KL-TH 95/4

February 16, 1995

IDEAL STRUCTURE OF SUPERCONFORMAL SEMIGROUPS

Steven Duplij[1)2)3)]

Department of Physics, University of Kaiserslautern
D-67653 Kaiserslautern, Germany

Abstract

The role of the noninvertible transformations in superstring theories is discussed. A new parametrization of superconformal groups is found, which allows to construct their ideal extensions · superconformal semigroups. The latter consists of a group containing the standard superconformal transformations, and of an ideal, the abstract structure of which is analyzed in detail. Also a general classification is done by means of various indeces of nilpotency. The ideal series is built, new generalized "vector" and "tensor" Green's relations and several quasicharacters are defined. The necessity of similar constructions in other supersymmetric and superquantum models is stressed.

PACS numbers: 02.20.Mp; 11.30.Pb

---

[1] Alexander von Humboldt Fellow

[2] E-mail: duplij@physik.uni-kl.de

[3] On leave of absence from *Nuclear Physics Laboratory, Kharkov State University, Kharkov 310077, Ukraine*

KL-TH 95/4

16 февраля 1995

ИДЕАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ СУПЕРКОНФОРМНЫХ ПОЛУГРУПП

С. А. Дуплий[1)2)3)]

Германия, университет Кайзерслаутерна

Аннотация

Обсуждается роль необратимых преобразований в суперструнных теориях. Приведена новая параметризация суперконформных групп, позволяющая адекватно сконструировать их идеальное расширение — суперконформные полугруппы. Последние состоят из групповой части, содержащей стандартные суперконформные преобразования и идеальной части, абстрактная структура которой детально проанализирована, и произведена классификация всех элементов с помощью различных индексов нильпотентности. Построен идеальный ряд, определены обобщенные "векторные" и "тензорные" отношения Грина, введено несколько типов квазихарактеров, отделяющих элементы суперконформной полугруппы. Отмечается необходимость подобного рода построений в других суперсимметричных и суперквантовых моделях.

PACS numbers: 02.20.Mp; 11.30.Pb

[1]При поддержке фонда Александра фон Гумбольдта

[2]E-mail: duplij@physik.uni-kl.de

[3]Постоянный адрес: *Украина, 310077, г. Харьков, Харьковский государственный университет, лаборатория ядерной физики*

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени открытия суперсимметрии [1] прошло уже более двадцати лет, однако до сих пор ее влияние на абстрактно-алгебраическую структуру физической теории в большей мере было чисто символическим. Основные конструкции теории после почти очевидных модификаций наделялись приставкой "супер", и далее построение уже суперсимметричной теории , за исключением некоторых незначительных моментов, шаг за шагом копировалось с соответствующего несуперсимметричного варианта, который одновременно обязан был быть в определенном смысле ее гладким пределом. Несмотря на успехи в построении свободной от расходимостей теории поля и суперструнных объединенных теорий [2], в рамках такого подхода суперсимметрия сама по себе не приводила к существенным изменениям или обобщениям теории в абстрактно-алгебраическом смысле. В частности, концепция суперпространства, позволявшая единым образом описать бозонный и фермионный секторы теории, была основана на введении дополнительных нильпотентных координат и использовании их наравне с обычными координатами [3]. При этом, однако, либо полностью игнорировался, либо некоторым образом обходился тот факт, что среди объектов теории появлялись необратимые, а также делители нуля. Поэтому многие функции и отображения тоже оказывались необратимыми, но из-за этого, как это ни парадоксально с математической точки зрения, и исключались из рассмотрения при построении и анализе соответствующих супергрупп [4]. На самом деле, совокупность всех преобразований некоторого множества или всех отображений некоторого топологического пространства, сохраняющих определенную структуру, образуют (без ограничения на обратимость) именно полугруппу относительно композиции [5]. Более того, "очевидна невозможность ограничиваться изучением лишь обратимых преобразований" ([5], Ляпин, стр. 40).

