mathrm{R} & \mathrm{S} \\ \mathrm{T} & \mathrm{U} \end{pmatrix}$, то

$$\operatorname{str}\mathrm{M} = \operatorname{tr}\mathrm{R} - \operatorname{tr}\mathrm{U} \tag{B.18}$$

для четных матриц $\mathrm{p}(\mathrm{M}) = 0$ и

$$\operatorname{str}\mathrm{M} = \operatorname{tr}\mathrm{R} + \operatorname{tr}\mathrm{U} \tag{B.19}$$

для нечетных матриц $\mathrm{p}(\mathrm{M}) = 1$.

Определение B.2. *Отображение* $\operatorname{str} : \operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q) \to \mathrm{C}$ *является* C*-линейным гомоморфизмом.*

$$\operatorname{str}\mathrm{M}^{\mathrm{st}} = \operatorname{str}\mathrm{M}, \ \ \operatorname{str}\mathbf{\Pi}(\mathrm{M}) = (-1)^{\mathrm{p}(X)+1}\operatorname{str}\mathrm{M}. \tag{B.20}$$

Пусть X-матрица размера $(p|q)\times(m|n)$, Y-матрица размера $(m|n)\times(p|q)$. Тогда

$$\operatorname{str}\mathrm{XY} = (-1)^{\mathrm{p(X)p(Y)}}\operatorname{str}\mathrm{YX}. \tag{B.21}$$

В частности, если $\mathrm{X}, \mathrm{D} \in \operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$, где D есть четная обратимая матрица,то

$$\operatorname{str}\mathrm{DXD}^{-1} = \operatorname{str}\mathrm{X}. \tag{B.22}$$

Будем обозначать через $GL(p|q;\mathrm{C})$ мультипликативную группу четных обратимых элементов из $\operatorname{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$. Эта группа является аналогом обычной общей линейной группы. Определим гомоморфизм группы $GL(p|q;\mathrm{C})$ в группу C_0^* обратимых элементов из C_0 — аналог обычного определителя, положив

$$\operatorname{Ber}\mathrm{M} = \det\left(\mathrm{R} - \mathrm{SU}^{-1}\mathrm{T}\right)\det\mathrm{U}^{-1}. \tag{B.23}$$

Лемма В.3. *Пусть* C *-некоторая коммутативная супералгебра, отображение* $\epsilon : \mathrm{C} \to \mathrm{C}/\mathrm{id}\mathrm{C}_1$ *— каноническая проекция и* $\epsilon : \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q) \to \mathrm{Mat}_{\epsilon[\mathrm{C}]}(p|q)$ *— соответствующий гомоморфизм матричных алгебр. Матрица* $\mathrm{M} \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$ *обратима тогда и только тогда, когда обратим элемент* $\epsilon[\mathrm{M}] \in \mathrm{Mat}_{\epsilon[\mathrm{C}]}(p|q)$.

В силу **Леммы В.3** матрица U обратима, и элементы матриц $\mathrm{R} - \mathrm{SU}^{-1}\mathrm{T}$ и U лежат в коммутативной алгебре C_0. Поэтому все определители имеют смысл и $\mathrm{Ber}\,\mathrm{M} \in \mathrm{C}_0^*$. Функция Ber называется *березианином.* Суперслед и березиниан связаны точно так же, и обычный след и детерминант. А именно:

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{M} = \exp \mathrm{str}\,\ln \mathrm{M}, \tag{B.24}$$

если правая и левая части (B.24) определены.

В отличие от детерминанта березиниан определен не на всем множестве $\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(p|q)$ (см. **Приложение В.5**).

Теорема В.4. *Пусть* $\mathrm{XY} \in GL_{\mathrm{C}}(p|q)$, *тогда*

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{XY} = \mathrm{Ber}\,\mathrm{X} \cdot \mathrm{Ber}\,\mathrm{Y}. \tag{B.25}$$

Определение В.5. *Суперматричная функция* str *является гомоморфизмом* C *-модулей, а* Ber *— гомоморфизмом групп.*

Пусть M, N-свободные C-модули, $\mathrm{X} \in \mathrm{End}_{\mathrm{C}}(M)$ и $\mathrm{Y} \in \mathrm{End}_{\mathrm{C}}(N)$, а $\mathrm{V} \in GL_{\mathrm{C}}(M), \mathrm{W} \in GL_{\mathrm{C}}(N)$. Тогда

$$\mathrm{str}\,(\mathrm{X} \oplus \mathrm{Y}) = \mathrm{str}\,\mathrm{X} + \mathrm{str}\,\mathrm{Y}, \tag{B.26}$$

$$\mathrm{Ber}\,\mathrm{V} \oplus \mathrm{W} = \mathrm{Ber}\,\mathrm{V} \cdot \mathrm{Ber}\,\mathrm{W}. \tag{B.27}$$

Если $\mathrm{X} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M,N)$ и $\mathrm{Y} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}}(M,N)$, то

$$\mathrm{str}\, XY = (-1)^{\mathrm{p}(X)\mathrm{p}(Y)}\, \mathrm{str}\, YX. \tag{B.28}$$

B.4. Странные супералгебра, след и детерминант

Определим супералгебру $Q(n)$, которая является еще одним аналогом матричной алгебры. Интерес к ней в последнее время возобновился в связи с новыми свойствами инвариантных функций на супералгебрах Ли [790–796] и их квантованых версиях [797, 798].

Пусть A — произвольная супералгебра. Алгебра $\mathrm{Q}(\mathrm{A})$ состоит из выражений вида $\mathrm{a} + \varepsilon\mathrm{b}$, где $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{A}$. Сложение выражений $\mathrm{a} + \varepsilon\mathrm{b}$ определяется естественным образом, а структуры суперпространства и супералгебры вводятся по формулам

$$\left(\mathrm{Q}(\mathrm{A})\right)_i = \mathrm{A}_i + \varepsilon \mathrm{A}_{i-1}, \tag{B.29}$$

$$(\mathrm{a} + \varepsilon\mathrm{b})(\mathrm{c} + \varepsilon\mathrm{d}) = \Big(\mathrm{ac} - (-1)^{\mathrm{p(b)}}\,\mathrm{bd}\Big) + \varepsilon\Big(\mathrm{bc} + (-1)^{\mathrm{p(a)}}\,\mathrm{ad}\Big). \tag{B.30}$$

Пусть C-коммутативная супералгебра. Тогда $\mathrm{Q}(\mathrm{C})$ можно определить как расширение супералгебры C с помощью одного элемента ε такого, что $\mathrm{p}(\varepsilon) = 1, \varepsilon^2 = -1$ и $[\varepsilon, \mathrm{c}] = 0$ для любого $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$.

Если супералгебра A является C-алгеброй, то $\mathrm{Q}(\mathrm{A}) \cong \mathrm{Q}(\mathrm{C}) \otimes_{\mathrm{C}} \mathrm{A}$. Тем самым $\mathrm{Q}(\mathrm{A})$ тоже является C-алгеброй. Из определения супералгебры $\mathrm{Q}(\mathrm{A})$ следует, что $\left(\mathrm{Q}(\mathrm{A})\right)_0$ является алгеброй. Имеется изоморфизм алгебр (но не супералгебр!) $\left(\mathrm{Q}(\mathrm{A})\right)_0 \to \mathrm{A}$, задаваемый формулой $\mathrm{a} + \varepsilon\mathrm{b} \longmapsto \mathrm{a} + \mathrm{b}$, где $\mathrm{a} \in \mathrm{A}_0$, $\mathrm{b} \in \mathrm{A}_1$.

Если супералгебра A ассоциативна, то ассоциативна и супералгебра $\mathrm{Q}(\mathrm{A})$. Если A — алгебра с единицей, то $\mathrm{Q}(\mathrm{A})$ — некоммутативна.

Положим $Q_{\mathrm{C}}(n) = \mathrm{Q}(\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|0))$, где C — коммутативная супералгебра. Мы будем часто рассматривать $Q_{\mathrm{C}}(n)$ как подалгебру в $\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|n)$, причем вложение $Q_{\mathrm{C}}(n) \to \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|n)$ проводится по формуле

$$\mathrm{A} + \varepsilon \mathrm{B} \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{A} & (-1)^{\mathrm{p(B)}+1}\,\mathrm{B} \\ \mathrm{B} & (-1)^{\mathrm{p(A)}}\,\mathrm{A} \end{pmatrix}, \tag{B.31}$$

где $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|0)$.

На подсупералгебре $Q_{\mathrm{C}}(n) \subset \mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|n)$ суперслед тождественно равен нулю. Мы определим на $Q_{\mathrm{C}}(n)$ $\mathrm{otr} : Q_{\mathrm{C}}(n) \to \mathrm{C}$ (otr — нечетный, "странный"), полагая

$$\mathrm{otr}\ (A + \varepsilon B) = \mathrm{str}\, B. \tag{B.32}$$

Определение B.6. *Отображение* $\mathrm{otr} : Q_{\mathrm{C}}(n) \to \mathrm{C}$ *есть нечетный гомоморфизм* C*-модулей.*

$$\mathrm{otr}\,\mathrm{XY} = (-1)^{\mathrm{p(X)p(Y)}}\,\mathrm{otr}\,\mathrm{YX},$$

если $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in Q_{\mathrm{C}}(n)$.

Обозначим через $GQ_{\mathrm{C}}(n)$ группу четных обратимых элементов из $Q_{\mathrm{C}}(n)$. Она является нечетным ("странным") аналогом полной линейной группы. "Странные" аналоги для других групп получены в [794].

Группу $GQ_{\mathrm{C}}(n)$ можно рассматривать как подгруппу в $GL_{\mathrm{C}}(n|n)$, соотоящую из матриц M вида

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & -\mathrm{B} \\ \mathrm{B} & \mathrm{A} \end{pmatrix}. \tag{B.33}$$

Другая реализация: группа $GQ_{\mathrm{C}}(n)$ изоморфна группе всех обра-

тимых матриц из $\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|0)$, причем изоморфизм задается формулой $\mathrm{A}+\varepsilon\mathrm{B}\to\mathrm{A}+\mathrm{B}$.

Лемма B.7. *На всех матрицах подгруппы $GQ_{\mathrm{C}}(n)\subset GL_{\mathrm{C}}(n|n)$ березиниан тождественно равен 1.*

Определим теперь *нечетный детерминант* $\mathrm{qet}:GQ_{\mathrm{C}}(n)\to\mathrm{C}_1$. Для каждой нечетной матрицы $\mathrm{M}\in\mathrm{Mat}_{\mathrm{C}}(n|0)$ положим

$$\mathrm{F}(\mathrm{M})=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{2i+1}\mathrm{str}\,\mathrm{M}^{2i+1}. \tag{B.34}$$

На самом деле эта сумма конечна, так как $X^k=0$ при $k>n^2$. Отметим также, что $F_{2k}=0$.

Определим отображение $\mathrm{qet}:GQ_{\mathrm{C}}(n)\to\mathrm{C}_1$ (qet — queer, "странный" детерминант) формулой

$$\mathrm{qet}\,(\mathrm{A}+\varepsilon\mathrm{B})=F\left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{2i+1}\mathrm{str}\,\left(\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}\right)^{2i+1}. \tag{B.35}$$

Происхождение этой формулы таково. Мы хотим определить гомоморфизм $\mathrm{qet}:GQ_{\mathrm{C}}(n)\to\mathrm{C}_1$, соответствующий нечетному следу otr. Кроме того, qet должен равняться нулю на элементах из $GL_{\mathrm{C}}(n|0)$. Если $\mathrm{M}=\varepsilon\mathrm{B}$, то естественно положить

$$\mathrm{qet}\,(1+\mathrm{M})=\mathrm{otr}\,\ln(1+\mathrm{M})=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{2i+1}\mathrm{str}\,\mathrm{B}^{2i+1}, \tag{B.36}$$

что и приводит к данному определению [186, 743, 799].

Определение B.8. *Пусть $\mathrm{I}\subset\mathrm{C}$ — идеал и $\mathrm{M}\in\mathrm{Q}_{\mathrm{I}}(n)$. Тогда*

$$\mathrm{qet}\,(1+\mathrm{M})=\mathrm{otr}\,\mathrm{M}\mathrm{mod}\,\mathrm{I}^2. \tag{B.37}$$

Теорема B.9. *Если* $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in GQ_{\mathrm{C}}(n)$, *то*

$$\operatorname{qet} \mathrm{XY} = \operatorname{qet} \mathrm{X} + \operatorname{qet} \mathrm{Y}. \tag{B.38}$$

Иначе говоря, qet есть гомоморфизм групп.

B.5. Идеалы $(1|1) \times (1|1)$ суперматриц

Рассмотрим подробнее полугрупповую структуру суперматриц из $\mathrm{Mat}_{\Lambda}(1|1)$. Обозначим

$$\mathfrak{M}' = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M} | \, \epsilon(a) \neq 0\}, \tag{B.39}$$

$$\mathfrak{M}'' = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M} | \, \epsilon(b) \neq 0\}, \tag{B.40}$$

$$\mathfrak{J}' = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M} | \, \epsilon(a) = 0\}, \tag{B.41}$$

$$\mathfrak{J}'' = \{\mathrm{M} \in \mathfrak{M} | \, \epsilon(b) = 0\}. \tag{B.42}$$

Тогда $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}' \cup \mathfrak{J}' = \mathfrak{M}'' \cup \mathfrak{J}''$ и $\mathfrak{M}' \cap \mathfrak{J}' = \varnothing$, $\mathfrak{M}'' \cap \mathfrak{J}'' = \varnothing$, поэтому $\mathfrak{M}^{inv} = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}''$ и $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{M}''$.

Березиниан $\operatorname{Ber} \mathrm{M}$ хорошо определен только для суперматриц из $\mathfrak{M}''$ и обратим, когда $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}^{inv}$. Но для суперматриц из $\mathfrak{M}'$ обратный элемент $(\operatorname{Ber} \mathfrak{M})^{-1}$ хорошо определен и обратим, если $\mathrm{M} \in \mathfrak{M}^{inv}$ [30]. Относительно умножения суперматриц $(\cdot)$ множество $\mathfrak{M}$ представляет собой полугруппу $\mathbf{M} \stackrel{def}{=} \{\mathfrak{M}; \cdot\}$ всех $(1|1)$-мерных суперматриц, и множество $\mathfrak{M}^{inv}$ представляет подгруппу $\mathbf{G} \stackrel{def}{=} \left\{\mathfrak{M}^{inv}; \cdot\right\} \subseteq \mathbf{M}$. В стандартном базисе $\mathfrak{M}^{inv}$ представляет полную линейную группу $GL_{\Lambda}(1|1)$ [30]. Подмножество $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{M}$ представляет идеал полугруппы $\mathbf{M}$ [104].

Предложение B.10. 1) *Множества* $\mathfrak{J}$, $\mathfrak{J}'$ *и* $\mathfrak{J}''$ *представляют изолированные идеалы полугруппы* $\mathbf{M}$.

2) *Множества* $\mathfrak{M}^{inv}$, $\mathfrak{M}'$ *и* $\mathfrak{M}''$ — *фильтры полугруппы* $\mathbf{M}$.

3) *Множества* $\mathfrak{M}'$ *и* $\mathfrak{M}''$ *представляют подполугруппы полугруппы* $\mathbf{M}$, *при этом* $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}^{inv} \cup \mathfrak{J}'$ *и* $\mathfrak{M}'' = \mathfrak{M}^{inv} \cup \mathfrak{J}''$, *где соответствующие изолированные идеалы* $\mathfrak{K}' = \mathfrak{M}' \setminus \mathfrak{M}^{inv} = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{J}''$ *и* $\mathfrak{K}'' = \mathfrak{M}'' \setminus \mathfrak{M}^{inv} = \mathfrak{M}'' \cap \mathfrak{J}'$.

4) Идеал $\mathbf{I}$ *полугруппы* $\mathbf{M}$ *представлен множеством* $\mathfrak{J} = \mathfrak{J}' \cup \mathfrak{K}' = \mathfrak{J}'' \cup \mathfrak{K}''$.

Доказательство. Допустим $M_3 = M_1 M_2$, тогда $a_3 = a_1 a_2 + \alpha_1 \beta_2$ и $b_3 = b_1 b_2 + \beta_1 \alpha_2$. Взяв числовую часть, мы выводим $\epsilon(a_3) = \epsilon(a_1)\,\epsilon(a_2)$, и $\epsilon(b_3) = \epsilon(b_1)\,\epsilon(b_2)$. Далее используем определения подполугрупп и идеалов из **Приложения А**. ■

B.6. Правые и левые Γ-матрицы

В общем случае, нечетно-редуцированные матрицы $T \in \mathfrak{T}$ (см. (4.4) и **Подраздел 4.1**) не образуют полугруппу, поскольку их умножение не замкнуто (4.9). Однако, некоторое подмножество в $\mathfrak{T}$ может образовать полугруппу $\mathbf{T}^{SG}$, именно то, в котором $(1|1)$-элемент в результирующей суперматрице (4.9) обращается в нуль (см. **Предложение 4.8**).

Чтобы определить класс полугрупп такого типа, мы рассмотрим некоторые обобщения. Пусть $\alpha, \beta \in \Gamma$, где $\Gamma \subset \Lambda_1$ — нечетная подсупербласть. Мы обозначим

$$\operatorname{Ann}\alpha \stackrel{def}{=} \{\Gamma \in \Lambda_1 \,|\, \Gamma \cdot \alpha = 0\}\,,\ \operatorname{Ann}\Gamma = \bigcap_{\alpha \in \Gamma} \operatorname{Ann}\alpha, \tag{B.43}$$

В последнем определении пересечение множеств является решающим.

Замечание **B.11.** Нильпотентность[*)] α приводит к $\alpha \in \operatorname{Ann}\alpha$ и как следствие $\Gamma \cdot \operatorname{Ann}\Gamma = 0$.

Определение B.12. *Определим левые и правые* Γ*-матрицы следующим образом*

$$\mathrm{T}^{\Gamma}_{(L)} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \operatorname{Ann}\Gamma & b \end{pmatrix}, \tag{B.44}$$

$$\mathrm{T}^{\Gamma}_{(R)} \stackrel{def}{=} \begin{pmatrix} 0 & \operatorname{Ann}\Gamma \\ \Gamma & b \end{pmatrix}. \tag{B.45}$$

Предложение B.13. Γ*-матрицы* $\mathrm{T}^{\Gamma}_{(L,R)} \subset \mathfrak{T}$ *образуют подполугруппы* $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ *относительно умножения суперматриц.*

Доказательство. Рассмотрим аналог умножения (4.9) для множеств в случае левых Γ-матриц $\mathrm{T}^{\Gamma}_{(L)}$ следующим образом

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \operatorname{Ann}\Gamma & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \operatorname{Ann}\Gamma & b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma \cdot \operatorname{Ann}\Gamma & \Gamma \cdot b_2 \\ b_1 \cdot \operatorname{Ann}\Gamma & b_1 \cdot b_2 + \operatorname{Ann}\Gamma \cdot \Gamma \end{pmatrix}.$$

Таким образом, условие $\Gamma \cdot \operatorname{Ann}\Gamma = 0$ и доказывает утверждение. ■

Замечание **B.14.** В полугруппах $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ подмножество матриц с $\beta = 0$ представляет собой левый идеал, и с $\alpha = 0$ представляет собой правый идеал, матрицы с $b = 0$ образуют двусторонний идеал.

Определение B.15. *Назовем* Γ*-полугруппами введенные в* B.13 *полугруппы* $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$.

Замечание **B.16.** Γ-полугруппы $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ не содержат единицу.

Сущность Γ-полугрупп $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ может быть выяснена из следую-

---

Примечание. Здесь мы рассматриваем только тот случай, когда индекс нильпотентности 2 и $\alpha^2 = 0$.

щей аналогии с биидеалами [451, 452, 800]. Напомним, что биидеал в полугруппе $\mathbf{M}$ может быть введен как множество $\mathbf{B}$ суперматриц, удовлетворяющих $\mathbf{B} * \mathbf{M} * \mathbf{B} \subseteq \mathbf{B}$ [451]. Для Г-полугрупп $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ это соотношение слишком сильное и может не выполняться. Тем не менее, некоторый более общий аналог его может быть найден.