Отсюда можно сделать вывод о том, что последовательным с абстрактно-алгебраической точки зрения шагом должен быть совместный переход от пространства к суперпространству и от групп преобразований [6] к соответствующим *суперполугруппам*, то есть "супер"-обобщение физической теории обязано сопровождаться "полу"-обобщением ее математического аппарата в целом. В глобальном смысле суперсимметричная теория должна иметь полугрупповую структуру, в то время, как непосредственно наблюдаемый сектор при современных энергиях может удовлетворительно описываться ее групповой частью. Тем не менее, не следует ограничиваться изучением лишь последней, поскольку ее свойства тесно связаны со свойствами остальной (идеальной) части соответствующих полугрупп [5] (о математической аргументации ответов на вопрос "зачем изучать полугруппы?" см. обзор [7]).

Предлагаемый анзац был применен ранее к ненаблюдаемой локальной N=1 суперконформной симметрии мирового листа в суперструнных теориях [2], для которой была определена N=1 суперконформная полугруппа [8] (ее N=2 и N=4 расширения рассматривались в [9]). В данной работе проводится дальнейшее исследование свойств N=1 суперконформной полугруппы, связанных, в основном, со структурой ее идеальной части.

2. ПОЛУГРУППЫ

Напомним, что полугруппой [5] называется множество S с одной бинарной ассоциативной операцией: $\forall s,t \in S \Rightarrow s*t \in S$, $s*(t*u)=(s*t)*u$. Подмножество $T \subset S$ называется подполугруппой полугруппы S , если $\forall s,t \in T \Rightarrow s*t \subset T$. Отсутствие аксиомы обратимости для каждого элемента приводит к более сложному абстрактному строению полугруппы по сравнению с группой, а именно, к появлению в ее структуре идеальной части I которая по своим свойствам противоположна групповой части G , состоящей из обратимых элементов.

Важным классом полугрупп, к которому принадлежат и рассматриваемые ниже, является класс *полугрупп с отделяющейся групповой частью*: $S=G \cup I$, $G \cap I = \emptyset$ и обладающие *единицей* $e \in G$, $\forall s \in S$, $e*s=s*e=s$.

Пусть свойства групповой части G некоторой полугруппы S уже известны. Тогда дальнейшее исследование этой полугруппы фактически сводится к изучению свойств ее идеальной части. Последняя состоит из *левых* (L), *правых* (R) и (*двухсторонних*) (I) *идеалов*, определяемых соотношениями $S*L \subseteq L$, $R*S \subseteq R$, $S*I*S \subseteq I$ (умножение множеств определяется стандартным образом: $A*B := \{\bigcup a*b \mid a \in A, b \in B\}$), то есть идеальная часть как-бы поглощает в себя элементы полугруппы. Что касается групповой части, то она обладает всеми свойствами *фильтра* F , который, наоборот, выделяет из полугруппы элементы, принадлежащие только ему. Изолированный идеал и фильтр (или выпуклая подполугруппа) могут быть определены также и дуальным образом

$$\forall s,t \in S, \quad s*t=I \Rightarrow s \in I \vee t \in I, \qquad (2.1)$$

$$\forall s,t\in S,\ s*t\in F\Rightarrow s\in F\wedge t\in F. \qquad (2.2)$$

Отсюда следует, что $F\cup I=S$ или $F=S$. Очевидно, что *левый* z_L (*правый* z_R, *двухсторонний* z) *нуль* полугруппы S, определяемый $\forall s\in S,\ z_L*s=z$ ($s*z_R=z$, $s*z=z*s=z$), содержится в левом (правом, двухстороннем) идеале. Далее, идеал I_0 называется *минимальным*, если $\forall I\subset S,\ I\subseteq I_0 \Rightarrow I=I_0$. При этом $I\cap I\neq\emptyset$ и $I\cap I_0\subseteq I_0\Rightarrow I\cap I_0=I_0 \Rightarrow I_0\subseteq I$, поэтому I_0 - наименьший и единственный идеал (*ядро Сушкевича* [5]). В полугруппе с нулем минимальный отличный от нуля идеал $I_0\neq z$ называется *0-минимальным*, что означает $\forall I\subseteq I_0\wedge I\neq z\Rightarrow I=I_0$. Полугруппа S, имеющая только два идеала S и z, называется *0-простой*, и для нее выполняется $S*s*S=S,\ \forall s\in S$ (свойства 0-простых полугрупп детально изучены в [10]). Если определить отношение эквивалентности ρ формулой [5] $s\overset{\rho}{\sim}t\Leftrightarrow s=t\vee(s\in I\wedge t\in I)$, то классами эквивалентности полугруппы S по $\mathrm{mod}\,\rho$ будут одноэлементные множества $\{s\},\ s\in S\setminus I$, и сам идеал I. Тогда *фактор-полугруппу Риса* S/I можно трактовать как результат сжатия идеала I в нуль, и другие элементы при этом не затрагиваются. Особую роль в дальнейшем рассмотрении будут играть *нильэлементы* полугруппы S, удовлетворяющие при некотором натуральном $n\in\mathbb{N}$ соотношению $s^n=z$. *Индекс* нильэлемента $\mathrm{ind}\,s$ определяется формулой