Предложение B.17. *Для любого заданного* $\Gamma \subset \Lambda_1$ *полугруппы* $\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)}$ *являются одновременно слабыми биидеалами*[*)], *которые удовлетворяют соотношениям*

$$\mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)} * \mathbf{M} * \mathbf{T}^{\Gamma}_{(L,R)} \subseteq \mathbf{T}^{\Gamma_1}_{(L,R)}, \tag{B.46}$$

где $\Gamma_1(\Gamma) \subset \Lambda_1$ *- суперобласть в нечетном секторе* Λ.

Доказательство. Рассматрим аналог (B.46) для множеств в виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \operatorname{Ann}\Gamma & b_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \beta & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \Gamma \\ \operatorname{Ann}\Gamma & b_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \Gamma \cdot \operatorname{Ann}\Gamma \cdot b & \Gamma \cdot bd - \Gamma^2 \cdot \beta \\ \operatorname{Ann}\Gamma \cdot cb - (\operatorname{Ann}\Gamma)^2 \cdot \alpha & \Gamma \cdot \operatorname{Ann}\Gamma \cdot a + c\beta \cdot \Gamma + \operatorname{Ann}\Gamma \cdot \alpha \cdot d + cbd \end{pmatrix}. \tag{B.47}$$

Мы видим, что условие $\Gamma \cdot \operatorname{Ann}\Gamma = 0$ снова дает нечетно-редуцированную суперматрицу в правой части, за счет исчезновения $(1|1)$-слагаемого. Тогда произведение $(2|1)$ и $(1|2)$-элементов равно нулю по той же причине, и мы имеем Г-матрицу, однако, определенной над иной суперобластью $\Gamma_1(\Gamma) \subset \Lambda_1$. ■

Примечание. Слово “обобщенный биидеал” резервировано для другой конструкции в [451].

B.7. Полугруппа множеств редуцированных матриц

Чтобы объединить введенные множества суперматриц (4.12), мы рассмотрим тройные произведения

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \star \mathcal{A} \star \mathcal{T} &= \mathcal{S}, \\ \mathcal{T} \star \mathcal{A} \star \mathcal{T} &= \mathcal{T}, \\ \mathcal{S} \star \mathcal{D} \star \mathcal{S} &= \mathcal{S}, \\ \mathcal{T} \star \mathcal{D} \star \mathcal{S} &= \mathcal{T}. \end{aligned} \tag{B.48}$$

Здесь мы замечаем, что множества суперматриц $\mathcal{A}$ и $\mathcal{D}$ играем роль "сэндвич" элементов в особом $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ умножении. Более того, сэндвич элементы находятся во взаимооднозначном соответствии с правыми множествами, на которых они действуют, и таким образом они "чувствительны справа". Следовательно, вполне естественно ввести следующее

Определение B.18. *Сэндвич-произведение множеств редуцированных суперматриц* $\mathcal{R} = \mathcal{S}$,$\mathcal{T}$

$$\mathcal{R}_1 \odot \mathcal{R}_2 \stackrel{def}{=} \begin{cases} \mathcal{R}_1 \star \mathcal{D} \star \mathcal{R}_2, & \mathcal{R}_2 = \mathcal{S}, \\ \mathcal{R}_1 \star \mathcal{A} \star \mathcal{R}_2, & \mathcal{R}_2 = \mathcal{T}. \end{cases} \tag{B.49}$$

В терминах сэндвич-произведения из (B.48) мы получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{S} \odot \mathcal{T} &= \mathcal{S}, \\ \mathcal{T} \odot \mathcal{T} &= \mathcal{T}, \\ \mathcal{S} \odot \mathcal{S} &= \mathcal{S}, \\ \mathcal{T} \odot \mathcal{S} &= \mathcal{T}. \end{aligned} \tag{B.50}$$

Предложение B.19. *$\odot$-умножение ассоциативно.*

Доказательство. Перебор всех тройных произведений с различной расстановкой скобок и использование таблицы умножения (B.50). ■

Определение B.20. *Элементы $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ образовывают полугруппу множеств относительно $\odot$- умножения* (B.49)*, которую мы будем называть полугруппой множеств редуцированных матриц и обозначим* $\mathbf{RMS}_{set}$ (**R***educed super***M***atrix* **S***emigroup of sets*).

Из (B.50) видно, что $\mathbf{RMS}_{set}$ есть полугруппа идемпотентов, причем каждый элемент является правым нулем, поэтому мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема B.21. *Полугруппа* $\mathbf{RMS}_{set}$ *изоморфна особой полугруппе правых нулей, т. е.* $\mathbf{RMS}_{set} \cong \mathbf{Z}_R = \{\mathcal{R} = \mathcal{S} \cup \mathcal{T}; \odot\}$.

B.8. Непрерывное суперматричное представление нулевых полугрупп

Рассматрим абстрактное множество $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha$ (которое "нумеруется" нечетным параметром $\alpha \in \Lambda^{0|1}$), состоящее из элементов $\boldsymbol{p}_t \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha$ ($t \in \Lambda^{1|0}$ представляет собой непрерывный четный суперпараметр), которые подчиняются закону умножения

$$\boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{p}_t. \tag{B.51}$$

Утверждение B.22. *Умножение* (B.51) *ассоциативно и следовательно множество $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ является полугруппой* $\boldsymbol{P}_\alpha \stackrel{def}{=} \{\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha; *\}$.

Утверждение B.23. *Полугруппа $\boldsymbol{P}_\alpha$ представляет собой непрерывное однопараметрическое представление полугруппы левых нулей* [104],

в которой каждый элемент одновременно — и левый нуль и правая единица.

Предложение B.24. *Полугруппа* $\boldsymbol{P}_\alpha$ *эпиморфна* (*не изоморфна!*) *полугруппе* $\mathbf{P}_\alpha$.

Доказательство. Сравнивая (4.43) и (B.51), мы замечаем, что отображение $\varphi : \boldsymbol{P}_\alpha \to \mathbf{P}$ представляет собой гомоморфизм. Видно, что два элемента $\boldsymbol{p}_t$ и $\boldsymbol{p}_u$, удовлетворяющих (4.46), имеют один и то же образ

$$\varphi(\boldsymbol{p}_t) = \varphi(\boldsymbol{p}_u) \leftrightarrow t - u = \operatorname{Ann}\alpha,\ \boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_u \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha. \tag{B.52}$$

■

Определение B.25. *Соотношение*

$$\boldsymbol{\Delta}_\alpha = \{(\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_u) \mid t - u = \operatorname{Ann}\alpha,\ \boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_u \in \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha\}. \tag{B.53}$$

назовем α*-отношением равенства.*

Замечание **B.26.** Если суперпараметры t и α принимают значения в различных алгебрах Грассмана, которые не содержат взаимно уничтожающихся элементов кроме нуля, тогда $\operatorname{Ann}\alpha = 0$ и $\boldsymbol{\Delta}_\alpha = \boldsymbol{\Delta}$, где $\boldsymbol{\Delta}$ — стандартное отношение равенства [104].

Теперь мы можем сформулировать более общее высказывание.

Утверждение B.27. *В суперсимметричном случае аналог стандартного отношения равенства* $\boldsymbol{\Delta}$ *представляет собой* α*-отношение равенства* $\boldsymbol{\Delta}_\alpha$ (B.53).

Тот факт, что $\boldsymbol{\Delta} \neq \boldsymbol{\Delta}_\alpha$ приводит к некоторые новым абстрактным алгебраическим структурам в суперматричной теории и нетривиальным результатам. Среди последних имеется следующий

Следствие B.28. *Ядро гомоморфизма φ определяется следующей формулой* $\ker\varphi = \bigcup\limits_{t\in\operatorname{Ann}\alpha} \boldsymbol{p}_t$.

Напомним, что в несуперсимметричном случае $\ker\varphi = \boldsymbol{p}_{t=0}$.

Замечание **B.29.** Вне $\ker\varphi$ полугруппа $\mathbf{P}_\alpha$ непрерывна и супергладка, что может быть показано посредством стандартных методов суперанализа [30, 174].

Утверждение B.30. *Полугруппа $\mathbf{P}_\alpha$ нередуктивна и несократима, поскольку $\boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}*\boldsymbol{p}_u \to \boldsymbol{p}_t\boldsymbol{\Delta}_\alpha\boldsymbol{p}_u$, но не $\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_u$ (или $\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{p}_u$) для всех $\boldsymbol{p}\in\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha$. Следовательно, суперматричное представление, заданное φ, не является точным.*

Следствие B.31. *Если $t + \operatorname{Ann}\alpha \cap u + \operatorname{Ann}\alpha \neq \varnothing$, тогда $\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{\Delta}_\alpha\boldsymbol{p}_u$ (а не $\boldsymbol{p}_t\Delta\boldsymbol{p}_u$ как в обычном случае).*

Аналогично, полугруппа $\boldsymbol{Q}_\alpha$ с умножением

$$\boldsymbol{q}_t * \boldsymbol{q}_u = \boldsymbol{q}_u \tag{B.54}$$

изоморфна полугруппе правых нулей, в которой каждый элемент является одновременно и правым нулем, и левой единицей, и, кроме того, полугруппа $\boldsymbol{Q}_\alpha$ эпиморфна полугруппе $\mathbf{Q}_\alpha$.

Определение B.32. *Полугруппы левых и правых нулей $\boldsymbol{P}_\alpha$ и $\boldsymbol{Q}_\alpha$ могут быть названы почти антикоммутативными*[*)], *поскольку для них $\boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{p}_u * \boldsymbol{p}_t$ или $\boldsymbol{q}_t * \boldsymbol{q}_u = \boldsymbol{q}_u * \boldsymbol{q}_t$ дает $\alpha t = \alpha u$ и $t = u + \operatorname{Ann}\alpha$.*

Нетривиальность данного определения и его отличие от случая абстрактных полугрупп левых и правых нулей основана на том факте, что суперматричное представление, заданное φ, не является точным

Примечание. По аналогии с антикоммутативными прямоугольными связками [104].

согласно **Утверждению B.30**.

Предложение B.33. *Полугруппы* $\boldsymbol{P}_\alpha$ *и* $\boldsymbol{Q}_\alpha$ *регулярны, но не инверсны.*

Доказательство. Для любых двух элементов $\boldsymbol{p}_t$ и $\boldsymbol{p}_u$, используя (B.51), мы имеем $\boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{p}_u * \boldsymbol{p}_t = (\boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{p}_u) * \boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_t$.

Аналогично, и для $\boldsymbol{q}_t$ и $\boldsymbol{q}_u$. Тогда $\boldsymbol{p}_t$ имеет хотя бы обратный элемент $\boldsymbol{p}_u * \boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{p}_u = \boldsymbol{p}_u$. Но $\boldsymbol{p}_u$ произвольно выбран, поэтому в полугруппах $\boldsymbol{P}_\alpha$ и $\boldsymbol{Q}_\alpha$ любые два элемента взаимноинверсны. Однако, $\boldsymbol{P}_\alpha$ и $\boldsymbol{Q}_\alpha$ не инверсные полугруппы, в которых каждый элемент имеет единственный инверсный [104]. ■

Важно подчеркнуть, что идеальное строение $\boldsymbol{P}_\alpha$ и $\boldsymbol{Q}_\alpha$ не полностью совпадают (хотя имеет много общего) с полугруппами левых и правых нулей в следующем смысле.

Предложение B.34. *Каждый элемент из* $\boldsymbol{P}_\alpha$ *образовывает изолированный главный правый идеал, каждый элемент из* $\boldsymbol{Q}_\alpha$ *образовывает главный левый идеал, и поэтому каждый главный правый и левый идеал в* $\boldsymbol{P}_\alpha$ *и* $\boldsymbol{Q}_\alpha$ *соответственно имеют идемпотентный генератор.*

Доказательство. Из (B.51) и (B.54) следует, что $\boldsymbol{p}_t = \boldsymbol{p}_t * \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha$ и $\boldsymbol{q}_u = \boldsymbol{\mathcal{Q}}_\alpha * \boldsymbol{q}_u$. ■

Предложение B.35. *Полугруппы* $\boldsymbol{P}_\alpha$ *и* $\boldsymbol{Q}_\alpha$ *просты слева и справа соответственно.*

Доказательство. Из (B.51) и (B.54) видно, что $\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha = \boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha * \boldsymbol{p}_t$ и $\boldsymbol{\mathcal{Q}}_\alpha = \boldsymbol{q}_u * \boldsymbol{\mathcal{Q}}_\alpha$. ■

Отношения Грина в стандартных полугруппах левых нулей следующие: $\mathscr{L}$-эквивалентность совпадает с универсальным отношением, и $\mathscr{R}$-эквивалентность совпадает с отношением равенства [104]. В нашем случае первое утверждение то же самое, но вместо последнего мы имеем

Теорема B.36. *В $\boldsymbol{P}_\alpha$ и $\boldsymbol{Q}_\alpha$ соответственно $\mathscr{R}$-эквивалентность и $\mathscr{L}$-эквивалентность совпадает с α-отношением равенства* (B.53).

Доказательство. Рассмотрим $\mathscr{R}$-эквивалентность в $\boldsymbol{P}_\alpha$. Два элемента $\boldsymbol{p}_t, \boldsymbol{p}_u \in \boldsymbol{P}_\alpha$ $\mathscr{R}$-эквивалентны тогда и только тогда, если $\boldsymbol{p}_t{*}\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha = \boldsymbol{p}_u{*}\boldsymbol{\mathcal{P}}_\alpha$. В терминах элементов матриц это выглядит, как $\alpha t = \alpha u$, что дает $t - u = \operatorname{Ann}\alpha$. По определению (B.53) это приводит к $\boldsymbol{p}_t\boldsymbol{\Delta}_\alpha\boldsymbol{p}_u$, и мы получаем $\mathscr{R} = \boldsymbol{\Delta}_\alpha$, и аналогично для $\mathscr{L}$-эквивалентности. ■

B.9. Отношение $\mathscr{R}$-эквивалентности для прямоугольной $(2|2)$-связки

Явный вид $(2|2)$-связки $\boldsymbol{F}^{(2|2)}_\alpha \ni \boldsymbol{f}_{t_1t_2,u_1u_2}$ в суперматричном представлении есть

$$\mathrm{F}_{t_1t_2,u_1u_2} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t_1 & \alpha t_2 \\ \alpha u_1 & 1 & 0 \\ \alpha u_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.55}$$

Согласно определению $\mathscr{R}$-классов [104], два элемента $\mathrm{F}_{t_1t_2,u_1u_2}$ и $\mathrm{F}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2}$ в связке $\mathscr{R}$-эквивалентны тогда и только тогда, если существует два других элемента $\mathrm{X}_{x_1x_2,y_1y_2}$, $\mathrm{W}_{v_1v_2,w_1w_2}$ таких, что

$$\mathrm{F}_{t_1t_2,u_1u_2} \cdot \mathrm{X}_{x_1x_2,y_1y_2} = \mathrm{F}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2}, \tag{B.56}$$

$$\mathrm{F}_{t'_1t'_2,u'_1u'_2} \cdot \mathrm{W}_{v_1v_2,w_1w_2} = \mathrm{F}_{t_1t_2,u_1u_2} \tag{B.57}$$

одновременно. Или в явном виде

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha t_1 & \alpha t_2 \\ \alpha y_1 & 1 & 0 \\ \alpha y_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t'_1 & \alpha t'_2 \\ \alpha u'_1 & 1 & 0 \\ \alpha u'_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{B.58}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha t'_1 & \alpha t'_2 \\ \alpha w_1 & 1 & 0 \\ \alpha w_2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \alpha t_1 & \alpha t_2 \\ \alpha u_1 & 1 & 0 \\ \alpha u_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{B.59}$$

Чтобы удовлетворить последнему равенству в (B.58) и (B.59) мы должны выбрать

$$\alpha y_1 = \alpha u'_1, \ \alpha y_1 = \alpha u'_1, \tag{B.60}$$

$$\alpha w_1 = \alpha u_1, \ \alpha w_2 = \alpha u_2, \tag{B.61}$$

$$\alpha t_1 = \alpha t'_1, \ \alpha t_2 = \alpha t'_2. \tag{B.62}$$

Из-за произвольности $\mathrm{X}_{x_1x_2,y_1y_2}$ и $\mathrm{W}_{v_1v_2,w_1w_2}$ первые уравнения в (B.60)–(B.61) всегда могут быть решены возможностью выбора параметра. Вторые уравнения в (B.62) представляют собой определение $\mathscr{R}$-класса в $(2|2)$-связке в суперматричной интерпретации [10].

Приложение Д

Перманенты и их обобщения для матриц с нильпотентными элементами

Перманенты представляют собой объект математического исследования, в настоящее время весьма распространенный, прежде всего, в комбинаторике и линейной алгебре [626]. Теория перманентов дважды стохастических матриц и $(0,1)$-матриц стала сейчас существенной и неотъемлемой частью комбинаторной математики, а именно того ее раздела, где рассматриваются матричные комбинаторные задачи. Интересные сами по себе проблемы, связанные с перманентами, приобрели актуальность также в связи с многообразными их приложениями — как математическими (например, в алгебре и теории вероятностей), так и в других отраслях знания (в квантовой теории поля, физической химии, статистической физике).

В своем знаменитом мемуаре 1812 г. Коши развивал теорию детерминантов как специального вида знакопеременных симметрических функций, которые он отличал от обычных симметрических функций, называя последние "перманентными симметрическими функциями". Он ввел также некоторый подкласс симметрических функций, которые были позднее Мюиром названы *перманентами*.

Интересно, что еще в 1872 г. рассматривались соотношения между перманентами и детерминантами матриц, элементами которых являлись суть "альтернирующие" (alternate) числа, т. е. антикоммутирующие (!) [801].

С появлением суперматематики роль перманентов принципиально меняется, поскольку элементами матриц могут быть нильпотентные и антикоммутирующие числа и функции, и поэтому многие классические

теоремы становятся неприменимыми или модифицируются (см. **Разделы 3** и **5**, а также [2, 3, 13]).

Д.1. Перманенты и детерминанты

Пусть $\boldsymbol{V}$ есть $n-$мерное пространство со скалярным произведением [626]. Тогда $\mathbb{Z}$-градуированное контравариантное тензорное пространство над $\boldsymbol{V}$, т. е. пространство $\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{V}) = C\dot{+}\boldsymbol{V}\dot{+}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V}\dot{+}\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V}\otimes\boldsymbol{V}\dot{+}\ldots$ наследует от $\boldsymbol{V}$ скалярное произведение, определяемое формулой

$$(\boldsymbol{x}_1\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{x}_p,\ \boldsymbol{y}_1\otimes\ldots\boldsymbol{y}_p) = \prod_{t=1}^{p}(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{y}_t) \qquad (Д.1)$$

для однородных степени p разложимых элементов. Симметрическое пространство $\boldsymbol{V}$ есть область значений определенного на $\boldsymbol{T}_0(\boldsymbol{V})$ оператора симметрии $\sum\limits_{p=0} S_p$, где $S_p = \dfrac{1}{p!}\sum\sigma$, и суммирование производится по элементам симметрической группы степени p (действие перестановки σ на разложимом тензоре определяется как $\sigma(\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2\ldots\otimes\boldsymbol{x}_p) = \boldsymbol{x}_{\sigma(1)}\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma(2)}\ldots\otimes\boldsymbol{x}_{\sigma(p)}$). Каждый S_p эрмитово идемпотентен, так что, если $\boldsymbol{x}_1\ldots\boldsymbol{x}_p = S_p\boldsymbol{x}_1\otimes\boldsymbol{x}_2\ldots\otimes\boldsymbol{x}_p$, то

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{x}_1\ldots\boldsymbol{x}_p,\ \boldsymbol{y}_1\ldots\boldsymbol{y}_p) &= (\boldsymbol{x}_1\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{x}_p,S_p\boldsymbol{y}_1\otimes\ldots\otimes\boldsymbol{y}_p) = \\ \frac{1}{p!}\sum_{\sigma}\prod_{t=1}^{p}\left(\boldsymbol{x}_t,\boldsymbol{y}_{\sigma(t)}\right) &= \frac{1}{p!}\mathrm{per}\left((\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j)\right). \qquad (Д.2)\end{aligned}$$

Таким образом, функция перманента естественно возникает как аналитическое выражение для скалярного произведения в $\boldsymbol{V}^{(p)} = \mathrm{im}\, S_p$ точно таким же образом, как детерминант в p-м внешнем произведении $\wedge^p\boldsymbol{V}$. Это означает, что унитарную геометрию $\boldsymbol{V}^{(p)}$ можно применить для исследования $\mathrm{per}\, A$, и это наблюдение привело к значительному прогрессу в обращении с этой функцией.