$$\mathrm{ind}\,s:=\left\{n\in\mathbb{N}\mid s^n=z,\ s^{n-1}\neq z\right\}. \qquad (2.3)$$

Нильэлементы индекса $n>1$ являются *делителями нуля*: $\forall s\in S,\ \mathrm{ind}\,s>1\Rightarrow\exists t\in S,\ s*t=z\vee t*s=z$ (см. [11]).

В общем случае *левые, правые* и (*двухсторонние*) *аннуляторы* подмножества $Y \subset S$ в полугруппе S с нулем z определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathrm{Ann}_L Y &:= \{ s \in S \mid s * Y = z \}, \\ \mathrm{Ann}_R Y &:= \{ s \in S \mid Y * s = z \}, \\ \mathrm{Ann}\, Y &:= \mathrm{Ann}_L Y \cap \mathrm{Ann}_R Y . \end{aligned} \tag{2.4}$$

Нетривиальный аннулятор обязан содержать ненулевые элементы. Аналогичные определения имеют место и для элементов полугруппы. Очевидно, что левый (правый) аннулятор левого (правого) идеала является двухсторонним идеалом (свойства аннуляторов в различных типах полугрупп рассматривались в [12]). Полугруппа (идеал), состоящая только из нильэлементов, называется *нильполугруппой* (*нильидеалом*) [13], с другой стороны *нильпотентная полугруппа* удовлетворяет равенству $S^n = \{z\}$. Примеры построения и исследования абстрактных свойств нильполугрупп можно найти в работах [14].

Для полугруппы S с единицей *главные левый, правый* и (*двухсторонний*) *идеалы*, порожденные элементом s, определяются формулами

$$\begin{aligned} L(s) &= S * s, \\ R(s) &= s * S, \\ J(s) &= S * s * S . \end{aligned} \tag{2.5}$$

Соответствующие бинарные отношения (*отношения Грина* [5])

$$\begin{aligned} s \mathcal{L} t &\Leftrightarrow L(s) = L(t) \Leftrightarrow \exists u, v \in S,\ u * s = t,\ v * t = s, \\ s \mathcal{R} t &\Leftrightarrow R(s) = R(t) \Leftrightarrow \exists u, v \in S,\ s * u = t,\ t * u = s, \end{aligned} \tag{2.6}$$

$$s\mathcal{J}t \Leftrightarrow J(s)=J(t) \Leftrightarrow \exists u,v,x,y\in\mathcal{S},$$
$$u*s*v=t\ ,\quad x*t*y=s,$$

разбивают полугруппу $\mathcal{S}$ на $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ *-классы:*

$$L_s := \{t\in\mathcal{S} \mid L(s)=L(t)\},$$
$$R_s := \{t\in\mathcal{S} \mid R(s)=R(t)\}, \tag{2.7}$$
$$J_s := \{t\in\mathcal{S} \mid J(s)=J(t)\}.$$

Необходимые в дальнейшем *отношения частичного порядка* на $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$, $\mathcal{J}$ -классах определяются следующим образом

$$L_s \leqslant L_t \Leftrightarrow L(s)\subseteq L(t),$$
$$R_s \leqslant R_t \Leftrightarrow R(s)\subseteq R(t), \tag{2.8}$$
$$J_s \leqslant J_t \Leftrightarrow J(s)\subseteq J(t).$$

Частично-упорядоченное множество $\mathcal{S}/\mathcal{J}$ называется *остовом* полугруппы и направлено вниз, и наоборот, любое частично-упорядоченное множество изоморофно остову подходящей комбинаторной конечной полугруппы [15]. Направленное вниз частично - упорядоченное конечное множество содержит наименьший элемент и изоморфно комбинаторной инверсной полугруппе [16]. Описание полугрупп в терминах остова и локального строения $\mathcal{J}$ -классов представляет собой необходимую и фундаментальную задачу (см. [17]).