Пусть $\mathrm{A} = (a_{ij})$ — матрица размера $m \times n$ над коммутативным кольцом, $m \trianglelefteq n$. Перманент матрицы A, обозначаемый $\operatorname{Per} \mathrm{A}$, определяется как

$$\operatorname{Per} \mathrm{A} = \sum_{\sigma} a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \dots a_{m\sigma(m)}, \tag{Д.3}$$

где суммирование распространяется на все взаимно однозначные отображения из $\{1, 2, \dots, m\}$ в $\{1, 2, \dots n\}$.

Последовательность $\left(a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{m\sigma(m)}\right)$ называется *диагональю*, а произведение $a_{1\sigma(1)}, \dots, a_{m\sigma(m)}$ — *диагональным произведением матрицы* A. Таким образом, $\operatorname{Per} \mathrm{A}$ есть сумма диагональных произведений матрицы. Другими словами, $\operatorname{Per} \mathrm{A}$ есть сумма всех произведений m таких элементов A,что никакие два из них не находятся в одной строке или одном столбце. Отсюда следует, что все члены $\operatorname{Per} \mathrm{A}$ наряду с другими содержатся в множестве членов, получающихся при перемножении сумм по строке матрицы A.

Особенно важен случай $m = n$. Перманент квадратной матрицы A обозначается через $\operatorname{per} \mathrm{A}$ вместо $\operatorname{Per} \mathrm{A}$. В большинстве случаев употребление термина "перманент" фактически ограничивает случаем квадратных матриц.

Пусть $\mathrm{A} = (a_{ij})$ — матрица порядка n. Тогда

$$\operatorname{per} \mathrm{A} \det \mathrm{A} = \left(\sum_{\sigma \in E} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)^2 - \left(\sum_{\sigma \in F} \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)} \right)^2, \tag{Д.4}$$

где E и F — множества всех четных и нечетных перестановок соответственно.

Теорема Д.1. *Пусть* $\mathrm{A} = (a_{ij})$ *и* $\mathrm{X} = (x_{ij})$ — *квадратные матрицы порядка* n. *Тогда*

$$\operatorname{per} \mathrm{A} \det \mathrm{X} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \det\left(\mathrm{A} * \mathrm{X}_{\sigma}\right), \tag{Д.5}$$

где X_σ *— матрица,* i*-строка которой есть* $\sigma(i)$*-я строка матрицы* X, $\mathrm{A} \bigcirc \mathrm{X}_\sigma$ *— произведение Адамара, а* $\varepsilon(\sigma)$ *обозначает знак подстановки* σ *из симметрической группы* S_n*.*

Определение Д.2. *Произведение Адамара двух матриц* $\mathrm{P} = (p_{ij})$ *и* $\mathrm{Q} = (q_{ij})$ *порядка* n *есть* $\mathrm{P} \bigcirc \mathrm{Q} = \mathrm{R}$*, где матрица* $\mathrm{R} = (p_{ij}q_{ij})$*.*

Для матрицы A порядка n имеем

$$\operatorname{per}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} c_k \lambda^{n-k}, \tag{Д.6}$$

где $c_k = (-1)^k \sum\limits_{\omega \in Q_{k,n}} \operatorname{per} \mathrm{A}[\omega]$. При этом $\operatorname{per}(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n)$ называется *перманентным характеристическим многочленом* A (см. [626]). Если A — квадратная матрица, то

$$|\operatorname{per} \mathrm{A}|^2 \leq \operatorname{per}(\mathrm{A}\mathrm{A}^*). \tag{Д.7}$$

Равенство получается в том и только в том случае, когда A имеет нулевую строку или A есть обобщенная матрица перестановки.

Если U — унитарная матрица, то

$$|\operatorname{per} \mathrm{U}| \geq \det \mathrm{U} \tag{Д.8}$$

с равенством в том и только в том случае, когда A диагональна или имеет нулевую строку.

Теорема Д.3. (Теорема Шура) *Если* A *— положительно полуопределенная эрмитова матрица, то*

$$\operatorname{per} \mathrm{A} \geq \det \mathrm{A} \tag{Д.9}$$

с равенством в том и только в том случае, когда A *диагональна или имеет нулевую строку.*

Пусть A есть матрица размера $m \times n$, а D и G — диагональные матрицы порядков m и n соответственно. Тогда

$$\mathrm{Per}\ (\mathrm{DAG}) \neq \mathrm{Per}\,\mathrm{D} \cdot \mathrm{Per}\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{Per}\,\mathrm{G}. \tag{Д.10}$$

Пусть $\mathrm{A} = (a_{ij}) \in M_n$ есть $(0,1)$-матрица, т. е. матрица, составленная из 0 и 1. Пусть $\mathrm{B} = (b_{ij})$ — матрица "перманентных дополнений" для A, т. е. $b_{ij} = \mathrm{per}\,\mathrm{A}\,(j|i)$. Отсюда можно вывести что

$$(\mathrm{per}\,\mathrm{A})^2 \leq k\mathrm{tr}\ (\mathrm{BB}^*), \tag{Д.11}$$

где $k = \sum\limits_{i,j} a_{ij}/n^2$.

Д.2. Полуминоры и полуматрицы

Введем в рассмотрение супераналоги миноров в матрице M — "полуминоры"

$$\begin{gathered}
\mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} d & \beta \\ \delta & e \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_b = \begin{pmatrix} c & \beta \\ \gamma & e \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_c = \begin{pmatrix} b & \alpha \\ \delta & e \end{pmatrix}, \\
\mathrm{M}_d = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ \gamma & e \end{pmatrix}, \quad \mathrm{M}_e = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_\alpha = \begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \\
\mathcal{M}_\beta = \begin{pmatrix} a & b \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_\gamma = \begin{pmatrix} b & \alpha \\ d & \beta \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_\delta = \begin{pmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{pmatrix}.
\end{gathered} \tag{Д.12}$$

Не все полуминоры (Д.12) являются суперматрицами в обычном смысле [30], а лишь $\mathrm{M}_a, \mathrm{M}_b, \mathrm{M}_c, \mathrm{M}_d, \mathrm{M}_e$, т. е. полуминоры четных эле-

ментов, причем M_e - обычная (не супер) матрица.

Определение Д.4. *Назовем полуминоры $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta, \mathcal{M}_\gamma, \mathcal{M}_\delta$ нечетных элементов полуматрицами.*

По аналогии с суперматрицами (см. [30] и **Подраздел 4.1**) обозначим множество 2×2 полуматриц $\mathcal{M}\mathrm{at}\,(1|1)$.

Тогда можно сформулировать общее утверждение.

Предположение Д.5. *В $(p+q)\times(p+q)$-суперматрице общего положения $\mathrm{M} \in \mathrm{Mat}\,(p|q)$ полуминоры четных элементов a_i являются суперматрицами $\mathrm{M}_{a_i} \in \mathrm{Mat}\,(p-1|q-1)$, а полуминоры нечетных элементов α_i являются полуматрицами $\mathcal{M}_{\alpha_i} \in \mathcal{M}\mathrm{at}\,(p-1|q-1)$.*

Определение Д.6. *Назовем горизонтальными полуматрицы $\mathcal{M}_\alpha$, $\mathcal{M}_\beta$, а полуматрицы $\mathcal{M}_\gamma, \mathcal{M}_\delta$ - вертикальными (в зависимости от расположения нечетных элементов).*

Обозначим $\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta \in \mathcal{M}\mathrm{at}^H\,(1|1)$ и $\mathcal{M}_\gamma, \mathcal{M}_\delta \in \mathcal{M}\mathrm{at}^V\,(1|1)$. Тогда легко получить следующее

Утверждение Д.7. *Произведение горизонтальной и вертикальной полуматриц дает суперматрицу общего положения, а произведение вертикальной и горизонтальной полурматриц дает обычную (не супер) матрицу.*

В общем случае полуматрицы не образуют полугруппу относительно обычного умножения матриц. Они отличаются от суперматриц перестановкой элементов **только в одном** столбце или строке.

Замечание **Д.8.** Полуматрицы следует отличать от нестандартных (точнее, диагональных [787]) форматов суперматриц, применяемых в $N = 2$ суперконформной теории поля [485, 802] и бесконечномерных суперпредставлениях [803].

По аналогии с супертранспонированием [30] и **П**-транспонированием [186, 679] (см. также **Пункт 4.1.3**) введем

Определение Д.9. *Определим вертикальное* $\mathbf{\Theta}_V$ *и горизонтальное* $\mathbf{\Theta}_H$ *полутранспонирования как перестановку элементов второго столбца или строки соответственно*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{\mathbf{\Theta}_V} = \begin{pmatrix} a_1 & a_4 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \tag{Д.13}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}^{\mathbf{\Theta}_H} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_4 & a_3 \end{pmatrix} \tag{Д.14}$$

независимо от четности элементов.

Утверждение Д.10. *Полутранспонирования являются идемпотентами, поскольку* $\mathbf{\Theta}_V^2 = \mathbf{\Theta}_V$ *и* $\mathbf{\Theta}_H^2 = \mathbf{\Theta}_H$*.*

Кроме того, они превращают полуматрицы в суперматрицы и наоборот по формулам

$$\begin{array}{l} \mathcal{M}\mathrm{at}^H\,(1|1) \overset{\mathbf{\Theta}_V}{\leftrightarrow} \mathrm{Mat}\,(1|1)\,, \\ \mathcal{M}\mathrm{at}^V\,(1|1) \overset{\mathbf{\Theta}_H}{\leftrightarrow} \mathrm{Mat}\,(1|1)\,, \end{array} \tag{Д.15}$$

а их произведение переводит горизонтальные полуматрицы в вертикальные и наоборот

$$\mathcal{M}\mathrm{at}^H\,(1|1) \overset{\mathbf{\Theta}_V\mathbf{\Theta}_H}{\longleftrightarrow} \mathcal{M}\mathrm{at}^V\,(1|1)\,. \tag{Д.16}$$

Однако, $\mathbf{\Theta}_V$ для вертикальных полуматриц и $\mathbf{\Theta}_H$ для горизон-

тальных полуматриц являются автоморфизмами

$$\begin{aligned} \mathcal{M}\mathrm{at}^{H}\left(1|1\right) &\overset{\mathbf{\Theta}_H}{\leftrightarrows} \mathcal{M}\mathrm{at}^{H}\left(1|1\right), \\ \mathcal{M}\mathrm{at}^{V}\left(1|1\right) &\overset{\mathbf{\Theta}_V}{\leftrightarrows} \mathcal{M}\mathrm{at}^{V}\left(1|1\right). \end{aligned} \tag{Д.17}$$

Утверждение Д.11. *Произведение полутранспонирований дает* П*-транспонирование* (*из* [186, 679])

$$\mathbf{\Theta}_V \mathbf{\Theta}_H = \mathbf{\Pi}. \tag{Д.18}$$

Поэтому полутранспонирование можно трактовать как извлечение квадратного корня из $\mathbf{\Pi}$-транспонирования (см. также (4.20)).

Горизонтальные и вертикальные полуматрицы описывают вращающие четность отображения линейных двумерных суперпространств

$$\begin{aligned} &\mathcal{M}_\alpha, \mathcal{M}_\beta : \mathbf{\Lambda}^{2|0} \to \mathbf{\Lambda}^{1|1}, \\ &\mathcal{M}_\gamma, \mathcal{M}_\delta : \mathbf{\Lambda}^{1|1} \to \mathbf{\Lambda}^{2|0} \end{aligned} \tag{Д.19}$$

соответственно. Тогда, как суперматрицы действуют в суперпространстве $\mathbf{\Lambda}^{1|1}$

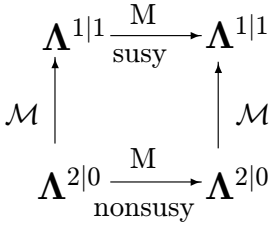
$$\mathrm{M}_a, \mathrm{M}_b, \mathrm{M}_c, \mathrm{M}_d : \mathbf{\Lambda}^{1|1} \to \mathbf{\Lambda}^{1|1}, \tag{Д.20}$$

а обычная матрица M_e действует в четном пространстве $\mathbf{\Lambda}^{2|0}$

$$\mathrm{M}_e : \mathbf{\Lambda}^{2|0} \to \mathbf{\Lambda}^{2|0}. \tag{Д.21}$$

Следствие Д.12. *Полуматрицы, в отличие от обычных матриц и суперматриц, меняют тип пространства, в котором они действуют и вращают четность одной из координат.*

Это легко видеть из следующей диаграммы



(Д.22)

где полуматрицы действуют по вертикальным стрелкам, изменяя четно-нечетную сигнатуру пространства, в то время, как (супер)матрицы действуют по горизонтальным, оставляя четно-нечетную сигнатуру неизменной.

Замечание **Д.13.** Интересно сравнить и проследить аналогии рассматриваемого изменения четно-нечетной сигнатуры суперпространства с возможными эффектами изменения пространственно-временной сигнатуры обычного пространства [197, 804–806].

Для полуматриц из (Д.12) можно ввести нечетные аналоги обычного (не супер) детерминанта и перманента. Различные свойства перманентов [626] и матриц, содержащих нильпотентные элементы, приведены в **Разделе 5**.

Определение Д.14. *Полудетерминант горизонтальной полуматрицы $\mathcal{M}_\alpha$ определяется формулой*

$$\delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha = \delta\mathrm{et}\begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} c\delta - d\gamma. \tag{Д.23}$$

Определение Д.15. *Полуперманент горизонтальной полуматрицы $\mathcal{M}_\alpha$ определяется формулой*

$$\pi\mathrm{er}\mathcal{M}_\alpha = \pi\mathrm{er}\begin{pmatrix} c & d \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} c\delta + d\gamma. \tag{Д.24}$$

Аналогичные определения справедливы и для вертикальных полу-

матриц. Кроме того, в случае суперматриц кроме березиниана мы будем пользоваться и обычными детерминантом и перманентом, например,

$$\det \mathrm{M}_a = \det \begin{pmatrix} d & \beta \\ \delta & e \end{pmatrix} = ed - \delta\beta. \qquad \text{(Д.25)}$$

$$\mathrm{per}\, \mathrm{M}_a = \mathrm{per} \begin{pmatrix} d & \beta \\ \delta & e \end{pmatrix} = ed + \delta\beta. \qquad \text{(Д.26)}$$

Такую же формулу будем применять и для матриц со всеми нечетными элементами

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta - \gamma\beta. \qquad \text{(Д.27)}$$

$$\mathrm{per} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \alpha\delta + \gamma\beta. \qquad \text{(Д.28)}$$

Замечание **Д.16.** Полудетерминанты и полуперманенты не связаны с квазидетерминантами [807–810], которые применяются для матриц с некоммутирующими элементами и решают некоторые проблемы с обратимостью при изучении систем линейных уравнений над грассмановой алгеброй (см. [811] и приложения в [269]).

Приведем некоторые свойства полудетерминантов и полуперманентов.

Очевидно, что они нильпотентны, т. е. для любой полуматрицы $\mathcal{M}$ имеем

$$(\delta\mathrm{et}\mathcal{M})^2 = (\pi\mathrm{er}\mathcal{M})^2 = 0.$$

Кроме того,

$$\delta\mathrm{et}\begin{pmatrix} \det \mathrm{M}_e & \mathrm{per}\, \mathrm{M}_e \\ \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha & \pi\mathrm{er}\mathcal{M}_\alpha \end{pmatrix} = 2cd \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\beta, \tag{Д.29}$$

$$\delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha \cdot \pi\mathrm{er}\mathcal{M}_\alpha = 2cd\delta\gamma. \tag{Д.30}$$

Последнее соотношение интересно сравнить с аналогичным соотношением для обычных (и супер) матриц

$$\det \mathrm{M}_e \cdot \mathrm{per}\, \mathrm{M}_e = a^2 b^2 \tag{Д.31}$$

(см. [626] и **Раздел 5**).

Приведем также некоторые полезные и используемые в дальнейшем соотношения между полудетерминантами полуминорами

$$\begin{aligned} b \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\delta \pm a \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\gamma &= \alpha \cdot \binom{\mathrm{per}}{\det} \mathrm{M}_e, \\ d \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\delta \pm c \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\gamma &= \beta \cdot \binom{\mathrm{per}}{\det} \mathrm{M}_e, \\ c \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\beta \pm a \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha &= \gamma \cdot \binom{\mathrm{per}}{\det} \mathrm{M}_e, \\ d \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\beta \pm b \cdot \delta\mathrm{et}\mathcal{M}_\alpha &= \delta \cdot \binom{\mathrm{per}}{\det} \mathrm{M}_e. \end{aligned} \tag{Д.32}$$

Другие свойства матриц с нильпотентными элементами можно найти в **Разделе 5**.

Приложение E

N-расширенные суперпространства и необратимые якобианы

Здесь мы рассмотрим обобщенные супераналитические преобразования в $N = 2$ и $N = 4$ суперпространствах и их необратимые якобианы.

E.1. $N = 1$ суперякобиан

Здесь мы вводим аналог березиниана для необратимых преобразований. Запишем супераналитическое преобразование (2.1) в виде композиции

$$1)\begin{cases} \tilde{z} &= F\left(z,\tilde{\theta}\right), \\ \tilde{\theta} &= \tilde{\theta}, \end{cases} \quad 2)\begin{cases} z &= z, \\ \tilde{\theta} &= \tilde{\theta}\left(z,\theta\right), \end{cases} \tag{E.1}$$

где $F\left(z,\tilde{\theta}\right) = \tilde{z}\left(z,\theta\right)$.

Суперякобиан первого преобразования есть просто $J_1 = \partial F/\partial z$. Если

$$\epsilon\left[\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta}\right] \neq 0, \tag{E.2}$$

тогда, учитывая, что θ – нечетное, мы находим $J_2 = \left(\partial\tilde{\theta}/\partial\theta\right)^{-1}$ [30].

Таким образом полный суперякобиан есть

$$\boldsymbol{J}_{SA} = J_1 J_2 = \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta}\right)^{-1}. \tag{E.3}$$

Чтобы получить J_1, мы запишем $J\left(z,\tilde{\theta}\right) = \tilde{z}\left(z,\theta\left(z,\tilde{\theta}\right)\right)$, тогда мы

дифференцируем $\tilde{z}\left(z,\theta\left(z,\tilde{\theta}\right)\right)$ как сложную функцию

$$\frac{\partial F}{\partial z}=\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}+\frac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}}\cdot\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z}. \tag{E.4}$$

Таким образом, мы получаем полный супер Якобиан

$$\boldsymbol{J}_{SA}=\frac{\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial z}-\dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial \theta}{\partial \tilde{\theta}}\cdot\dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta}}{\dfrac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta}} \tag{E.5}$$

без условия обратимости всего преобразования, т.е. без стандартного требования $\epsilon\left[\partial\tilde{z}/\partial z\right]\neq 0$ [106].

Тем не менее, в [30] было показано, что выражение вида (E.5) (в алгебре матриц) может расширяться в случае $\epsilon\left[\partial\tilde{z}/\partial z\right]=0$ (полунеобратимый случай (2.4) в нашей классификации).