Пусть X - некоторое множество, тогда преобразования $\alpha : X\to X$ образуют полугруппу $\mathcal{T}(X)$ относительно суперпозиции $(\alpha\ \beta)x = \alpha(\beta\ x)$ и ассоциативность этой операции очевидна (операнд преобразования будем писать слева от элемента, согласно [18]). Полугруппы преобразований дискретного множества X играют важную роль в теории автоматов и языков [19]. С другой стороны всякая полугруппа изоморфна некоторой полугруппе преобразований [20], и наоборот, "всякое мультипликативное множество преобразований является полугруппой" ([5],Ляпин,стр. 34), то есть любая полугруппа изоморфно представима преобразованиями, что является полугрупповым аналогом теоремы Кэли [21].

Если же X - топологическое пространство, то $\alpha : X \to X$ образуют полугруппу $\mathcal{S}(X)$ всех непрерывных отображений на [22]. Тогда элементы абстрактной полугруппы $\mathbf{S}$ индексируются отображениями $\mathcal{S}(X)$ с помощью гомоморфизма $\varphi : \mathcal{S}(X) \to \mathbf{S}$, причем тождественному отображению соответствует единица полугруппы $\mathbf{S}$, следовательно задается *представление* полугруппы $\mathbf{S}$ непрерывными отображениями из $\mathcal{S}(X)$. Обычно [22], в качестве X выбирается регулярно отделимое топологическое пространство, то есть имеющее замкнутую базу, каждое из множеств которой является прообразом точки при непрерывном преобразовании X, причем в некоторых случаях использование полугрупп непрерывных функций позволяет ослабить свойства отделимости [23]. Основным и существенным вопросом при этом является вопрос о том, в какой мере топологическая структура пространства определяется алгебраической структурой полугруппы [24], в то время, как обратная зависимость зачастую очевидна. Например, дискретность пространства X равносильна тому, что полугруппа частичных функций на X становится решеткой [25].

Важное место среди полугрупп преобразований занимают в последующем контексте *полугруппы эндоморфизмов* $\mathrm{End}\, X \subseteq \mathcal{T}(X)$, сохраняющие некоторую структуру на X [26] и, особенно, полугруппы сингулярных эндоморфизмов [27]. В качестве примера $\mathrm{End}\, X$ можно привести полугруппу $\mathrm{End}_F V$ линейных операторов векторного пространства V над телом F [28]. Отметим, что полугруппы аналитических эндоморфизмов римановых поверхностей и их алгебраическая структура тесно связаны с конформным типом поверхности [29], а группа диффеоморфизмов окружности может быть продолжена по голоморфности до полугруппы [30]. Многие структуры в некотором смысле определяются своими полугруппами эндоморфизмов, что означает $\mathrm{End}\,X \cong \mathrm{End}\,Y \Rightarrow X \cong Y$. Если X -топологическая структура, согласованность преобразования с этой структурой состоит в свойстве непрерывности преобразования. Детальное изложение свойств топологических полугрупп можно найти в [31].

3. СУПЕРПРОСТРАНСТВО

Существует два математических подхода к супергеометрии: формальный алгебро-геометрический подход [32], состоящий в расширении пучка вещественных функций на действительном многообразии до пучка $\mathbb{Z}_2$-градуированных коммутативных алгебр, и более наглядный локальный подход [33-35], модифицирующий внутреннюю структуру самого многообразия (следуя [36], будем называть их алгебраический и функциональный подходы соответственно). Проблема выбора между ними в физических приложениях [37] решается в каждом конкретном случае по своему, хотя, по крайней мере, с аксиоматической точки зрения [38] эти подходы тесно взаимосвязаны. Однако, имеются и принципиальные отличия, главное из которых заключается в том, что нечетные образующие алгебраического подхода не являются координатами в обычном смысле, поскольку не существет глобальных трансляций в нечетном секторе, а разложение функций по нечетным образующим представляет собой ее разложение по базису области значений, а не просто в ряд Тэйлора, как в функциональном подходе; сами же функции определены на области действительных или комплексных чисел, и задание нечетных образующих лишь уточняет, по какой именно системе образующих производится разложение. Возникают и другие трудности [39] и проблемы (список их см. в [40]). Несмотря на математическую строгость, последовательность и абстрактность алгебраического подхода, внутреняя топологическая структура суперпространства в рамках его описания оказывается тривиальной, особенно в случае конечного числа нечетных образующих (см. подробное обсуждение в [36,38,39]). В этом смысле более красивым и подходящим для применения к физическим моделям, как нам кажется, является функциональный подход, который позволяет непосредственным образом обобщить аппарат дифференциальной [41] и интегральной [42] геометрии и, кроме того, допускает существование нетривиальной топологии как в четных, так и в нечетных направлениях [43], что само по себе представляет большой интерес.