Предложение E.1. *Формула* (E.5) *дает суперякобиан для обратимого и полунеобратимого супераналитических преобразований.*

Доказательство. Из (2.2) мы получаем

$$\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}=f'\left(z\right)+\theta\cdot\chi'\left(z\right), \tag{E.6}$$

$$\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta}=g\left(z\right), \tag{E.7}$$

поэтому

$$\epsilon\left[\frac{\partial \tilde{z}}{\partial z}\right]=\epsilon\left[f'\left(z\right)\right]=\epsilon\left[f\left(z\right)\right],$$

$$\epsilon\left[\frac{\partial \tilde{\theta}}{\partial \theta}\right]=\epsilon\left[g\left(z\right)\right],$$

и, таким образом, согласно определениям (2.3) и (2.4), условие (E.2)

охватывает обратимые и полунеобратимые преобразования. ■

Следствие E.2. *Для обратимых и полунеобратимых супераналитических преобразований мы имеем*

$$\boldsymbol{J}_{SA}^{inv,halfinv} = \mathrm{Ber}\,\left(\tilde{Z}/Z\right) \tag{E.8}$$

с

$$\mathrm{Ber}\,\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{0}, \tag{E.9}$$

где

$$\mathrm{P}_{SA}^{0} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial\tilde{z}}{\partial z} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z} \\ \dfrac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z} & \dfrac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta} \end{pmatrix}. \tag{E.10}$$

В необратимом случае, когда (E.2) не удовлетворяется, мы не можем использовать (E.3) и (E.4), и соотношение (E.8) более не применимо. Так, что мы вынуждены расширять определения. Якобиан J_1 должен вычисляться из

$$J_1^{noninv} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta} = \frac{\partial\tilde{z}}{\partial z} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z}, \tag{E.11}$$

и поэтому вместо (E.5) и (E.8) мы имеем

Определение E.3. *Суперякобиан необратимого супераналитического преобразования $\mathcal{T}_{SA}$ определяется формулой*

$$\boldsymbol{J}_{SA}^{noninv} \cdot \left(\frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta}\right)^{2} = \frac{\partial\tilde{z}}{\partial z} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta} + \frac{\partial\tilde{z}}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial z}. \tag{E.12}$$

Здесь условие (E.2) больше не является необходимым. Чтобы вычислять J_1^{noninv} и $\boldsymbol{J}_{SA}^{noninv}$, нужно решить уравнения (E.11) и (E.12) (т.е. раскладывая обе части в ряд по генераторам алгебры Грассмана).

В зависимости от компонентных функций суперякобиан полунеобратимого супераналитического преобразования (т.е. при $\epsilon\left[g\left(z\right)\right]\neq 0$) имеет вид

$$\boldsymbol{J}_{SA}=\frac{f'\left(z\right)}{g\left(z\right)}+\frac{\chi\left(z\right)\cdot\psi'\left(z\right)}{g^{2}\left(z\right)}+\theta\left(\frac{\chi\left(z\right)}{g\left(z\right)}\right)', \tag{E.13}$$

который совпадает с березинианом для обратимого и полунеобратимого преобразования.

В случае необратимого преобразования мы должны использовать следующее уравнение

$$\begin{aligned}\boldsymbol{J}_{SA}^{noninv}\cdot g^{2}\left(z\right) &= f'\left(z\right)\cdot g\left(z\right)+\chi\left(z\right)\cdot\psi'\left(z\right)\\ &\quad+\theta\left(\chi'\left(z\right)\cdot g\left(z\right)-\chi\left(z\right)\cdot g'\left(z\right)\right)\end{aligned} \tag{E.14}$$

которое можно решить специальными методами вычислений с нильпотентами [120, 812].

Следствие Е.4. *Для обратимых супераналитических преобразований березиниан существует и обратим* $(\epsilon\left[f\left(z\right)\right]\neq 0,\ \epsilon\left[g\left(z\right)\right]\neq 0)$*, для полунеобратимых преобразований березиниан существует и необратим, в то время, как для необратимых супераналитических преобразований* $(\epsilon\left[f\left(z\right)\right]=0)$ *мы можем использовать только суперякобиан* $\boldsymbol{J}_{SA}^{noninv}$ (E.14).

Чтобы классифицировать все супераналитические преобразования, мы должны ввести некоторую числовую характеристику необратимости.

Определение Е.5. *Индекс необратимости супераналитического преобразования определяется формулой*

$$\operatorname{ind}\boldsymbol{J}_{SA}\overset{def}{=}\left\{n\in\mathbb{N}\,|\,\boldsymbol{J}_{SA}^{n}=0,\ \boldsymbol{J}_{SA}^{n-1}\neq 0\right\}. \tag{E.15}$$

Замечание **E.6.** Мы исключаем из рассмотрения тривиальный случай нулевого суперякобиана $\boldsymbol{J}_{SA} = 0$.

Очевидно, что числовая мера необратимости на самом деле задается обратной величиной.

Определение E.7. *Степень необратимости супераналитического преобразования есть*

$$\boldsymbol{m}_{SA} \overset{def}{=} \frac{1}{\operatorname{ind} \boldsymbol{J}_{SA}}. \tag{E.16}$$

Следствие E.8. *Обратимые супераналитические преобразования обладают бесконечным индексом* $\operatorname{ind} \boldsymbol{J}_{SA} = \infty$ *и нулевой степенью необратимости* $\boldsymbol{m}_{SA} = 0$.

Следствие E.9. *"Наиболее необратимые" (кроме тривиальных с нулевым якобианом* $\boldsymbol{J}_{SA} = 0$*) супераналитические преобразования имеют* $\operatorname{ind} \boldsymbol{J}_{SA} = 2$ *и* $\boldsymbol{m}_{SA} = 1/2$.

E.2. $(1|N)$-мерное суперпространство

Рассмотрим $(1|N)$-мерное суперпространство $\mathbb{C}^{1|N}$ с комплексными четной $z \in \mathbb{C}^{1|0}$ и нечетными $\theta^i \in \mathbb{C}^{0|1}$ координтами (обозначим $Z = \left(z, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^N\right)$), где $\left\{\theta^i, \theta^j\right\} = 0$.

Произвольная голоморфная суперфункция от Z раскладывается в ряд

$$F\left(z, \theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^N\right) = F_0(z) + \sum_i \theta^i F_i(z) + \sum_{i<j} \theta^i \theta^j F_{ij}(z) + \ldots, \tag{E.17}$$

который конечен вследствие нильпотентности θ^i, причем последнее слагаемое пропорционально произведению всех нечетных координат, т. е. $\theta^1 \theta^2 \ldots \theta^N$.

В общем случае суперпроизводные определяются формулами [403]

$$D_i = \partial_i + u_{ij}\theta^j\partial, \tag{E.18}$$

где $\partial_i = \partial/\partial\theta^i$ и по повторяющимся индексам подразумевается суммирование.

Если в (E.18) $u_{ij} = \delta_{ij}$, то это означает $O(N)$ симметрию в нечетном секторе [563,565]. Другие обратимые варианты обсуждались в [403].

Таким образом, касательное суперпространство в $\mathbb{C}^{1|N}$ определяется вектором $(\partial, D_1, \ldots, D_N)^T$, где

$$\{D_i, D_j\} = 2\delta_{ij}\partial. \tag{E.19}$$

Замечание **E.10.** При $N = 1$, когда $D_1^2 = \partial$, единственный нечетный дифференциальный оператор D_1 рассматривался как "квадратный корень" из ∂, что приводило в суперструнных приложениях к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Тогда, как в случае $N > 1$ необходимо рассматриваить дифференциальные уравнения в частных производных [485].

При супераналитических преобразованиях $\mathcal{T}_{SA} : \mathbb{C}^{1|N} \to \mathbb{C}^{1|N}$ и $Z \to \tilde{Z}$ имеем закон преобразования

$$\begin{pmatrix} \partial \\ D_1 \\ \vdots \\ D_N \end{pmatrix} = \mathrm{P}_{SA}^{(N)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\partial} \\ \tilde{D}_1 \\ \vdots \\ \tilde{D}_N \end{pmatrix}, \tag{E.20}$$

где суперматрица касательного пространства имеет вид

$$\mathrm{P}_{SA}^{(N)} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}^i \cdot \tilde{\theta}_i & \partial\tilde{\theta}^1 & \cdots & \partial\tilde{\theta}^N \\ D_1\tilde{z} - D_1\tilde{\theta}^j \cdot \tilde{\theta}_j & D_1\tilde{\theta}^1 & \cdots & D_1\tilde{\theta}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_N\tilde{z} - D_N\tilde{\theta}^j \cdot \tilde{\theta}_j & D_N\tilde{\theta}^1 & \cdots & D_N\tilde{\theta}^N \end{pmatrix}. \tag{E.21}$$

Тогда предполагается выполнение N суперконформных условий [563, 565, 624, 665]

$$D_i\tilde{z} - D_i\tilde{\theta}^j \cdot \tilde{\theta}_j = 0 \tag{E.22}$$

(ср. (2.37)) как требование однородности преобразования суперпроизводных

$$D_i = D_i\tilde{\theta}^j \cdot \tilde{D}_j. \tag{E.23}$$

(ср. (2.43)). Отсюда делается вывод, что композиция суперконформных преобразований снова дает суперконформное преобразование [563]. При этом стандартным образом редуцированная к суперконформному виду суперматрица $\mathrm{P}_{SCf}^{(N)}$ имеет блочно-треугольную форму, аналогичную (2.51)

$$\mathrm{P}_{SCf}^{(N)} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}^k \cdot \tilde{\theta}_k & \partial\tilde{\theta}^1 & \cdots & \partial\tilde{\theta}^N \\ 0 & D_1\tilde{\theta}^1 & \cdots & D_1\tilde{\theta}^N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & D_N\tilde{\theta}^1 & \cdots & D_N\tilde{\theta}^N \end{pmatrix}. \tag{E.24}$$

Определяются также N-обобщения дифференциалов $d\theta^i$ и

$$dZ = dz + \theta_k \cdot d\theta^k. \tag{E.25}$$

При супераналитических преобразованиях

$$\begin{pmatrix} d\tilde{Z} \\ d\tilde{\theta}^1 \\ \vdots \\ d\tilde{\theta}^N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dZ \\ d\theta^1 \\ \vdots \\ d\theta^N \end{pmatrix} \cdot \mathrm{P}_{SA}^{(N)}. \tag{E.26}$$

В обратимом суперконформном случае dZ преобразуются по формулам

$$d\tilde{Z} = dZ \left(\partial \tilde{z} - \partial \tilde{\theta}^k \cdot \tilde{\theta}_k\right). \tag{E.27}$$

При четном N можно применить дополнительное дифференцирование к (E.23) и симметризовать, тогда получим

$$\delta_{ij} \left(\partial \tilde{z} - \partial \tilde{\theta}^k \cdot \tilde{\theta}_k\right) = D_i \tilde{\theta}_k \cdot D_j \tilde{\theta}^k, \tag{E.28}$$

что можно сравнить с (2.58).

Подставляя (E.28) в (E.27), получаем

$$d\tilde{Z} = dZ \cdot D_i \tilde{\theta}_k \cdot D_j \tilde{\theta}^k, \tag{E.29}$$

что в стандартном случае [563, 565] трактуется как N-обобщение соотношения $d\tilde{z} = (\partial \tilde{z}/\partial z)\, dz$.

Соотношение (E.28) в обратимом случае после нормировки на множитель в левой части приводит к обычной $O(N)$ матрице, составленной из $D_i \tilde{\theta}_k$ (правый нижний угол в (E.24)). Детерминант этой матрицы, равный по модулю единице, различает между собой два топологически отделимых случая $SO(N)$ преобразований с тривиальным расслоением и общих $O(N)$ преобразований с твистом [563, 565].

Приведенные рассуждения, однако, справедливы лишь в случае

инфинитезимальных и обратимых преобразований, а также при стандартной суперконформной редукции суперматрицы $\mathrm{P}_{SA}^{(N)} \to \mathrm{P}_{SCf}^{(N)}$ (E.24). С учетом возможной необратимости преобразований, нильпотентной левой части в (E.28) и наличия нильпотентных компонентных функций в $Z \to \tilde{Z}$ стандартные методы можно существенно видоизменить и расширить число различных типов преобразований [12, 17].

E.3. $N = 2$ березиниан

Рассмотрим общие $N = 2$ супераналитические преобразования $Z\left(z, \theta^+, \theta^-\right) \to \tilde{Z}\left(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-\right)$. Их действие в касательном $(1|2)$ суперпространстве имеет следующий вид

$$\begin{pmatrix} \partial \\ D^- \\ D^+ \end{pmatrix} = \mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\partial} \\ \tilde{D}^- \\ \tilde{D}^+ \end{pmatrix}, \tag{E.30}$$

$$\begin{pmatrix} d\tilde{Z} & d\tilde{\theta}^+ & d\tilde{\theta}^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dZ & d\theta^+ & d\theta^- \end{pmatrix} \cdot \mathrm{P}_{SA}^{(N=2)}, \tag{E.31}$$

где

$$\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} = \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}^+ \cdot \theta^- - \partial\tilde{\theta}^- \cdot \theta^+ & \partial\tilde{\theta}^+ & \partial\tilde{\theta}^- \\ D^-\tilde{z} - D^-\tilde{\theta}^- \cdot \tilde{\theta}^+ - D^-\tilde{\theta}^+ \cdot \tilde{\theta}^- & D^-\tilde{\theta}^+ & D^-\tilde{\theta}^- \\ D^+\tilde{z} - D^+\tilde{\theta}^- \cdot \tilde{\theta}^+ - D^+\tilde{\theta}^+ \cdot \tilde{\theta}^- & D^+\tilde{\theta}^+ & D^+\tilde{\theta}^- \end{pmatrix}. \tag{E.32}$$

Предложение E.11. *Внешний $N = 2$ дифференциальный оператор де Рама* [211]

$$\mathrm{d}^{(N=2)} = dz\partial + d\theta^+\partial_- + d\theta^-\partial_+ \tag{E.33}$$

инвариантен относительно общих $N = 2$ супераналитических преобразований $Z\left(z, \theta^+, \theta^-\right) \to \tilde{Z}\left(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-\right)$.

Доказательство. Пользуясь определениями, запишем (E.33) в виде

$$\begin{aligned} \mathrm{d}^{(N=2)} &= \left(dz - d\theta^+\theta^- - d\theta^-\theta^+\right)\partial + d\theta^+\left(\partial_- + \theta^-\partial\right) + \\ d\theta^-\left(\partial_+ + \theta^+\partial\right) &= dZ\partial + d\theta^+ D^- + d\theta^- D^+. \end{aligned} \tag{E.34}$$

Тогда из (E.30) и (E.31) следует

$$\mathrm{d}^{(N=2)} = \begin{pmatrix} dZ & d\theta^+ & d\theta^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial \\ D^- \\ D^+ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} dZ & d\theta^+ & d\theta^- \end{pmatrix} \cdot \mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\partial} \\ \tilde{D}^- \\ \tilde{D}^+ \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} d\tilde{Z} & d\tilde{\theta}^+ & d\tilde{\theta}^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\partial} \\ \tilde{D}^- \\ \tilde{D}^+ \end{pmatrix} = \tilde{\mathrm{d}}^{(N=2)}.$$

■

Найдем связь между березинианом и суперматрицей $\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)}$ (E.32). Березиниан $N = 2$ супераналитических преобразований $Z\left(z, \theta^+, \theta^-\right) \to \tilde{Z}\left(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-\right)$ определяется формулой [30]

$$\mathrm{Ber}^{\,N=2}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_0^{(N=2)}, \tag{E.35}$$

где

$$\mathrm{P}_0^{(N=2)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial z} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial z} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial z} \\ \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta^+} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial \theta^+} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial \theta^+} \\ \dfrac{\partial \tilde{z}}{\partial \theta^-} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^+}{\partial \theta^-} & \dfrac{\partial \tilde{\theta}^-}{\partial \theta^-} \end{pmatrix}. \tag{E.36}$$

Предложение E.12. *Березиниан общих $N = 2$ супераналитических преобразований равен березиниану суперматрицы* $\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)}$ (E.32)

$$\mathrm{Ber}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)}. \tag{E.37}$$

Доказательство. Разложим суперматрицу $P_0^{(N=2)}$ на произведение

$$\mathrm{P}_0^{(N=2)} = \mathrm{K} \cdot \mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} \cdot \tilde{\mathrm{K}}, \tag{E.38}$$

где

$$\mathrm{K} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\theta^- & 1 & 0 \\ -\theta^+ & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathrm{K}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\tilde{\theta}^- & 1 & 0 \\ -\theta^+ & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко заметить, что $\mathrm{Ber}\,\mathrm{K} = \mathrm{Ber}\,\tilde{\mathrm{K}} = 1$. Пользуясь мультипликативностью березиниана [30], имеем

$$\begin{aligned} \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_0^{(N=2)} &= \mathrm{Ber}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} \cdot \tilde{\mathrm{K}} = \mathrm{Ber}\,\mathrm{K} \cdot \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} \cdot \mathrm{Ber}\,\tilde{\mathrm{K}} = \\ 1 \cdot \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)} \cdot 1 &= \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)}. \end{aligned}$$

Тогда из (E.35) получаем

$$\mathrm{Ber}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_0^{(N=2)} = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=2)}.$$

■

E.4. Березинианы $N = 4$ редуцированных преобразований

Здесь мы найдем полный березиниан в каждом случае из $N = 4$ редукций (3.184)–(3.197).

Для этого, по аналогии с $N = 2$ **Утверждением 3.18**, докажем

Утверждение E.13. *Условия редукции* (3.184)–(3.197)*, примененные в обратном порядке, дают вырожденную суперматрицу* $\mathrm{P}^{(N=4)}$*, имеющую нулевой березиниан.*

Доказательство. Применяя $\mathsf{TPt}_i^{\pm}$ условия к суперматрице $\mathrm{P}_S^{(N=4)}$ (3.173), получаем

$$\mathrm{P}_{D_i^{\pm}}^{(N=4)} = \mathrm{P}_S^{(N=4)}|_{TPt_i^{\pm}} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial\tilde{\theta}^+_{1\left(TPt_i^{\pm}\right)} & \partial\tilde{\theta}^-_{1\left(TPt_i^{\pm}\right)} & \partial\tilde{\theta}^+_{2\left(TPt_i^{\pm}\right)} & \partial\tilde{\theta}^-_{2\left(TPt_i^{\pm}\right)} \\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathrm{H}_{TPt_i^{\pm}} & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \tag{E.39}$$

И аналогично для $\mathsf{TPt}_2^{\pm}$. С другой стороны, применяя SCf условие к $\mathrm{P}_{TPt_i^{\pm}}^{(N=4)}$ (3.174)–(3.177), имеем

$$\mathrm{P}_D^{(N=4)} = \mathrm{P}_S^{(N=4)}|_{\Delta_i^{\pm}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)=0} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \partial\tilde{\theta}^{+}_{1(SCf)} & \partial\tilde{\theta}^{-}_{1(SCf)} & \partial\tilde{\theta}^{+}_{2(SCf)} & \partial\tilde{\theta}^{-}_{2(SCf)} \\ 0 & & & & \\ 0 & & \mathrm{H}_{SCf} & & \\ 0 & & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}. \tag{E.40}$$

Очевидно, что $\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{D}^{(N=4)} = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{D_i^{\pm}}^{(N=4)} = 0$. ■

Замечание **E.14.** Все 5 вырожденных суперматриц (E.39)–(E.40), несмотря на подобный внешний вид, не совпадают между собой

$$\mathrm{P}_{D_1^{+}}^{(N=4)} \neq \mathrm{P}_{D_1^{-}}^{(N=4)} \neq \mathrm{P}_{D_2^{+}}^{(N=4)} \neq \mathrm{P}_{D_2^{-}}^{(N=4)} \neq \mathrm{P}_{D}^{(N=4)}, \tag{E.41}$$

поскольку на их оставшиеся ненулевые элементы $\partial\tilde{\theta}_i^{\pm}$ и H наложены различные условия.

Чтобы найти березиниан редуцированных преобразований для каждого типа редукций, спроектируем формулу сложения $N = 4$ березинианов (3.172) и воспользуемся **Предложением 3.38** и **Утверждением E.13**, а затем формулами (3.178)–(3.179) для березинианов введенных матриц $\mathrm{P}_{S}^{(N=4)}$ и $\mathrm{P}_{T_i^{\pm}}^{(N=4)}$. Тогда для $\mathrm{Ber}^{\,N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right)$ получаем (ср. $N = 1$ (2.48) и $N = 2$ (3.63))

$$\mathrm{Ber}^{\,N=4}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SA}^{(N=4)} =$$

$$\begin{cases} \left(\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{S}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{-}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{-}}^{(N=4)}\right)|_{SCf} \\ \left(\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{S}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{-}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{-}}^{(N=4)}\right)|_{TPt_1^{+}} \\ \left(\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{S}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{-}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{-}}^{(N=4)}\right)|_{TPt_1^{-}} \\ \left(\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{S}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{-}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{-}}^{(N=4)}\right)|_{TPt_2^{+}} \\ \left(\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{S}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_1^{-}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{+}}^{(N=4)} + \mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{T_2^{-}}^{(N=4)}\right)|_{TPt_2^{-}} \end{cases} =$$

$$
\left\{\begin{array}{l}
\operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{SCf} + 0 + 0 + 0 + 0 \\
0 + \operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_1^+} + 0 + 0 + 0 \\
0 + 0 + \operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_1^-} + 0 + 0 \\
0 + 0 + 0 + \operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_2^+} + 0 \\
0 + 0 + 0 + 0 + \operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_2^-}
\end{array}\right. =
\left\{\begin{array}{ll}
\operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{SCf} & (\mathsf{SCf}) \\
\operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_1^+} & (\mathsf{TPt}\,{}^{+}_{1}) \\
\operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_1^-} & (\mathsf{TPt}\,{}^{-}_{1}) \\
\operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_2^+} & (\mathsf{TPt}\,{}^{+}_{2}) \\
\operatorname{Ber}\mathrm{P}^{(N=4)}_{TPt_2^-} & (\mathsf{TPt}\,{}^{-}_{2})
\end{array}\right. =
$$

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\dfrac{Q_{SCf}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)}{\det \mathrm{H}_{SCf}} & (\mathsf{SCf}) \\
\dfrac{\Delta^-_{1\left(TPt_1^+\right)}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)}{\det{}^2 \mathrm{H}_{TPt_1^+}} \cdot \boldsymbol{K}_{TPt_1^+} & (\mathsf{TPt}\,{}^{+}_{1}) \\
\dfrac{\Delta^+_{1\left(TPt_1^-\right)}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)}{\det{}^2 \mathrm{H}_{TPt_1^-}} \cdot \boldsymbol{K}_{TPt_1^-} & (\mathsf{TPt}\,{}^{-}_{1}) \\
\dfrac{\Delta^-_{2\left(TPt_2^+\right)}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)}{\det{}^2 \mathrm{H}_{TPt_2^+}} \cdot \boldsymbol{K}_{TPt_2^+} & (\mathsf{TPt}\,{}^{+}_{2}) \\
\dfrac{\Delta^+_{2\left(TPt_2^-\right)}\left(z,\theta_i^+,\theta_i^-\right)}{\det{}^2 \mathrm{H}_{TPt_2^-}} \cdot \boldsymbol{K}_{TPt_2^-} & (\mathsf{TPt}\,{}^{-}_{2})
\end{array}\right. , \qquad (\mathsf{E.42})
$$

где $\boldsymbol{K}_{TPt_i^\pm}$ определено в (3.180).

Приложение Ж

Частные случаи редуцированных преобразований

Здесь рассматриваются частные случаи редуцированных $N = 1$, $N = 2$ и $N = 4$ преобразований, расщепленные и дробно-линейные преобразования.

Ж.1. ρ-суперконформные преобразования и нильпотентные суперполя

Существует несколько различных определений суперконформных преобразований [343, 354, 491]. В одном из них [341, 342] утверждается, что $N = 1$ преобразование $Z \to \tilde{Z}$ является суперконформным, если множитель, с которым преобразуются производные равен березиниану $\mathrm{Ber}\,\mathrm{P}_{SCf} = D\tilde{\theta}_{SCf}$ (см. (2.52)). Здесь мы рассмотрим в общем случае преобразования, для которых выполняется соотношение

$$\mathrm{Ber}\left(\tilde{Z}/Z\right) = D\tilde{\theta}. \tag{Ж.1}$$

В компонентах это уравнение (при $\epsilon\left[g\left(z\right)\right] \neq 0$) приводит к системе (см. (2.2))

$$f'\left(z\right)g\left(z\right) + \chi\left(z\right)\psi'\left(z\right) = g^2\left(z\right), \tag{Ж.2}$$

$$\left(\frac{\chi\left(z\right)}{g\left(z\right)}\right)' = \psi'\left(z\right). \tag{Ж.3}$$

Отсюда получаем общий вид пребразований в стандартной параметри-

зации [111, 176, 405]

$$\tilde{z} = f(z) + \theta \cdot (\psi(z) + \rho)\sqrt{f'(z) + \psi(z)\psi'(z)}, \qquad (Ж.4)$$

$$\tilde{\theta} = \psi(z) + \theta \cdot \sqrt{f'(z) + \psi(z)\psi'(z) + \rho\psi(z)}. \qquad (Ж.5)$$

По сравнению со стандартными суперконформными преобразованиями [343,354,491] новыми в (Ж.4)–(Ж.5) являются слагаемые с нечетным параметром ρ, который появляется из-за наличия производных*) в обеих частях уравнения (Ж.3).

Определение Ж.1. *ρ-суперконформными преобразованиями назовем преобразования* (Ж.4)–(Ж.5)*, а супермногообразия, склееенные с помощью таких преобразований — ρ-суперримановыми поверхностями.*

Суперматрица касательного расслоения $\mathrm{P} = \mathrm{P}_\rho$ из (2.22) имеет вид

$$\mathrm{P}_\rho = \mathrm{P}_{SCf} + \rho \cdot \begin{pmatrix} \partial\tilde{\theta} & 0 \\ D\tilde{\theta} & 0 \end{pmatrix}, \qquad (Ж.6)$$

где P_{SCf} определяется в (2.39).

Из (Ж.6) видно, что в общем случае суперпроизводная D преобразуется неоднородно при ρ-суперконформных преобразованиях, а именно,

$$D = D\tilde{\theta} \cdot \tilde{D} + \rho \cdot D\tilde{\theta} \cdot \tilde{\partial} \qquad (Ж.7)$$

или

$$D = \mathrm{Ber}\left(\tilde{Z}/Z\right) \cdot \tilde{D} + \rho \cdot \frac{\partial\tilde{\theta}}{\partial\theta} \cdot \tilde{\partial} \qquad (Ж.8)$$

Кроме того, для ρ-аналога SCf супердифференциала $d\tau = dZD + d\theta$

Примечание. В системе уравнений, следующей из $D\tilde{z} - D\tilde{\theta} \cdot \tilde{\theta} = 0$ (2.29), равны сами выражения под знаком производных в (Ж.3).

выполняется

$$d\tilde{\tau} = d\tau \cdot D\tilde{\theta} \cdot (1 + \rho D)\,. \qquad (Ж.9)$$

Из (Ж.7)–(Ж.9) следует

Определение Ж.2. *Суперполя, позволяющие выделение нечетного множителя ρ, назовем ρ-суперполями.*

Предложение Ж.3. *При ρ-суперконформных преобразованиях ρ-суперполя преобразуются ковариантно.*

Доказательство. Следует из нильпотентности ρ. ■

Следствие Ж.4. *ρ-суперполя на ρ-суперримановых поверхностях обладают всеми "хорошими" свойствами обычных суперполей на суперримановых поверхностях* [359–361].

Ж.2. Полугруппа расщепленных $N = 2$ SCf преобразований

Важным частным случаем $N = 2$ суперконформных преобразований являются *расщепленные (split)* $N = 2$ преобразования $\mathcal{T}_{SCf}^{(N=2)}$ [563], которые не содержат нечетных функций в разложении (3.14)

$$\begin{cases} \tilde{z} = f(z)\,, \\ \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm} g_{\pm\mp}(z) + \theta^{\mp} g_{\pm\pm}(z)\,. \end{cases} \qquad (Ж.10)$$

Такие преобразования могут быть функциями перехода на обычных римановых поверхностях со спиновой структурой [563].

Применение $N = 2$ SCf условий (3.39)–(3.40) дает систему уравне-

ний

$$\operatorname{per} \mathrm{G}_{split} = f'(z), \tag{Ж.11}$$

$$\operatorname{scf}_{\pm} \mathrm{G}_{split} = 0, \tag{Ж.12}$$

или в явном виде

$$g_{+-}(z)\, g_{-+}(z) + g_{++}(z)\, g_{--}(z) = f'(z), \tag{Ж.13}$$

$$g_{+-}(z)\, g_{--}(z) = 0, \tag{Ж.14}$$

$$g_{-+}(z)\, g_{++}(z) = 0. \tag{Ж.15}$$

Из (Ж.12) следует, что матрица G_{split} (3.17) является scf-матрицей (см. **Подраздел 5.1**), параметризованной двумя четными функциями из G_{split}, а уравнение (Ж.12) получается из (3.80) занулением нечетных функций. Это означает, что при $\epsilon[\operatorname{per} \mathrm{G}_{split}] \neq 0$ матрица G_0 в координатном базисе, соответствующая G_{split} (связанная соотношением, подобным (3.79)), после перенормировки на $\sqrt{\operatorname{per} \mathrm{G}_{split}}$ будет $O_{\Lambda_0}(2)$ матрицей, причем условие $\epsilon[\operatorname{per} \mathrm{G}_{split}] \neq 0$ оставляет лишь две возможности (подобно (3.77)–(3.78)): G_{split} — диагональная и антидиагональная матрица

$$\mathrm{G}_{U(1)} = \begin{pmatrix} g_{+-}(z) & 0 \\ 0 & g_{-+}(z) \end{pmatrix} - U_{\Lambda_0}(1), \tag{Ж.16}$$

$$\mathrm{G}_{O(2)} = \begin{pmatrix} 0 & g_{++}(z) \\ g_{--}(z) & 0 \end{pmatrix} - O_{\Lambda_0}(2). \tag{Ж.17}$$

Утверждение Ж.5. *"Таблица умножения" матриц* G

$$\mathrm{G}_{U(1)} \mathrm{G}_{U(1)} = \mathrm{G}_{U(1)}, \tag{Ж.18}$$

$$\mathrm{G}_{U(1)} \mathrm{G}_{O(2)} = \mathrm{G}_{O(2)}, \tag{Ж.19}$$

$$\mathrm{G}_{O(2)}\mathrm{G}_{O(2)} \;=\; \mathrm{G}_{U(1)}. \tag{Ж.20}$$

совпадает с таблицей умножения типов $N = 2$ расщепленных преобразований.

Соответствующие (Ж.16)–(Ж.17) преобразования имеют вид

$$\begin{cases} \tilde{z} = f(z), \quad f'(z) = g_{+-}(z)\, g_{-+}(z), \\ \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\pm} g_{\pm\mp}(z), \end{cases} \quad - U_{\Lambda_0}(1) \tag{Ж.21}$$

$$\begin{cases} \tilde{z} = f(z), \quad f'(z) = g_{++}(z)\, g_{--}(z), \\ \tilde{\theta}^{\pm} = \theta^{\mp} g_{\pm\pm}(z), \end{cases} \quad - O_{\Lambda_0}(2) \tag{Ж.22}$$

откуда следует, что только $U_{\Lambda_0}(1)$ преобразования образуют подгруппу (или подполугруппу в необратимом случае), поскольку отсутствует переворот киральности в θ секторе. Именно такие функции перехода (но в другой параметризации) описывают произвольное линейное расслоение над обычными римановыми поверхностями [563].

В необратимом случае $\epsilon\left[\mathrm{per}\,\mathrm{G}_{split}\right] = 0$ ситуация не столь прозрачна, поскольку SCf условия (Ж.14)–(Ж.15) могут быть выполнены не только занулением сомножителей, но и за счет возможных делителей нуля в функциях $g_{ab}(z)$ $(a, b = \pm)$. Это может случиться, например, когда $g_{ab}(z)$ являются произведениями нечетных функций, и тогда для параметризации необратимого преобразования необходимо выбрать не четные, а нечетные функции.

Пример **Ж.6.** Действительно, пусть

$$\mathrm{G}_{split} = \begin{pmatrix} \mu_+(z)\,\nu_-(z) & \mu_+(z)\,\nu_+(z) \\ \mu_-(z)\,\nu_-(z) & -\mu_-(z)\,\nu_+(z) \end{pmatrix} \tag{Ж.23}$$

где $\mu_a, \nu_b : \mathrm{C}^{1|0} \to \mathrm{C}^{0|1}$ и $\mu_a^2(z) = \nu_b^2(z) = 0$, тогда

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{z} = f(z), \quad f'(z) = \mu_+(z)\,\nu_+(z)\,\mu_-(z)\,\nu_-(z) \\ \tilde{\theta}^{\pm} = \pm\theta^{\pm}\mu_{\pm}(z)\,\nu_{\mp}(z) + \theta^{\mp}\mu_{\pm}(z)\,\nu_{\pm}(z), \end{array} \right. \qquad (\text{Ж}.24)$$

причем SCf условия (Ж.14)–(Ж.15) выполняются вследствие нильпотентности нечетных функций $\mu_{\pm}(z)$ и $\nu_{\pm}(z)$, а матрица G_{split} не (анти) диагонализуется (как в (Ж.16)–(Ж.17), а представляет собой scf-матрицу с нильпотентными элементами (см. **Подраздел 5.1**).

Из сравнения (3.14) и (Ж.10) следует, что расщепленные $N = 2$ преобразования образуют подполугруппу общей полугруппы $N = 2$ супераналитических преобразований, которая характеризуется только лишь элементами матрицы G_{split} (3.17). Поэтому представление расщепленной $N = 2$ SCf полугруппы функциональными матрицами (см. **Определение 3.9**) будет сужением представления (3.18) на элементы матрицы G_{split}, т.е.

$$\left\{ \begin{array}{cccc} f & h & \chi_- & \chi_+ \\ \psi_+ & \lambda_+ & g_{+-} & g_{++} \\ \psi_- & \lambda_- & g_{--} & g_{-+} \end{array} \right\} |_{split} \longrightarrow \left\{ \begin{array}{cc} g_{+-} & g_{++} \\ g_{--} & g_{-+} \end{array} \right\}. \qquad (\text{Ж}.25)$$

Отсюда следует

Определение Ж.7. *Элемент* $\mathbf{s}$ *расщепленной* $N = 2$ *суперконформной полугруппы* $\mathbf{S}^{(N=2)}_{SCf(split)}$ *параметризуется функциональной матрицей*

$$\left\{ \begin{array}{cc} g_{+-} & g_{++} \\ g_{--} & g_{-+} \end{array} \right\} |_{g_{\mp\pm}(z)g_{\pm\pm}(z)=0} \stackrel{def}{=} \mathbf{s}_{split} \in \mathbf{S}^{(N=2)}_{SCf(split)}, \qquad (\text{Ж}.26)$$

а действие

$$\mathbf{s}^{(1)}_{split} *_s \mathbf{s}^{(2)}_{split} = \mathbf{s}^{(3)}_{split} \tag{Ж.27}$$

определяется композицией расщепленных преобразований $Z \to \tilde{Z} \to \widetilde{\tilde{Z}}$ *и имееет следующий вид*

$$\left\{ \begin{array}{cc} g^{(3)}_{+-} & g^{(3)}_{++} \\ g^{(3)}_{--} & g^{(3)}_{-+} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{cc} g^{(1)}_{+-} & g^{(1)}_{++} \\ g^{(1)}_{--} & g^{(1)}_{-+} \end{array} \right\} *_s \left\{ \begin{array}{cc} g^{(2)}_{+-} & g^{(2)}_{++} \\ g^{(2)}_{--} & g^{(2)}_{-+} \end{array} \right\} = \tag{Ж.28}$$

$$\left\{ \begin{array}{cc} g^{(1)}_{+-} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{+-} + g^{(1)}_{++} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{--} & g^{(1)}_{+-} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{++} + g^{(1)}_{++} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{-+} \\ g^{(1)}_{--} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{+-} + g^{(1)}_{-+} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{--} & g^{(1)}_{--} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{++} + g^{(1)}_{-+} \circ f^{(2)} \cdot g^{(2)}_{-+} \end{array} \right\},$$

где

$$f^{(2)\prime}(z) = \operatorname{per} \mathrm{G}^{(2)}_{split} = g^{(2)}_{+-}(z)\, g^{(2)}_{-+}(z) + g^{(2)}_{++}(z)\, g^{(2)}_{--}(z),$$

$$g^{(1)}_{\mp\pm}(z)\, g^{(1)}_{\pm\pm}(z) = 0, \quad g^{(2)}_{\mp\pm}(z)\, g^{(2)}_{\pm\pm}(z) = 0.$$

Ассоциативность действия $*_s$ (Ж.27) следует из ассоциативности композиции расщепленных преобразований.

Утверждение Ж.8. *Ортогональность элементов столбца* (Ж.14)–(Ж.15) *или* scf*-свойство матрицы* G (Ж.12) *при действии* $*_s$ *сохраняется, т.е.* $g^{(3)}_{\mp\pm}(z)\, g^{(3)}_{\pm\pm}(z) = 0$ *в* (Ж.28).

Очевидно, что необратимые преобразования соответствуют идеалу $\mathbf{I}^{(N=2)}_{SCf(split)}$ полугруппы $\mathbf{S}^{(N=2)}_{SCf(split)}$, а обратимые преобразования — ее подгруппе $\mathbf{G}^{(N=2)}_{SCf(split)}$.

Двусторонняя единица в полугруппе $\mathbf{S}^{(N=2)}_{SCf(split)}$ определяется как

$$\mathbf{e}_{split} = \left\{ \begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right\}, \tag{Ж.29}$$

а двусторонний нуль представляется нулевой матрицей в (Ж.26).

Ж.3. Вложение $N = 1 \hookrightarrow N = 2$

Ранее частый случай вложения $N = 1 \hookrightarrow N = 2$ использовалось в [637, 813] при вычислении суперструнных амплитуд методом функционального интегрирования [814]. Мы рассмотрим общий случай суперконформного $N = 1 \hookrightarrow N = 2$ вложения [3] с учетом необратимых преобразований.

Опишем погружение $N = 1$ мирового листа $W = (w, \eta)$ в $N = 2$ суперплоскость $Z = (z, \theta^+, \theta^-)$ тремя четными и тремя нечетными функциями и следующим преобразованием общего вида

$$z = f(w) + \eta \cdot \chi(w), \tag{Ж.30}$$

$$\theta^{\pm} = \psi_{\pm}(w) + \eta \cdot g_{\pm}(w), \tag{Ж.31}$$

где $f, g_{\pm} : \mathbb{C}^{1,0} \to \mathbb{C}^{1,0}$, $\chi, \psi_{\pm} : \mathbb{C}^{1,0} \to \mathbb{C}^{0,1}$.

При супераналитических $N = 1 \hookrightarrow N = 2$ преобразованиях (Ж.30)–(Ж.31) $N = 1$ суперпроизводная $D = \partial_\eta + \eta \cdot \partial_w$ $\left(D^2 = \partial_w\right)$ переходит в

$$D = D\theta^+ \cdot D^- + D\theta^- \cdot D^+ + \left(Dz - \theta^+ \cdot D\theta^- - \theta^- \cdot D\theta^+\right) \cdot \partial_w, \tag{Ж.32}$$

где $D^{\pm}$ определены в (3.1), поэтому суперконформные условия в данном случае имеют вид

$$Dz = \theta^+ \cdot D\theta^- + \theta^- \cdot D\theta^+. \tag{Ж.33}$$

Применяя к (Ж.33) оператор D, получаем

$$\partial_w z + \theta^+ \cdot \partial_w \theta^- + \theta^- \cdot \partial_w \theta^+ = 2 \cdot D\theta^+ \cdot D\theta^-. \tag{Ж.34}$$

Условие того, что два погружения (z, θ^+, θ^-) и $\left(\tilde{z}, \tilde{\theta}^+, \tilde{\theta}^-\right)$ параме-

тризуют один и тот же мировой лист, приводят к соотношениям

$$D^{+}\tilde{\theta}^{-}\cdot D^{-}\tilde{\theta}^{+}+D^{+}\tilde{\theta}^{+}\cdot D^{-}\tilde{\theta}^{-}=\frac{D\tilde{\theta}^{+}\cdot D\tilde{\theta}^{-}}{D\theta^{+}\cdot D\theta^{-}}. \qquad (\text{Ж}.35)$$

По аналогии с (3.9) введем в рассмотрение матрицу

$$\mathrm{H}_{w}=\left(\begin{array}{cc} D\theta^{+} & D\theta^{-} \\ D\theta^{+} & D\theta^{-} \end{array}\right), \qquad (\text{Ж}.36)$$

тогда условие (Ж.35) запишется в виде [3]

$$\operatorname{per}\tilde{\mathrm{H}}_{w}=\operatorname{per}\mathrm{H}\cdot\operatorname{per}\mathrm{H}_{w}, \qquad (\text{Ж}.37)$$

где H определена в (3.9).

Классификацию вложений $N=1\hookrightarrow N=2$ по необратимости можно провести в полной аналогии с классификацией $N=2$ редуцированных преобразований (см. **Пункт 2.1.3**).