Кратко напомним основные определения функционального подхода [33-36]. Пусть Λ - ассоциативная коммутативная супералгебра на полем $\mathbb{K}$ (чаще всего $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ или $\mathbb{K}=\mathbb{C}$), которая одновременно является $\mathbb{Z}_2$-градуированным векторным пространством, то есть задано его разложение на прямую сумму векторных подпространств $\Lambda=\Lambda_0\oplus\Lambda_1$ такое, что $\forall a,b\in\Lambda$, $|a\cdot b|=|a|+|b|$ и $a\cdot b=(-1)^{|a||b|}b\cdot a$, где $|a|$ -четность элемента a, определяемая соотношением $|a|=k\Leftrightarrow a\in\Lambda_k$ (элементы с $|a|=0$ называются *четными*, а элементы с $a=1$ - *нечетными*). Если супералгебра Λ нормирована, то обычно требуется, чтобы четный Λ_0 и нечетный Λ_1 секторы были замкнуты в ней. Если норма удовлетворяет условиям (псевдонормирования) $\|ab\| \le \|a\| \cdot \|b\|$ и (унитальности) $\|e\| = 1$, то называется *банаховой* (коммутативной) супералгеброй. В частности, если $\Lambda = \Lambda(N)$ -алгебра Грассмана с N антикоммутирующими образующими $\xi_i \xi_j = -\xi_j \xi_i$, $\xi_i^2 = 0$, $i, j \in N$, то ℓ_1- *норма* элемента $a = \sum_k c_k \xi_k$ определяется $\|a\| := \sum_k |c_k|$. Можно рассматривать не только банаховы, но и псевдотопологические супералгебры [44], в которых наиболее корректно определены действие и амплитуды теории суперструн [2]. *Псевдотопологией* называется отображение множества X на множество X_F его фильтров $F(X)$ (2.2) $\pi : X \to X_F$, удовлетворяющее таким условиям: 1) фильтр $F(X)$, состоящий из всех подмножеств, содержащих x , принадлежит $\pi(x)$; 2) $\forall x \in X, \pi_1 \in \pi(x) \wedge \pi_2 \in \pi(x) \Rightarrow \pi_1 \cap \pi_2 \in \pi(x)$; 3) $\forall x \in X, \pi \in \pi(x) \wedge \varphi \in F(X) \wedge \pi \subset \varphi \Rightarrow \varphi \in \pi(x)$. Далее, пусть четная часть коммутативной супералгебры над полем $\mathbb{K}$ разлагается на прямую сумму $\Lambda_0 = \mathbb{K} \oplus \mathbb{G}$, где $\mathbb{G}$- подалгебра "четных духов" [44], и $\mathbb{G}_K := \{ g \in \mathbb{G} | \operatorname{ind} g = K \}$, $\mathcal{N} := \bigcup_{K=2} \mathbb{G}_K$ с очевидными свойствами $G_n + G_K = G_{n+K}$ $\mathbb{G}_n \cdot \mathbb{G}_K \in \mathbb{G}_\ell$, $\ell = \min(n, K)$.