Приведем пример вложения $N=1\hookrightarrow N=2$ при $\epsilon\left[\operatorname{per}\mathrm{H}_{w}\right]\neq 0$ [3]

$$\begin{aligned} z &= f\left(w\right)+\frac{\eta}{\sqrt{2}}e^{q(w)}\psi_{-}\left(w\right)\sqrt{f'\left(w\right)+\psi_{+}\left(w\right)\psi'_{-}\left(w\right)}+ \\ &\quad \frac{\eta}{\sqrt{2}}e^{-q(w)}\psi_{+}\left(w\right)\sqrt{f'\left(w\right)+\psi_{-}\left(w\right)\psi'_{+}\left(w\right)}, \qquad (\text{Ж}.38) \\ \theta^{\pm} &= \psi_{\pm}\left(w\right)+ \qquad (\text{Ж}.39) \\ &\quad \frac{\eta}{\sqrt{2}}e^{\pm q(w)}\sqrt{f'\left(w\right)+\psi_{-}\left(w\right)\psi'_{+}\left(w\right)+\psi_{+}\left(w\right)\psi'_{-}\left(w\right)}. \end{aligned}$$

Среди необратимых преобразований с $\epsilon\left[\operatorname{per}\mathrm{H}_{w}\right]=0$ приведем следующее [3]

$$z = f_{N}\left(w\right)+\eta\left[\psi_{+}\left(w\right)\rho_{-}\left(w\right)+\psi_{-}\left(w\right)\rho_{+}\left(w\right)\right]\sigma\left(w\right), \qquad (\text{Ж}.40)$$

$$\theta^{\pm} \;=\; \psi_{\pm}(w) + \eta\rho_{\pm}(w)\,\sigma(w)\,, \qquad (\text{Ж}.41)$$

где $f'_N(w) = \psi'_+(w)\,\psi_-(w) + \psi'_-(w)\,\psi_+(w)$.

Отметим, что многие формулы и соответствующие выводы можно перенести с $N=2$ преобразований на вложения $N=1 \hookrightarrow N=2$, если в первых положить $\theta^{\pm} = \eta/\sqrt{2}$ (см. **Пункт 2.1.3**).

Ж.4. Расщепленные $N=4$ SCf преобразования

Среди $N=4$ преобразований, удовлетворяющих SCf условиям (3.184)–(3.185), наиболее простыми оказываются так называемые *расщепленные (split)* $N=4$ SCf преобразования (см. $N=2$ в **Приложении Ж.2**). Они не содержат нечетных компонентных функций в разложении (3.235) и (обратимые) могут служить функциями перехода на специальных (несупер) римановых поверхностях со спиновой структурой [563].

Общий вид расщепленных $N=4$ SCf преобразований (ср. (Ж.10))

$$\begin{cases} \tilde{z} = f(z)\,, \\ \tilde{\theta}^{\pm}_i = \theta^{\pm}_j g^{\pm\mp}_{ij}(z) + \theta^{\mp}_j g^{\pm\pm}_{ij}(z) \end{cases} \qquad (\text{Ж}.42)$$

задается 17 четными функциями f, $g^{ab}_{ij} : \mathbb{C}^{1|0} \to \mathbb{C}^{1|0}$, на которые налагаются SCf условия [2], следующие из (3.213)–(3.215),

$$\begin{aligned}
\operatorname{per}\mathrm{G}_{11} + \operatorname{per}\mathrm{G}_{21} \;&=\; \operatorname{per}\mathrm{G}_{12} + \operatorname{per}\mathrm{G}_{22} = f'(z) && (\text{Ж}.43)\\
\operatorname{scf}_{\pm}\mathrm{G}_{11} + \operatorname{scf}_{\pm}\mathrm{G}_{21} \;&=\; \operatorname{scf}_{\pm}\mathrm{G}_{12} + \operatorname{scf}_{\pm}\mathrm{G}_{22} = 0, && (\text{Ж}.44)\\
\mathrm{G}^{T}_{12}\cdot\mathrm{G}^{M}_{11} + \mathrm{G}^{T}_{22}\cdot\mathrm{G}^{M}_{21} \;&=\; 0, && (\text{Ж}.45)\\
\mathrm{G}^{T\prime}_{11}\cdot\mathrm{G}^{M}_{11} + \mathrm{G}^{T\prime}_{21}\cdot\mathrm{G}^{M}_{21} \;&=\; \mathrm{G}^{T}_{11}\cdot\mathrm{G}^{M\prime}_{11} + \mathrm{G}^{T}_{21}\cdot\mathrm{G}^{M'}_{21} = \\
\mathrm{G}^{T\prime}_{12}\cdot\mathrm{G}^{M}_{12} + \mathrm{G}^{T\prime}_{22}\cdot\mathrm{G}^{M}_{22} \;&=\; \mathrm{G}^{T}_{12}\cdot\mathrm{G}^{M\prime}_{12} + \mathrm{G}^{T}_{22}\cdot\mathrm{G}^{M\prime}_{22}, && (\text{Ж}.46)
\end{aligned}$$

где 4 матрицы G_{ij} определяются*) аналогично (3.17)

$$\mathrm{G}_{ij} = \begin{pmatrix} g_{ij}^{+-}(z) & g_{ij}^{++}(z) \\ g_{ij}^{--}(z) & g_{ij}^{-+}(z) \end{pmatrix}, \tag{Ж.47}$$

$$\mathrm{scf}_{\pm}\mathrm{G}_{ij} = g_{ij}^{+\mp}(z)\, g_{ij}^{-\mp}(z)\,. \tag{Ж.48}$$

Условия (Ж.43)–(Ж.46) свидетельствуют о том, что 4×4 матрица

$$\mathrm{G} = \begin{pmatrix} \mathrm{G}_{11} & \mathrm{G}_{12} \\ \mathrm{G}_{21} & \mathrm{G}_{22} \end{pmatrix} \tag{Ж.49}$$

является $N = 4$ scf-матрицей, т. е. $\mathrm{G} \in SCF_{\Lambda_0}(4)$ (см. **Пункт 5.1**), удовлетворяющей дополнительному дифференциальному ограничению (Ж.46) (ср. [563]).

Замечание **Ж.9.** Из дифференциального условия (Ж.46) после интегрирования следует линейное

$$\mathrm{G}_{11}^{T}\cdot\mathrm{G}_{11}^{M} + \mathrm{G}_{21}^{T}\cdot\mathrm{G}_{21}^{M} = \mathrm{G}_{12}^{T}\cdot\mathrm{G}_{12}^{M} + \mathrm{G}_{22}^{T}\cdot\mathrm{G}_{22}^{M} + c, \tag{Ж.50}$$

где c — четная константа.

Отметим также соотношение между G и H_{SCf} матрицами

$$\mathrm{G} = \mathrm{H}_{SCf}^{T}|_{\theta_i^{\pm}=0} \tag{Ж.51}$$

(см. (3.165)).

Из уравнения (Ж.43) видно, что именно матрица G определяет тип и обратимость $N = 4$ расщепленных преобразований. Так, расщеп-

---

Примечание. Штрих означает матрицу, каждый элемент которой продифференцирован по z.

ленные $N = 4$ преобразования образуют подполугруппу общей полугруппы $N = 4$ супераналитических преобразований, которая характеризуется только элементами матрицы G (Ж.49).

Представление расщепленной $N = 4$ SCf полугруппы функциональными матрицами (см. для $N = 2$ **Определение 3.9**) будет сужением представления $N = 4$ супераналитической полугруппы функциональными матрицами, содержащими в качестве элементов все 80 функций (аналогичного (3.18)) на элементы только матрицы G, состоящие из 16 элементов (как в (Ж.25)).

Определение Ж.10. *Элемент* $\mathbf{s}$ *расщепленной* $N = 4$ *суперконформной полугруппы* $\mathbf{S}^{(N=4)}_{SCf(split)}$ *параметризуется функциональной* 4×4 *матрицей*

$$\left\{ \begin{array}{cc} \mathrm{G}_{11} & \mathrm{G}_{12} \\ \mathrm{G}_{21} & \mathrm{G}_{22} \end{array} \right\} |_{SCf} \stackrel{def}{=} \mathbf{s}_{split} \in \mathbf{S}^{(N=4)}_{SCf(split)}, \qquad (Ж.52)$$

а действие

$$\mathbf{s}^{(1)}_{split} *_s \mathbf{s}^{(2)}_{split} = \mathbf{s}^{(3)}_{split} \qquad (Ж.53)$$

определяется композицией расщепленных преобразований $Z \to \tilde{Z} \to \widetilde{\tilde{Z}}$ *(аналогично, как в* $N = 2$ *(Ж.28)).*

Замечание **Ж.11.** Ассоциативность действия $*_s$ (Ж.53) следует из ассоциативности композиции $N = 4$ расщепленных преобразований.

Очевидно, что необратимые преобразования соответствуют идеалу полугруппы $\mathbf{I}^{(N=4)}_{SCf(split)} \trianglelefteq \mathbf{S}^{(N=4)}_{SCf(split)}$, а обратимые преобразования — ее подгруппе $\mathbf{G}^{(N=4)}_{SCf(split)} \subset \mathbf{S}^{(N=4)}_{SCf(split)}$.

Двусторонняя единица в полугруппе $\mathbf{S}^{(N=4)}_{SCf(split)}$ определяется как

$$\mathbf{e}_{split} = \left\{ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\}, \tag{Ж.54}$$

а двусторонний нуль представляется нулевой матрицей в (Ж.52).

Замечание **Ж.12.** Функциональная матрица (Ж.52) совпадает с G только по внешнему виду *), поскольку умножение в расщепленной $N = 4$ суперконформной полугруппе $\mathbf{S}^{(N=4)}_{SCf(split)}$ не связано с обычным умножением матриц G, а определяется композицией $N = 4$ SCf преобразований (см. *Замечание* **3.10** и (Ж.28)).

В обратимом случае при $\epsilon\left[\det \mathrm{G}\right] \neq 0$ березиниан расщепленных $N = 4$ SCf преобразований определяется формулой

$$\mathrm{Ber}^{\,N=4}_{split}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \frac{f'(z)}{\det \mathrm{G}}, \tag{Ж.55}$$

которая следует непосредственно из (Ж.42).

Применение формул (3.220) и (Ж.43) дает

$$\begin{aligned} \det \mathrm{G} = k_{split}\left(\mathrm{per}\,\mathrm{G}_{11} + \mathrm{per}\,\mathrm{G}_{12}\right)^2 \;\; = \\ k_{split}\left(\mathrm{per}\,\mathrm{G}_{21} + \mathrm{per}\,\mathrm{G}_{22}\right)^2 \;\; = \;\; k_{split}\left[f'(z)\right]^2, \end{aligned} \tag{Ж.56}$$

откуда

$$\mathrm{Ber}^{\,N=4}_{split}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \frac{k_{split}}{f'(z)}, \tag{Ж.57}$$

где $k_{split} = +1$ для $SO_{\Lambda_0}(4)$ преобразований и $k_{split} = -1$ для общих

Примечание. Фигурные скобки призваны их отличить.

$O_{\Lambda_0}(4)$ преобразований[*)].

Рассмотрим более подробно различные типы расщепленных обратимых преобразований. Для этого отметим, что SCf условия (Ж.44)–(Ж.46) налагают жесткие ограничения на вид обратимых матриц G_{ij}: они могут быть либо диагональными ($k_{ij} = +1$, $U(1)$-матрица), либо антидиагональными ($k_{ij} = -1$, $O(2)$-матрица), т. е. $\mathrm{G}_{ij} = \mathrm{G}_{ij}^{k_{ij}} = \mathrm{G}_{ij}^{\pm} \in GSCF_{\Lambda_0}(2)$ (см. **Пункт 5.1**).

Сначала рассмотрим случай, матрица G (Ж.47) является или блочно диагональной $\mathrm{G}_{12} = \mathrm{G}_{21} = 0$ ($k_G = +1$), или блочно антидиагональной $\mathrm{G}_{11} = \mathrm{G}_{22} = 0$ ($k_G = -1$). Тогда условия (Ж.44)–(Ж.46) выполняются тождественно, и расщепленные $N = 4$ SCf преобразования $\mathcal{T}_{SCf}^{N=4}$ характеризуются 3 индексами, т. е. $\mathcal{T}_{SCf}^{N=4} = \mathcal{T}_{k_1,k_2}^{k_G} = \mathcal{T}_{\pm\pm}^{\pm}$, где $k_1, k_2 = k_{11}, k_{22}$ при $k_G = +1$ и $k_1, k_2 = k_{12}, k_{21}$ при $k_G = -1$. Отсюда получаем общую формулу для типа преобразования через типы составляющих (всего 8 вариантов)

$$k_{split} = k_G k_1 k_2. \tag{Ж.58}$$

В том случае, когда все 4 матрицы G_{ij} отличны от нуля, по аналогии с (Ж.58) имеем $\mathcal{T}_{SCf}^{N=4} = \mathcal{T}_{k_{21}k_{22}}^{k_{11}k_{12}}$ (16 вариантов) и

$$k_{split} = k_{11}k_{12}k_{21}k_{22}. \tag{Ж.59}$$

Замечание **Ж.13.** Поскольку для $U(1)$ матриц G_{ij} $k_{ij} = +1$, то

$$k_{split} = (-1)^{n_{O(2)}}, \tag{Ж.60}$$

Примечание. Другими словами, нормированная матрица G является $SO_{\Lambda_0}(4)$ (при $k_{split} = +1$) или $O_{\Lambda_0}(4)$ (при $k_{split} = -1$) матрицей.

где $n_{O(2)}$ — число $O(2)$ матриц в G.

При композиции расщепленных преобразований (Ж.53) $k^{(3)}_{split} = k^{(1)}_{split} k^{(2)}_{split}$. Отсюда следует очевидное

Замечание **Ж.14.** Подгруппу в $O(4)$ составляют только те преобразования, для которых $k_{split} = +1$.

Покажем, каким образом в нашем формализме возникает подгруппа глобальных вращений $SU_{global}(2) \cong SO_{global}(4)$ [668]. Для этого рассмотрим, например, преобразование $\mathcal{T}^{+}_{++}$

$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{\theta}^{\pm}_1 = \theta^{\pm}_1 g^{\pm\mp}_{11}(z), \quad \tilde{\theta}^{\pm}_2 = \theta^{\pm}_2 g^{\pm\mp}_{22}(z), \tag{Ж.61}$$

где $f'(z) = g^{+-}_{11}(z)\, g^{-+}_{11}(z)$ (см. (Ж.42)).

Перепараметризуем функции $g^{\pm\mp}_{ij}(z)$ по формулам[*)]

$$g^{\pm\mp}_{11}(z) = u_1(z)\, e^{\pm q_1(z)}, \tag{Ж.62}$$
$$g^{\pm\mp}_{22}(z) = u_2(z)\, e^{\pm q_2(z)}. \tag{Ж.63}$$

Тогда из уравнений (Ж.46) следует соотношения

$$g^{+-}_{11}(z)\, g^{-+\prime}_{11}(z) = g^{+-\prime}_{11}(z)\, g^{-+}_{11}(z) \Rightarrow u^2_1(z)\, q'_1(z) = 0, \tag{Ж.64}$$
$$g^{+-}_{22}(z)\, g^{-+\prime}_{22}(z) = g^{+-\prime}_{22}(z)\, g^{-+}_{22}(z) \Rightarrow u^2_2(z)\, q'_2(z) = 0. \tag{Ж.65}$$

В силу обратимости $\epsilon\left[g^{\pm\mp}_{ij}(z)\right] \neq 0$, и, следовательно $\epsilon[u_i(z)] \neq 0$, поэтому $u^2_i(z) \neq 0$, значит $q'_i(z) = 0$ и $q_i(z) = q_i = const$, и получаем

$$\tilde{z} = f(z), \quad \tilde{\theta}^{\pm}_1 = \hat{\theta}^{\pm}_1 u_1(z), \quad \tilde{\theta}^{\pm}_2 = \hat{\theta}^{\pm}_2 u_2(z), \tag{Ж.66}$$

Примечание. В силу того, что в обратимом случае $\epsilon\left[g^{\pm\mp}_{ij}(z)\right] \neq 0$, это возможно.

где $f'(z) = u_1^2(z) = u_2^2(z)$ и, следовательно, в нечетном секторе имеются искомые глобальные вращения

$$\hat{\theta}_1^{\pm} = \theta_1^{\pm} e^{\pm q_1}, \;\; \hat{\theta}_2^{\pm} = \theta_2^{\pm} e^{\pm q_2}. \tag{Ж.67}$$

В случае преобразований $\mathcal{T}_{++}^{+}$ имеем дальнейшие упрощения. Из (Ж.46) и (Ж.50) можно получить также, что $u_1^2(z) = u_2^2(z) = f'(z)$, т. е. $u_1(z) = k u_2(z) = u(z)$, где $k = \pm 1$. Окончательно

$$\tilde{z} = f(z), \;\; \tilde{\theta}_1^{\pm} = \hat{\theta}_1^{\pm} u(z), \;\; \tilde{\theta}_2^{\pm} = k \hat{\theta}_2^{\pm} u(z), \tag{Ж.68}$$

где $f'(z) = u^2(z)$.

Более нетривиальными являются преобразования $\mathcal{T}_{k_{21}k_{22}}^{k_{11}k_{12}}$ (Ж.59), в которых все 4 матрицы G_{ij} отличны от нуля. Рассмотрим подробнее преобразования $\mathcal{T}_{++}^{++}$, для которых все G_{ij} диагональны и все $k_{ij} = +1$. Снова параметризуем ненулевые $g_{ij}^{\pm\mp}(z)$, как в (Ж.62)–(Ж.63), тогда SCf условия (Ж.44)–(Ж.46) приводят к следующим $N = 4$ расщепленным преобразованиям [2]

$$\tilde{z} = f(z), \tag{Ж.69}$$

$$\tilde{\theta}_1^{\pm} = \hat{\theta}_1^{\pm} u_1^{\pm}(z) + \hat{\theta}_2^{\pm} u_2^{\pm}(z), \tag{Ж.70}$$

$$\tilde{\theta}_2^{\pm} = -\hat{\theta}_1^{\pm} u_2^{\mp}(z) + \hat{\theta}_2^{\pm} u_1^{\mp}(z), \tag{Ж.71}$$

где $\hat{\theta}_i^{\pm}$ определены в (Ж.67), $f'(z) = u_1^+(z)\, u_1^-(z) + u_2^+(z)\, u_2^-(z)$ и

$$u_1^+(z)\, u_1^{-\prime}(z) + u_2^+(z)\, u_2^{-\prime}(z) = u_1^{+\prime}(z)\, u_1^-(z) + u_2^{+\prime}(z)\, u_2^-(z). \tag{Ж.72}$$

Замечание **Ж.15.** Очевидно, что преобразования с $u_2^{\pm}(z) = 0$ образуют подгруппу расщепленных преобразований (Ж.69)–(Ж.71).

Локальные $SU_{\Lambda_0}(2)$ вращения возникают, если перепараметризовать $u_i^{\pm}(z)$ в виде

$$u_1^{\pm}(z) = v_1(z)\, e^{\pm p_1(z)}, \tag{Ж.73}$$

$$u_2^{\pm}(z) = v_2(z)\, e^{\pm p_2(z)}, \tag{Ж.74}$$

где функции $v_i(z)$ и $p_i(z)$ удовлетворяют соотношениям

$$v_1^2(z) + v_2^2(z) = f'(z), \tag{Ж.75}$$

$$p_1'(z)\, v_1^2(z) = p_2'(z)\, v_2^2(z). \tag{Ж.76}$$

Наиболее симметричным*) решением является

$$v_1(z) = v_2(z) = \sqrt{\frac{f'(z)}{2}}, \tag{Ж.77}$$

$$p_1(z) = p_2(z). \tag{Ж.78}$$

Отметим, что среди обратимых расщепленных преобразований, удовлетворяющих (Ж.44)–(Ж.46), имеется дополнительный промежуточный тип, который описывается двумя обратимыми матрицами G_{ij} и двумя необратимыми [2]. Действительно, пусть scf-матрицы G_{11}, $\mathrm{G}_{22} \in GSCF_{\Lambda_0}(2)$ и $\mathrm{G}_{12}, \mathrm{G}_{21} \in ISCF_{\Lambda_0}(2)$ (см. **Пункт 5.1**), т. е. $\operatorname{per} \mathrm{G}_{ij} \neq 0$, $\epsilon[\operatorname{per} \mathrm{G}_{11}] \neq 0$, $\epsilon[\operatorname{per} \mathrm{G}_{22}] \neq 0$, $\epsilon[\operatorname{per} \mathrm{G}_{12}] = 0$, $\epsilon[\operatorname{per} \mathrm{G}_{21}] = 0$. Матрицы G_{11} и G_{22} возьмем диагональными $k_{11} = k_{22} = +1$ (см. (Ж.59)). Параметризуем scf-матрицы G_{12} и G_{21} нечетными функциями $\mu_i^{\pm}(z)$ следу-

---

Примечание. Хотя и не единственным даже из обратимых.

ющим образом (см. *Пример* **Ж.6**)

$$\mathrm{G}_{ij} = \begin{pmatrix} \mu_i^+(z)\,\mu_j^-(z) & \mu_i^+(z)\,\mu_j^+(z) \\ \mu_i^-(z)\,\mu_j^-(z) & -\mu_i^-(z)\,\mu_j^+(z) \end{pmatrix}, \qquad (\text{Ж.79})$$

где

$$\operatorname{per}\mathrm{G}_{ij} = 2\rho(z) \neq 0 \ \ (i \neq j), \qquad (\text{Ж.80})$$

$$\rho(z) = \mu_1^+(z)\,\mu_1^+(z)\,\mu_2^-(z)\,\mu_2^-(z). \qquad (\text{Ж.81})$$

Тогда SCf условия (Ж.44) выполняются за счет нильпотентности нечетных функций $\mu_i^{\pm}(z)$, условие (Ж.45) приводит к $g_{11}^{\pm\mp}(z) = g_{22}^{\mp\pm}(z)$, а остальные дают систему уравнений для функций $\mu_i^{\pm}(z)$, которая может быть решена многими способами (также из-за нильпотентности $\mu_i^{\pm}(z)$). Приведем один пример из этой серии решений при $\mu_1^{\pm}(z) = \mu_2^{\pm}(z)$

$$\tilde{z} = f(z), \qquad (\text{Ж.82})$$

$$\tilde{\theta}_1^{\pm} = \hat{\theta}_1^{\pm} u(z) \pm \hat{\theta}_2^{\pm} \mu_1^{\pm}(z)\,\mu_1^{\mp}(z), \qquad (\text{Ж.83})$$

$$\tilde{\theta}_2^{\pm} = \hat{\theta}_2^{\pm} u(z) \mp \hat{\theta}_1^{\pm} \mu_1^{\mp}(z)\,\mu_1^{\pm}(z), \qquad (\text{Ж.84})$$

где $f'(z) = u(z)$.

В необратимом случае $\epsilon[\operatorname{per}\mathrm{G}] = 0$ матрицы $\mathrm{G}_{ij} \in ISCF_{\Lambda_0}(2)$ не обязательно должны быть диагональными. Если параметризовать их 4 нечетными функциями $\mu_i^{\pm}(z)$ и выбрать G_{12} и G_{21} подобно (Ж.79), а для остальных матриц выбрать $\mathrm{G}_{11} = \mathrm{G}_{12}^{TM}$, $\mathrm{G}_{22} = \mathrm{G}_{21}^{TM}$, то получаем необратимые расщепленные преобразования, принадлежащие иде-

алу $N=4$ SCf полугруппы (см. **Определение 3.58**)

$$\tilde{z} = f(z), \tag{Ж.85}$$

$$\tilde{\theta}_1^{\pm} = \mp\hat{\theta}_1^{\pm}\mu_1^{\pm}(z)\,\mu_2^{\mp}(z) \pm \hat{\theta}_2^{\pm}\mu_1^{\mp}(z)\,\mu_2^{\pm}(z) + \hat{\theta}_1^{\mp}\mu_1^{\pm}(z)\,\mu_2^{\pm}(z) + \hat{\theta}_2^{\mp}\mu_1^{\pm}(z)\,\mu_2^{\pm}(z), \tag{Ж.86}$$

$$\tilde{\theta}_2^{\pm} = \mp\hat{\theta}_2^{\pm}\mu_2^{\pm}(z)\,\mu_1^{\mp}(z) \pm \hat{\theta}_1^{\pm}\mu_2^{\mp}(z)\,\mu_1^{\pm}(z) + \hat{\theta}_2^{\mp}\mu_2^{\pm}(z)\,\mu_1^{\pm}(z) + \hat{\theta}_1^{\mp}\mu_2^{\pm}(z)\,\mu_1^{\pm}(z), \tag{Ж.87}$$

где $f'(z) = 4\rho(z)$ (см. (Ж.81)).

Ж.5. Дробно-линейные $N=4$ преобразований и полуматрицы

В обратимом случае дробно-линейные $N=4$ преобразования можно получить непосредственно из (3.250)–(3.252), если выбрать в качестве компонентных функций дробно-линейные

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \quad \psi_i^{\pm} = \frac{\gamma_i^{\pm}z + \delta_i^{\pm}}{cz+d}, \tag{Ж.88}$$

где $a, b, c, d \in \Lambda_0$ — четные константы, $\delta_i^{\pm} \in \Lambda_1$ — нечетные.

Тогда получаем

$$\tilde{z} = \frac{az+b}{cz+d} + \frac{Y\hat{\theta}_1^{+}}{(cZ^{+}+d)^2}\left[Z^{+}\cdot\delta\mathrm{et}\mathcal{Y}^{--} + \delta\mathrm{et}\mathcal{X}^{--}\right] + \frac{Y\hat{\theta}_1^{-}}{(cZ^{-}+d)^2}\left[Z^{-}\cdot\delta\mathrm{et}\mathcal{Y}^{++} + \delta\mathrm{et}\mathcal{X}^{++}\right] + \frac{Y\hat{\theta}_2^{+}}{(cZ^{+}+d)^2}\left[Z^{+}\cdot\pi\mathrm{er}\mathcal{Y}^{-+} + \pi\mathrm{er}\mathcal{X}^{-+}\right] +$$

$$\frac{Y\hat{\theta}_2^-}{\left(cZ^-+d\right)^2}\left[Z^-\cdot\pi\mathrm{er}\mathcal{Y}^{+-}+\pi\mathrm{er}\mathcal{X}^{+-}\right]+$$
$$\left(\hat{\theta}_1^+\hat{\theta}_1^-+\hat{\theta}_2^+\hat{\theta}_2^-\right)\cdot\frac{(d-cz)\left(\det\Gamma_{11}^{+-}+\det\Gamma_{22}^{+-}\right)+2d\mathrm{per}\,\Omega-2c\mathrm{per}\,\Upsilon}{\left(cz+d\right)^3}+$$
$$2\hat{\theta}_1^+\hat{\theta}_2^+\cdot\frac{(d-cz)\det\Gamma_{21}^{--}-2c\delta_2^-\delta_1^-}{\left(cz+d\right)^3}+$$
$$2\hat{\theta}_1^-\hat{\theta}_2^-\cdot\frac{(d-cz)\det\Gamma_{21}^{++}-2c\delta_2^+\delta_1^+}{\left(cz+d\right)^3}-\hat{\theta}_1^+\hat{\theta}_1^-\hat{\theta}_2^+\hat{\theta}_2^-\frac{2c}{\left(cz+d\right)^3},\qquad(\text{Ж.89})$$

$$\tilde{\theta}_1^\pm=\frac{\gamma_1^\pm z+\delta_1^\pm}{cz+d}+\hat{\theta}_1^\pm\frac{Ye^{\pm p_2}}{cZ^\pm+d}+\hat{\theta}_2^\pm\frac{Ye^{\pm p_1}}{cZ^\pm+d}+2\hat{\theta}_1^\pm\hat{\theta}_2^\pm\frac{\delta\mathrm{et}\mathcal{V}_2^\mp}{\left(cz+d\right)^2},\qquad(\text{Ж.90})$$

$$\tilde{\theta}_2^\pm=\frac{\gamma_2^\pm z+\delta_2^\pm}{cz+d}-\hat{\theta}_1^\pm\frac{Ye^{\mp p_1}}{cZ^\pm+d}+\hat{\theta}_2^\pm\frac{Ye^{\mp p_2}}{cZ^\pm+d}+2\hat{\theta}_2^\pm\hat{\theta}_1^\pm\frac{\delta\mathrm{et}\mathcal{V}_1^\mp}{\left(cz+d\right)^2},\qquad(\text{Ж.91})$$

где $Y=\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$, $\Gamma_{ij}^{ab},\Upsilon,\Omega$ — матрицы со всеми нечетными элементами

$$\Gamma_{ij}^{ab}=\begin{pmatrix}\delta_i^a&\delta_j^b\\\gamma_i^a&\gamma_j^b\end{pmatrix},\ \Upsilon=\begin{pmatrix}\delta_1^+&\delta_2^+\\\delta_2^-&\delta_1^-\end{pmatrix},\ \Omega=\begin{pmatrix}\gamma_1^+&\gamma_2^+\\\gamma_2^-&\gamma_1^-\end{pmatrix},\qquad(\text{Ж.92})$$

и горизонтальные полуматрицы (см. **Пункт Д.2**) $\mathcal{Y}^{ab},\mathcal{X}^{ab}$ и $\mathcal{V}_i^a$ определяются

$$\mathcal{Y}^{ab}=\begin{pmatrix}\gamma_1^a&\gamma_2^a\\e^{bp_1}&e^{-bp_2}\end{pmatrix},\ \mathcal{X}^{ab}=\begin{pmatrix}\delta_1^a&\delta_2^a\\e^{-bp_1}&e^{bp_2}\end{pmatrix},\ \mathcal{V}_i^a=\begin{pmatrix}\gamma_i^a&\delta_i^a\\c&d\end{pmatrix}\qquad(\text{Ж.93})$$

где $\hat{\theta}_i^\pm$ определены в (Ж.67), $a,b=\pm$ и p_1,p_2 отвечают различным $SU\left(2,\Lambda_0\right)$ вращениям.

Замечание **Ж.16.** Матрицы $Y,\Gamma_{ij}^{ab},\Upsilon,\Omega$ и полуматрицы $\mathcal{V}_i^a$ представляют собой миноры и полуминоры (см. **Пункт Д.2**) соответствующих матриц и полуматриц в суперматрице дробно-линейных $N=4$ SCf пре-

образований в однородных координатах, аналогично $N = 1$ в (2.205).

Отметим, что в необратимом случае решение уравнения (3.258) для дробно-линейных функций $\psi_i^{\pm}$ (Ж.88) имеет вид

$$f(z) = \frac{\pi \mathrm{er}\Gamma_{11}^{+-} + \pi \mathrm{er}\Gamma_{22}^{+-}}{c(cz+d)}. \qquad (Ж.94)$$

Приложение З

Сплетающие четность преобразования, нечетные коциклы и деформации

Теория деформаций супермногообразий [746, 753, 815] с одной стороны представляет собой необходимую составляющую анализа суперструн и суперконформных теорий поля в терминах суперримановых поверхностей [111, 816], а с другой стороны интересна и с математической точки зрения [346, 357, 624, 817] как суперобобщение соответствующей теории для обычных комплексных многообразий [818–821].

Здесь мы рассмотрим некоторые особенности координатного описания и деформаций полусупермногообразий (см. **Раздел 1**), возникающие при учете сплетающих четность преобразований (см. **Подраздел 2.3**). Проследим подробно, каким образом возникают новые типы условий согласованности и коциклов.

З.1. Смешанные условия согласованности и нечетные аналоги коциклов

Пусть имеется $(1|0)$-мерное комплексное полусупермногообразие $\mathscr{M}$ (в смысле **Определения 1.3**), представленное в виде полуатласа $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{\alpha} \{\mathscr{U}_\alpha\}$ с локальными координатами z_α. Тогда основные формулы и теоремы будут повторять соответствующие формулы несуперсимметричного случая [819]. Единственное добавление состоит в учете наряду с обратимыми полунеобратимых преобразований (2.4) в качестве функций перехода $z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta)$ с ненулевым, но необратимым нильпотентным якобианом $J_{\alpha\beta} = \partial z_\alpha / \partial z_\beta$, т. е. $J_{\alpha\beta} \neq 0$, но $\epsilon[J_{\alpha\beta}] = 0$. Этот

случай является промежуточным между стандартным обратимым, когда $J_{\alpha\beta} \neq 0$, и предельным необратимым, когда $J_{\alpha\beta} = 0$.

Замечание **3.1.** Преобразования с нулевым якобианом рассматривались в [812] для комплексных афинных пространств, а также для векторных пространств [382, 383] при исследовании контракций различных алгебраических структур [381, 822, 823].

На пересечении трех суперобластей $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ для поледовательных переходов $z_\gamma \to z_\beta \to z_\alpha$ имеем условие согласования

$$f_{\alpha\gamma} = f_{\alpha\beta} \circ f_{\beta\gamma} \tag{3.1}$$

или в локальных координатах $f_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = f_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma))$.

При этом соответствующие якобианы преобразуются мультипликативно (с поточечным умножением)

$$J_{\alpha\gamma} = J_{\alpha\beta} \cdot J_{\beta\gamma}, \tag{3.2}$$

что отвечает касательному расслоению на $\mathscr{M}$ [260, 819, 824].

В случае $(1|1)$-мерного полусупермногообразия с локальными координатами $Z_\alpha = (z_\alpha, \theta_\alpha)$ роль якобиана в обратимом суперконформном случае играет березиниан перехода $Z_\beta \to Z_\alpha$ (см. **Приложение E.1**). Однако для выполнения условия коцикличности, аналогичного (3.2), необходимо рассматривать редуцированные преобразования (см. **Пункт 2.1.3**). Здесь мы покажем, что при ослаблении обратимости возникает не один вариант суперобобщения условия коцикличности (3.2) [405,491], а два [9] в соответствие с двумя типами редуцированных преобразований [7, 13].

Для этого запишем общее преобразование $(1|1)$-мерного касатель-

ного вектора $T\mathscr{M}|_\beta \to T\mathscr{M}|_\alpha$ в матричном виде (см. 2.24)

$$\begin{pmatrix} \partial_\beta \\ D_\beta \end{pmatrix} = \mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta} \cdot \begin{pmatrix} \partial_\alpha \\ D_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Q_{\alpha\beta} & \partial_\beta\theta_\alpha \\ \Delta_{\alpha\beta} & D_\beta\theta_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$Q_{\alpha\beta} = \partial_\beta z_\alpha - \partial_\beta\theta_\alpha \cdot \theta_\alpha, \tag{3.5}$$

$$\Delta_{\alpha\beta} = D_\beta z_\alpha - D_\beta\theta_\alpha \cdot \theta_\alpha, \tag{3.6}$$

где $D_\alpha = \partial/\partial\theta_\alpha + \theta_\alpha\partial_\alpha, \partial_\alpha = \partial/\partial z_\alpha$ (нет суммирования).

При двух последовательных преобразованиях $Z_\gamma \to Z_\beta \to Z_\alpha$ на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ для суперматриц $\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}$ из (3.3) имеем условие коцикличности, аналогичное (3.2)

$$\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\gamma} = \mathrm{P}^{SA}_{\beta\gamma} \cdot \mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

Отсюда следуют выражения для нечетной и четной производных конечной нечетной координаты

$$D_\gamma\theta_\alpha = D_\gamma\theta_\beta \cdot D_\beta\theta_\alpha + \Delta_{\beta\gamma} \cdot \partial_\beta\theta_\alpha, \tag{3.8}$$

$$\partial_\gamma\theta_\alpha = \partial_\gamma\theta_\beta \cdot D_\beta\theta_\alpha + Q_{\beta\gamma} \cdot \partial_\beta\theta_\alpha. \tag{3.9}$$

Легко видеть, что зануление вторых слагаемых в (3.9)–(3.9)

$$\Delta_{\beta\gamma} = 0, \quad (\mathsf{SCf}) \tag{3.10}$$

$$Q_{\beta\gamma} = 0, \quad (\mathsf{TPt}) \tag{3.11}$$

приводит к двум (!), а не к одному, как в стандартном случае [491], условиям коцикла [7,9] и соответствующим двум редукциям суперматрицы

$\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}$ (см. **Пункт 2.1.3**).

Уравнения (3.10)–(3.11) снова, как и (2.37)–(2.38), определяют суперконформные (SCf) и сплетающие четность (TPt) преобразования соответственно (см. **Пункт 2.1.3** и **Подраздел 2.3**). Тогда вместо одного условия коцикличности для суперматриц $\mathrm{P}^{SA}_{\alpha\beta}$ (3.7) имеем два условия

$$\mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\gamma} = \mathrm{P}^{SCf}_{\beta\gamma} \cdot \mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta}, \tag{3.12}$$

$$\mathrm{P}^{TPt}_{\alpha\gamma} = \mathrm{P}^{TPt}_{\beta\gamma} \cdot \mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta}. \tag{3.13}$$

для редуцированных различным образом суперматриц

$$\mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} Q^{SCf}_{\alpha\beta} & \partial_\beta \theta^{SCf}_\alpha \\ 0 & D_\beta \theta^{SCf}_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.14}$$

$$\mathrm{P}^{TPt}_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_\beta \theta^{TPt}_\alpha \\ \Delta^{TPt}_{\alpha\beta} & D_\beta \theta^{TPt}_\alpha \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

где $Q^{SCf}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} Q_{\alpha\beta}|_{\Delta_{\alpha\beta}=0}$, $\Delta^{TPt}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \Delta_{\alpha\beta}|_{Q_{\alpha\beta}=0}$.

Таким образом, из (3.8)–(3.13) следует

Утверждение 3.2. *При ослаблении обратимости для условия коцикличности* (3.2) *имеется два возможных суперобобщения — четное и нечетное*

$$\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\gamma} = \boldsymbol{J}^{SCf}_{\beta\gamma} \cdot \boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} \tag{3.16}$$

$$\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\gamma} = \mathcal{J}^{TPt}_{\beta\gamma} \cdot \boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} \tag{3.17}$$

где

$$\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} D_\beta \theta^{SCf}_\alpha, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta} \stackrel{def}{=} \partial_\beta \theta^{TPt}_\alpha. \tag{3.19}$$

Замечание **3.3.** Из (3.19) следует, что $\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta}$ является нечетным и, следовательно, нильпотентным.

Отсюда естественно вытекает

Определение 3.4. *Назовем* $\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta}$ *и* $\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta}$ *четным и нечетным коциклом соответственно, а условие* (3.17) — *смешанным условием согласованности* (*условием коцикла*).

Все рассмотренные условия согласованности можно представить также в более наглядном виде, отражающем нетривиальную четно-нечетную симметрию между коциклами,

$$\partial_\gamma z_\alpha = \partial_\gamma z_\beta \cdot \partial_\beta z_\alpha \stackrel{SUSY}{\Longrightarrow} \begin{cases} D_\gamma \theta^{SCf}_\alpha = D_\gamma \theta^{SCf}_\beta \cdot D_\beta \theta^{SCf}_\alpha, & (\mathsf{SCf}) \\ \partial_\gamma \theta^{TPt}_\alpha = \partial_\gamma \theta^{TPt}_\beta \cdot D_\beta \theta^{SCf}_\alpha, & (\mathsf{TPt}) \end{cases} \tag{3.20}$$

где индексы SCf и TPt отвечают типу редуцированного преобразования $\mathcal{T}_{\alpha\beta}$ между соответствующими суперобластями $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}_\beta$ (см. также *Замечание* **2.29**). Следовательно, в рамках категории редуцированных преобразований (а не суперконформных) мы имеем две коммутативные диаграммы

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\gamma & \xrightarrow{\mathcal{T}^{SCf}_{\beta\gamma}} & \mathcal{U}_\beta \\ & {\scriptstyle \mathcal{T}^{SCf}_{\alpha\gamma}} \searrow \quad \downarrow {\scriptstyle \mathcal{T}^{SCf}_{\alpha\beta}} & \\ & \mathcal{U}_\alpha & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{U}_\gamma & \xrightarrow{\mathcal{T}^{TPt}_{\beta\gamma}} & \mathcal{U}_\beta \\ & {\scriptstyle \mathcal{T}^{TPt}_{\alpha\gamma}} \searrow \quad \downarrow {\scriptstyle \mathcal{T}^{SCf}_{\alpha\beta}} & \\ & \mathcal{U}_\alpha & \end{array} \tag{3.21}$$

соответствующие условиям согласованности (3.16) и (3.17) (ср. (4.13)).

Замечание **3.5.** По терминологии [825] коциклы, удовлетворяющие соотношениям типа (3.2) и (3.16)–(3.17) называются склеивающими

коциклами соответствующего расслоения (в данном случае касательного).