Тогда псевдотопология $\pi_N(x)$ в алгебре $\mathcal{N}$ определяется $\pi \in \pi_N(x) \Leftrightarrow \pi \in \pi_G(x) \wedge \exists K, \pi \in \mathbb{G}_K$, где $\pi_G(x)$ - псевдотопология в $\mathbb{G}$. Из этого следует, что алгебра $\mathcal{N}$ является псевдотопологической алгеброй, из которой можно построить псевдотопологическую коммутативную супералгебру $\Lambda^\pi := \Lambda_0^\pi \oplus \Lambda_1^\pi$ где $\Lambda_0^\pi = \mathbb{K} \oplus \mathcal{N}$, $\Lambda_1^\pi = \Lambda_1$. Необходимость такого рода построений была продиктована, прежде всего, требованием однозначности в определении производной, что приводило к жесткому условию на супералгебру $\operatorname{Ann} \Lambda_1 = 0$ (см. [36], где были изучены свойства таких *супералгебр с тривиальным аннулятором* и показано, что они должны быть бесконечномерными). В частности, псевдотопологическая супералгебра удовлетворяет этому условию по построению и, кроме того, содержит только нильпотентные четные духи. Однако, из тривиальности аннулятора $\mathrm{Ann}\,\Lambda_1$ вовсе не следует тривиальность аннулятора $\mathrm{Ann}\,U$, где $U\subset\Lambda_1$ или, тем более, $U\subset\Lambda_0$, и этот факт будет использован в дальнейшем. Предполагается также, что супералгебра Λ должна быть эффективной, что означает $\forall a\in\Lambda, \exists b\in\Lambda_1,\ ab\neq 0$. Несмотря на то, что с физической точки зрения выбор коммутативной супералгебры считается произвольным [35, 36] (лишь бы выполнялись основные аксиомы теории), нечетным образующим можно придать и определенный топологический смысл в рамках некоего внутреннего пространства [45].

В функциональном подходе *суперпространство* (над полем $\mathbb{R}$) размерности (n,m) определяется как прямое произведение n экземпляров четной части Λ_0 и m экземпляров ее нечетной части Λ_1: $\mathbb{R}^{n,m}:=\Lambda_0^n\otimes\Lambda_1^m$. В частности, $\mathbb{R}^{1,1}$ можно отождествить с Λ, а $\mathbb{R}^{n,n}$ - с Λ^n [35, 36]. Комплесификация действительного суперпространства $\mathbb{R}^{n,m}$ проводится стандартным способом, и возникающие проблемы с сопряжением в нечетном секторе требуют последовательного решения с правильным учетом эрмитовости [46]. В качестве координат в суперпространстве $\mathbb{R}^{n,m}$ выступают элементы $X:=(x_1\dots x_n)\in\Lambda_0^n$ и $\theta:=(\theta_1\dots\theta_m)\in\Lambda_1^m$. С другой стороны, $\mathbb{R}^{n,m}$ гомеоморфно действительному векторному пространству размерности $2^{N-1}(n+m)$, где N - число образующих коммутативной супералгебры Λ (в таком аспекте суперпространство $\mathbb{R}^{n,m}$ детально изучалось в [47]). Важной особенностью функционального подхода является наличие у четных координат "духовых" добавок x_{soul} к числовым значениям x_{body}, пропорциональных произведению четного количества образующих супералгебры,

$$X = X_{body} + X_{soul}\,,\qquad \theta = \theta_{soul}\,, \tag{3.1}$$

где

$$X_{soul} := \sum_{k} c_{i_1 \dots i_{2k}} \cdot \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{2k}}\,,$$

$$\theta_{soul} := \sum_{k} c_{i_1 \dots i_{2k+1}} \xi_{i_1} \dots \xi_{i_{2k+1}}\,.$$

Стандартные коммутационные соотношения между ними (индексы учтены) $x_i \cdot x_j = x_j \cdot x_i \in \Lambda_0$, $x_i \cdot \theta_j = \theta_j \cdot x_i \in \Lambda_1$, $\theta_i \cdot \theta_j = -\theta_j \cdot \theta_i \in \Lambda_0$ говорят о том, что множество четных координат является подалгеброй в Λ_0, а множество нечетных координат такой подалгеброй не является. Из (3.1) следует, что супераналитические функции на $\mathbb{R}^{n,m}$ удобно представлять в виде рядов по X_{soul} и θ_{soul}, которые, очевидно, обрываются при конечном N. Отображение $\sigma: \mathbb{R}^{n,m} \to \mathbb{R}^{n}$, которое получается при отбрасывании духовых частей, называется *канонической* [32] или *естественной* [34] *проекцией* (*body-map* [33]). При этом $\sigma[X] = X_{body}$, $\sigma[\theta] = 0$. По отображению σ можно построить отношение эквивалентности $x \overset{\sigma}{\sim} y \in \mathbb{R}^{n,m}$, которое играет важную роль в выделении действительного пространства $\mathbb{R}^{n}$ из суперпространства $\mathbb{R}^{n,m}$ при решении проблемы придания физического смысла суперполевым моделям [48].

Введем также полезное в дальнейшем отображение η по формуле

$$\eta[x] = 1 \iff \sigma[x] \neq 0\,,$$
$$\eta[x] = 0 \iff \sigma[x] = 0\,,\ x \in \mathbb{R}^{n,m}. \tag{3.2}$$

Поскольку величина $\left| \eta[xy] - \eta[x] - \eta[y] \right|$ отлична от нуля и ограничена единицей, отображение η является *квазихарактером* [49], который, исходя из его определения, естественно назвать *нильь-квазихарактером.*

Множество $\sigma^{-1}[\sigma[x]]$ называется *духовым подпространством* [34], и при взаимно-однозначных преобразованиях пространства $\mathbb{R}^{n,m}$ такие множества переходят в себя. При конечном числе образующих супералгебры Λ топология суперпространства $\mathbb{R}^{n,m}$ представляет собой топологию обычного векторного пространства [33,36,39]. Более того, существование в этом случае нетривиального аннулятора, равного, очевидно, $c\,\xi_1 \cdot \ldots \cdot \xi_N$ $c \in \mathbb{R}^n$, и другие трудности требовали более нестандартных определений суперпространств [51]. Поэтому в рамках функционального подхода со времени его существования предел $N \to \infty$ считался естественным [52]. Тщательный анализ условий обратимости в банахавых супералгебрах [53] над произвольным полем $\mathbb{K}$ показал, что и в бесконечномерном случае обратимыми являются элементы, имеющие ненулевую числовую часть $\sigma[x] \neq 0$. При этом утверждение о нильпотентности духового элемента (с $\sigma[x] = 0$) в конечномерном случае заменяется при $N \to \infty$ на утверждение о его квазинильпотентности, и равенстве нулю его спектрального радиуса (см. подробнее [54], где, также, приведен пример квазинильпотентного элемента в Λ_∞, который не является нильпотентным). С помощью методов нестандартного анализа было показано [55], что при $N \to \infty$ суперпространство обращается в бесконечномерное и в четном, и в нечетном секторах. Подробно многомерные пространства с антикоммутирующими грассмановыми координатами рассматривались в [56]. Уместно здесь напомнить красивое предположение о том, что "фермионные степени свободы являются первичными по отношению к бозонным" и "четная геометрия = коллективный эффект в нечетной геометрии" [57].