Существенным для суперструнных приложений (см., например, [327, 343, 362, 826]) фактом является

Предложение 3.6. *Четный коцикл* $\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta}$ (3.18) *совпадает с березинианом — четным супераналогом якобиана — суперконформного* (SCf) *преобразования* $Z_\beta \to Z_\alpha$

$$\boldsymbol{J}^{SCf}_{\alpha\beta} = \operatorname{Ber} \mathrm{P}^{SCf}_{\alpha\beta}. \tag{3.22}$$

Доказательство. Следует непосредственно из (3.14) и (2.52). ■

Это позволяет построить каноническое расслоение с функциями перехода (3.22), а также соответствующее линейное расслоение [183, 343, 365, 405]. Сопоставляя (3.1)–(3.2) и **Предложение 3.6**, можно придать похожий смысл также и нечетному коциклу [*)] (3.19).

Предположение 3.7. *Нечетный коцикл* $\mathcal{J}^{TPt}_{\alpha\beta}$ *можно трактовать как нечетный супераналог якобиана для сплетающих четность* (TPt) *преобразований* $Z_\beta \to Z_\alpha$ (*см.* **Определение 2.55**).

Замечание **3.8.** Формула (3.17) может рассматриваться не только как условие коцикличности, но и как закон умножения четного и нечетного супераналогов якобинана.

Тогда соответствующие аналоги канонического и линейного расслоений будут обладать необычными свойствами, например, кручение четности и нильпотентность коциклов (см. подробнее **Пункт 2.3.2**).

Примечание. Введенные нечетные коциклы не связаны с $\mathbb{Z}_2$-градуированными коциклами, возникающими при суперсимметризации швингеровского слагаемого для нейтральной частицы [827, 828].

3.2. Деформации и TPt преобразования

Возникновение дополнительного условия согласования (3.13) и нечетного условия коцикличности (3.17) приводит к соответствующей модификации стандартных условий деформации в локальном подходе [357, 816, 817, 829]. Это, в свою очередь, играет важную роль в суперструнных вычислениях [324,348,362] для определения свойств пространства супермодулей [347, 353, 356, 404, 566] и формулировки суперобобщения фундаментальной теоремы Римана-Роха [342, 343, 346, 352, 830].

Здесь мы переформулируем стандартный подход, используя альтернативной параметризацию (см. **Пункт 2.1.5**), что позволит учесть также и нечетные условия коцикличности (3.13) и (3.17).

В несуперсимметричном случае [818–820] деформация условия согласованности (3.1)

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right) + t b_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right) \tag{3.23}$$

приводит к тому же условию (3.1) для недеформинрованных функций $f_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)$ и к уравнению для деформаций $b_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)$

$$b_{\alpha\gamma}\left(z_\gamma\right) = b_{\alpha\beta}\left(f_{\beta\gamma}\left(z_\gamma\right)\right) + f'_{\alpha\beta}\left(f_{\beta\gamma}\left(z_\gamma\right)\right) \cdot b_{\beta\gamma}\left(z_\gamma\right). \tag{3.24}$$

Умножим это соотношение тензорно на $\partial/\partial z_\alpha$ и воспользуемся $f'_{\alpha\beta} = \partial z_\alpha / \partial z_\beta$, тогда получаем условие согласованности в виде

$$b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + b_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\beta} - b_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} = 0, \tag{3.25}$$

которое показывает, что $\left\{b_{\alpha\beta}\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}\right\}$ действительно является коциклом. При инфинитезимальных преобразованиях $z_\alpha \longmapsto z_\alpha + t s_\alpha\left(z_\alpha\right)$ коцикл

(3.25) изменяется на кограницу

$$\left\{b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right\}\longmapsto\left\{b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}+s_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}-s_\beta\frac{\partial}{\partial z_\beta}\right\}, \tag{3.26}$$

что определяет когомологический класс (Кодайры-Спенсера) деформаций первого порядка [819].

В суперконформном случае [357,816] рассматриваются недеформированные расщепленные преобразования, имеющие в стандартной параметризации [341] вид

$$\mathsf{SCf}_{\,split}\colon\begin{cases} z_\alpha = f_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right), \\ \theta_\alpha = \theta_\beta\cdot\sqrt{f'_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)}, \end{cases} \tag{3.27}$$

которые не содержат никаких нечетных параметров, кроме θ_α. Поэтому расщепленные суперримановы поверхности, имеющие преобразования (3.27) в качестве функций склейки содержат ту же информацию, что и обычные римановы поверхности, наделенные спиновой структурой, которая определяется знаком квадратного корня [327, 330, 826, 831].

Теперь суперконформные деформации определяются двумя параметрами*), четным t и нечетным τ [357,816] и двумя четными функциями $b_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)$ и $c_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)$ следующим образом

$$z_\alpha^{SCf}\left(t,\tau\right) = f_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)+tb_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)+\theta_\beta\cdot\tau c_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)\cdot F_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t\right), \tag{3.28}$$

$$\theta_\alpha^{SCf}\left(t,\tau\right) = \tau c_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)+\theta_\beta\cdot F_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t\right), \tag{3.29}$$

где $F_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t\right)=\sqrt{f'_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)+tb'_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)}$.

Четное условие согласованности (см. первую диаграмму в (3.21))

Примечание. Точнее, $(1|1)$-суперпространством параметров $\mathbb{P}^{(1|1)}$.

на тройных пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$ записывается в виде

$$z_\alpha^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma) = z_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma), \theta_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma)\right), \tag{3.30}$$

$$\theta_\alpha^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma) = \theta_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma), \theta_\beta^{SCf}(z_\gamma, \theta_\gamma)\right), \tag{3.31}$$

что в первом порядке по[*)] t, τ приводит к уравнениям (3.1) и (3.24) плюс дополнительное уравнение на функцию $c_{\alpha\beta}(z_\beta)$

$$c_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = c_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma)) + c_{\beta\gamma}(z_\gamma) \cdot \sqrt{f'_{\alpha\beta}(f_{\beta\gamma}(z_\gamma))}. \tag{3.32}$$

Тензорное умножение на $\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}$ в дополнение к (3.26) и использование (3.27) дает

$$c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + c_{\beta\gamma}\theta_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta} - c_{\alpha\gamma}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} = 0. \tag{3.33}$$

Уравнения (3.25) и (3.33) свидетельствуют о том, что чисто суперконформные деформации описываются двумя коциклами $\left\{b_{\alpha\beta}\dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}\right\}$ и $\left\{c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \dfrac{\partial}{\partial z_\alpha}\right\}$, которые при суперконформных репараметризациях

$$z_\alpha \overset{SCf}{\longmapsto} z_\alpha + ts_\alpha(z_\alpha) + \theta_\alpha \cdot \tau r_\alpha(z_\alpha) \cdot \sqrt{1 + ts'_\alpha(z_\alpha)}, \tag{3.34}$$

$$\theta_\alpha \overset{SCf}{\longmapsto} \tau r_\alpha(z_\alpha) + \theta_\alpha \cdot \sqrt{1 + ts'_\alpha(z_\alpha)}, \tag{3.35}$$

изменяются на когранцы (3.26) и

$$\left\{c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha}\right\} \longmapsto \left\{c_{\alpha\beta}\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} + r_\alpha\theta_\alpha \frac{\partial}{\partial z_\alpha} - r_\beta\theta_\beta \frac{\partial}{\partial z_\beta}\right\}, \tag{3.36}$$

Примечание. В (3.30)–(3.31) эти дополнительные аргументы опущены, но подразумеваются.

что определяет соответствующие когомологические классы [357, 511] и пространство супермодулей [566, 829].

Переформулируем теперь супердеформации таким образом, чтобы можно было учесть также и нечетные условия согласованности (3.17). Для этого воспользуемся альтернативной параметризацией (см. **Пункт 2.1.5**) и запишем редуцированные SCf и TPt преобразования на $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta$ в едином виде (см. (2.81))

$$z_\alpha = f_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\alpha \cdot \chi_{\alpha\beta}(z_\beta), \tag{3.37}$$

$$\theta_\alpha = \psi_{\alpha\beta}(z_\beta) + \theta_\alpha \cdot g_{\alpha\beta}(z_\beta), \tag{3.38}$$

где независимыми являются функции $g_{\alpha\beta}(z_\beta), \psi_{\alpha\beta}(z_\beta)$ (в отличие от стандартной параметризации функциями $f_{\alpha\beta}(z_\beta), \psi_{\alpha\beta}(z_\beta)$ [111, 566]), через которые выражаются отстальные по формулам

$$\mathsf{SCf} \;:\; \begin{cases} f^{SCf\,\prime}_{\alpha\beta}(z_\beta) = g^2_{\alpha\beta}(z_\beta) + \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \\ \chi^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta) = g_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \end{cases} \tag{3.39}$$

$$\mathsf{TPt} \;:\; \begin{cases} f^{TPt\,\prime}_{\alpha\beta}(z_\beta) = \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta), \\ \chi^{TPt\,\prime}_{\alpha\beta}(z_\beta) = g'_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi_{\alpha\beta}(z_\beta) - g_{\alpha\beta}(z_\beta) \cdot \psi'_{\alpha\beta}(z_\beta). \end{cases} \tag{3.40}$$

Отсюда следует, расщепленное SCf преобразование в альтернативной параметризации (3.27) имеет вид

$$\mathsf{SCf}_{split}\!: \begin{cases} z_\alpha = \int g^2_{\alpha\beta}(z_\beta)\, dz_\beta, \\ \theta_\alpha = \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}(z_\beta), \end{cases} \tag{3.41}$$

в то время как TPt аналогом (3.41) является вложение $2 \hookrightarrow 1$ [423], т. е.

$$\mathsf{TPt}_{\,split}\colon \begin{cases} z_\alpha = 0, \\ \theta_\alpha = \theta_\beta \cdot g_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right). \end{cases} \tag{3.42}$$

Теперь смешанные (в смысле **Определения 3.4**) как SCf, так и TPt деформации будут определяться теми же параметрами t, τ, но уже парой четных функций $p_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ (вместо $b_{\alpha\beta}, c_{\alpha\beta}$ в (3.28)–(3.29)) следующим образом

$$z_\alpha\left(t,\tau\right) = f_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t,\tau\right) + \theta_\beta \cdot \chi_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t,\tau\right), \tag{3.43}$$

$$\theta_\alpha\left(t,\tau\right) = \tau c_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right) + \theta_\beta \cdot \left(g_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right) + t p_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)\right), \tag{3.44}$$

т. е. вместо $f_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)$ изначально деформируется $g_{\alpha\beta}\left(z_\beta\right)$, а остальные функции $f_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t,\tau\right), \chi_{\alpha\beta}\left(z_\beta,t,\tau\right)$ находятся из соответствующих уравнений (2.81).

Теперь, с учетом (3.16)–(3.17) и диаграммы (3.21), наряду с четными (3.30)–(3.31) получаем нечетные условия согласованности для деформированных функций (дополнительные аргументы t, τ снова опущены)

$$z_\alpha^{TPt}\left(z_\gamma,\theta_\gamma\right) = z_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{TPt}\left(z_\gamma,\theta_\gamma\right), \theta_\beta^{TPt}\left(z_\gamma,\theta_\gamma\right)\right), \tag{3.45}$$

$$\theta_\alpha^{TPt}\left(z_\gamma,\theta_\gamma\right) = \theta_\alpha^{SCf}\left(z_\beta^{TPt}\left(z_\gamma,\theta_\gamma\right), \theta_\beta^{TPt}\left(z_\gamma,\theta_\gamma\right)\right). \tag{3.46}$$

Разложение этих уравнений по t, τ, аналогичное четному случаю (3.30)–(3.31), дает

$$g_{\alpha\gamma}^{TPt}\left(z_\gamma\right) = g_{\alpha\beta}^{SCf}\left(z_\beta\right) \cdot g_{\beta\gamma}^{TPt}\left(z_\gamma\right), \tag{3.47}$$

$$c^{TPt}_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = c^{SCf}_{\alpha\beta}\left(f^{TPt}_{\beta\gamma}(z_\gamma)\right) + g^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta)\cdot c^{TPt}_{\beta\gamma}(z_\gamma), \tag{3.48}$$

$$p^{TPt}_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = p^{SCf}_{\alpha\beta}\left(f^{TPt}_{\beta\gamma}(z_\gamma)\right)\cdot g^{TPt}_{\beta\gamma}(z_\gamma) + g^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta)\cdot p^{TPt}_{\beta\gamma}(z_\gamma). \tag{3.49}$$

Первое уравнение (3.47) является условием коцикличности для функций $g_{\alpha\beta}(z_\beta)$ и говорит о том, что эти функции реализуют соответствующий смешанный (несимметричный) аналог линейного расслоения над суперримановыми поверхностями [361, 365, 405]. Уравнение (3.48) аналогично уравнению (3.32), если учесть, что преобразование $z_\beta \to z_\alpha$ как для четного условия согласованности, так и для нечетного (3.45)–(3.46) является SCf преобразованием, в котором выполняется соотношение

$$g^{SCf\,2}_{\alpha\beta}(z_\beta) = f^{SCf\,\prime}_{\alpha\beta}(z_\beta) \tag{3.50}$$

(см. также (3.27) и (2.81)).

В четном случае (когда все три преобразования $z_\gamma \to z_\beta \to z_\alpha$ являются SCf преобразованиями) из уравнения (3.49) при $\epsilon\left[g^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta)\right] \neq 0$, если для всех трех преходов воспользоваться подстановкой

$$p^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta) = \frac{b^{SCf\,\prime}_{\alpha\beta}(z_\beta)}{2g^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta)}, \tag{3.51}$$

после интегрирования можно получить

$$b^{SCf}_{\alpha\gamma}(z_\gamma) = b^{SCf}_{\alpha\beta}\left(f^{SCf}_{\beta\gamma}(z_\gamma)\right) + g^{SCf}_{\alpha\beta}\left(f^{SCf}_{\beta\gamma}(z_\gamma)\right)\cdot b^{SCf}_{\beta\gamma}(z_\gamma), \tag{3.52}$$

что совпадает с (3.24) при учете (3.50).

Применяя полученные соотношения можно построить TPt-аналоги сперктральных последовательностей и соответствующих комплексов со сплетением четности по аналогии со стандартными SCf [269, 332, 511] (см. однако *Замечание* **2.62**).

З.3. Нечетные аналоги препятствий и смешанные θ-коциклы

Препятствия [214–218, 220] играют важную роль в пониманиии внутренней структуры супермногообразий [30, 221] и суперконформных многообразий [108, 832].

Стандартное препятствие [214, 220] можно вычислить как отклонение левой части соответствующей формулы согласованности (например, (З.25), (З.33)) от нуля [824]. Для функций $b_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ (З.25) и $c_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ (З.33) имеем

$$\hat{\mathsf{D}}_{\alpha\beta\gamma}(b) = b_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + b_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\beta} - b_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \tag{З.53}$$

$$\hat{\mathsf{D}}_{\alpha\beta\gamma}(c) = c_{\alpha\beta}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha} + c_{\beta\gamma}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial z_\beta} - c_{\alpha\gamma}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial z_\alpha}. \tag{З.54}$$

Например, в суперконформном случае для $b^{SCf}_{\alpha\beta}(z_\beta)$ (З.52) тогда получаем

$$\hat{\mathsf{D}}^{SCf}_{\alpha\beta\gamma}(b) = \left(g^{SCf\,2}_{\alpha\beta}(z_\alpha)\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} - 1\right)\cdot b^{SCf}_{\beta\gamma}(z_\alpha)\frac{\partial}{\partial z_\beta}. \tag{З.55}$$

Отсюда следует

Утверждение З.9. *Если преобразование $z_\beta \to z_\alpha$ является обратимым* SCf *преобразованием, то препятствие $\hat{\mathsf{D}}^{SCf}_{\alpha\beta\gamma}(b)$ равно нулю.*

Доказательство. Используем (З.50), тогда для выражения в скобках (З.55) имеем $g^{SCf\,2}_{\alpha\beta}(z_\alpha)\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} = f^{SCf\,\prime}_{\alpha\beta}(z_\beta)\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} = \frac{\partial z_\alpha}{\partial z_\beta}\frac{\partial z_\beta}{\partial z_\alpha} = 1$. ■

Рассмотрение редуцированных преобразований (SCf и TPt единым образом) в альтернативной параметризации приводит к возможности определения наряду с коциклами по четной переменной z (например,

(З.25) и (З.33)) также коциклов по нечетной переменной θ.

Определение З.10. *Назовем θ-коциклом конструкцию, аналогичную четному коциклу, в которой тензорное умножение производится на нечетное векторное поле $\partial/\partial\theta_\alpha$ вместо $\partial/\partial z_\alpha$.*

Рассмотрим условия согласованности, связанные с деформациями $c_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ и $p_{\alpha\beta}(z_\alpha)$ (З.48)–(З.49) в альтернативной параметризации, не конкретизируя вид редуцированного преобразования. Умножим тензорно уравнение (З.48) на $\partial/\partial\theta_\alpha$ и воспользуемся соотношением

$$\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} = g_{\alpha\beta}(z_\beta)\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \tag{З.56}$$

которое следует из вторых уравнений в (З.41)–(З.42), тогда получим

$$c_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = c_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + c_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}. \tag{З.57}$$

Утверждение З.11. $\left\{c_{\alpha\beta}\dfrac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\right\}$ *является θ-коциклом.*

Доказательство. Следует непосредственно из (З.57). ■

Аналогично, умножив (З.49) на $\theta_\alpha\partial/\partial\theta_\alpha$, получаем

$$p_{\alpha\gamma}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} = g_{\beta\gamma}\cdot p_{\alpha\beta}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + g_{\alpha\beta}\cdot p_{\beta\gamma}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}. \tag{З.58}$$

Замечание **З.12.** $\left\{p_{\alpha\beta}\theta_\alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\right\}$ не является θ-коциклом из-за подкручивающих множителей $g_{\beta\gamma}$ и $g_{\alpha\beta}$ в (З.58).

Для характеризации отличия набора функций на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha\cap\mathscr{U}_\beta\cap\mathscr{U}_\gamma$ от θ-коцикла, введем θ-аналог препятствий (З.53)–(З.54).

Определение З.13. *Назовем θ-препятствием степень незамкнуто-*

сти набора соответствующих функций (с нечетным векторным полем $\partial/\partial\theta_\alpha$) на пересечениях $\mathscr{U}_\alpha \cap \mathscr{U}_\beta \cap \mathscr{U}_\gamma$.

Тогда для $\left\{c_{\alpha\beta}\dfrac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\right\}$ и $\left\{p_{\alpha\beta}\theta_\alpha\dfrac{\partial}{\partial\theta_\alpha}\right\}$ имеем θ-препятствия

$$\hat{\mathbf{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(c) = c_{\alpha\beta}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + c_{\beta\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} - c_{\alpha\gamma}\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}, \tag{3.59}$$

$$\hat{\mathbf{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p) = p_{\alpha\beta}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha} + p_{\beta\gamma}\theta_\beta\frac{\partial}{\partial\theta_\beta} - p_{\alpha\gamma}\theta_\alpha\frac{\partial}{\partial\theta_\alpha}. \tag{3.60}$$

Утверждение 3.14. *θ-препятствие $\hat{\mathbf{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(c)$ равно нулю.*

Доказательство. Следует из **Утверждения 3.11** и (3.57). ■

Вычислим θ-препятствие $\hat{\mathbf{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p)$. Для этого воспользуемся (3.56) и получим

$$\hat{\mathbf{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p) = \left[p_{\alpha\beta}(z_\beta)\cdot(g_{\beta\gamma}(z_\gamma)-1) + p_{\beta\gamma}(z_\gamma)\cdot(g_{\alpha\beta}(z_\beta)-1)\right]\cdot\theta_\beta\frac{\partial}{\partial\theta_\beta}. \tag{3.61}$$

Тогда в силу произвольности $p_{\alpha\beta}(z_\beta)$ справедливо

Утверждение 3.15. *θ-препятствие $\hat{\mathbf{\Delta}}_{\alpha\beta\gamma}(p)$ обращается в нуль для преобразований, не меняющих нечетную координату, т. е. для которых выполняется $g_{\alpha\beta}(z_\beta) = 1$.*

Таким образом, введенные θ-препятствия и θ-коциклы являются дополнительными характеристиками полусупермногообразий, для которых функциями склейки служат редуцированные преобразования.