Отображение суперпространства $\mathbb{R}^{n,m}$ в себя $(X, \theta) \to$

$(\widetilde{X},\widetilde{\theta})$ обычно описывается в терминах супергладких функций [33-36]. В этом случае роль якобиана перехода играет березиниан $\mathrm{Ber} := \mathrm{Ber}(\widetilde{X},\widetilde{\theta}/X,\theta)$ [58]. Если $\sigma[\mathrm{Ber}]\neq 0$, то множество таких отображений образует группу автоморфизмов (локальных диффеоморфизмов). В суперанализе, однако, может иметь место и промежуточный случай, когда березиниан отличен от нуля, но чисто духовый, то есть $\sigma[\mathrm{Ber}]=0$. Поэтому, если принять во внимание и такие отображения, то можно построить полугруппу эндоморфизмов суперпространства $\mathbb{R}^{n,m}$. Групповая часть ее будет содержать преобразования с $\sigma[\mathrm{Ber}]\neq 0$, а идеальная часть - с $\sigma[\mathrm{Ber}]=0$. Частный случай такой полугруппы, суперконформной полугруппы, был рассмотрен в [8], структура идеальной части которой изучается ниже. Отметим, что на функториальном языке [32] суперпространство определяется как функтор в категории грассмановых алгебр, в которой морфизмами являются обратимые (и необратимые в случае обобщений, приведенных ниже), принимающий значения в категории теории множеств. Тогда суперполугруппа может быть определена как функтор в категории грассмановых алгебр, принимающий значения в категории полугрупп (обзор см. в [59]). Аналогично модифицируется и понятие супермногообразия. Так, *супермногообразие* $M^{n,m}$ размерности (n,m) определяется как суперпространство с упорядоченными парами (атласом) $\{O_A,\varphi_A\}$, где O_A открытая суперобласть в $\mathbb{R}^{n,m}$ и $\varphi_A: O_A\to\mathbb{R}^{n,m}$, причем объединение $\bigcup_A O_A = M^{n,m}$, и на непустых пересечениях $O_A\cap O_B\neq\emptyset$ функции перехода $\varphi_A\circ\varphi_B^{-1}$ супергладкие [32] и сохраняют $\mathbb{Z}_2$ - градуировку. Если определить открытую область в $\mathbb{R}^{n,m}$ как $\sigma^{-1}[O_{body}]$, где O_{body} - открытая область в $\mathbb{R}^n$, то полученная топология оказывается грубой [34], а супермногообразие – проективно хаусдорфовым, а не хаусдорфовым, поэтому в нечетных направлениях его топология оказыватся тривиальной в отличие от [33,52], где топология определяется ℓ_1-нормой коэффициентов базиса коммутативной супералгебры. Отметим, что построение супергеометрии и, в частности, рассмотрение супермнообразий возможно и без использования понятий топологического пространства, а лишь в терминах соответствующих березинианов и подстановочных структур [60], что в большой степени представляется удобным для полугрупповых обобщений.

Будем придерживаться общепринятого подхода и добавим к стандартному супермногообразию $M^{n,m}$ [33] карты $\{\widetilde{O}_C, \widetilde{\varphi}_C\}$, где $\widetilde{\varphi}_C$ - необратимые отображения $\widetilde{\varphi}_C : \widetilde{O}_C \to \mathbb{R}^{n,m}$. Тогда на пересечении $O_A \cap \widetilde{O}_C \neq \emptyset$ могут существовать только необратимые функции перехода $\widetilde{\varphi}_C \circ \varphi_A^{-1}$ с чисто духовым березинианом, то есть для них $\sigma[\mathrm{Ber}] = 0$. Назовем такую конструкцию *полусупермногообразием*, тогда набор карт $\{\widetilde{O}_C, \widetilde{\varphi}_C\}$ будет, очевидно, *идеалом полусупермногообразия*. Важно отметить, что если для обычных многообразий имеется два типа ориентируемости (в соответствии с поведением знака якобианов перехода) [61], и для супермногообразий таких типов ориентируемости пять [62], то идеал полусупермногообразия обладает шестым типом односторонней ориентируемости, когда соответствующее произведение детерминантов хотя и отлично от нуля, но не является ни положительным, ни отрицательным числом, а представляет собой чисто духовую величину. Тогда, в общем случае, полугруппы эндоморфизмов суперпространства $\mathbb{R}^{n,m}$ задают соответствующие (полугрупповые) полусупермногообразия (аналогично групповым многообразиям) в суперпространстве $(n^2+m^2, 2nm)$ измерений.

4. СУПЕРАНАЛИТИЧЕСКАЯ ПОЛУГРУППА

Рассмотрим комплексное суперпространство $\mathbb{C}^{1,1}$, которое является основным объектом суперполевого рассмотрения мирового листа в формализме функционального интегрирования теории фермионных струн [63-64]. Локально $\mathbb{C}^{1,1}$ описывается набором $Z := (z, \theta)$, где z и θ - четная и нечетная комплексные координаты. Исходя из требований голоморфности и аналитичности по нечетной координате, преобразование $\mathbb{C}^{1,1} \to \mathbb{C}^{1,1}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \tilde{z} &= f(z) + \theta \chi(z), \\ \tilde{\theta} &= \psi(z) + \theta g(z), \end{aligned} \qquad (4.1)$$

где компонентные функции, которые хотя могут быть необратимыми, удовлетворяют условиям супергладкости, обобщающим понятие C^{∞} на категорию супермногообразий [33-36]. Здесь и далее латинскими буквами обозначены четные функции $\mathbb{C}^{1,0} \to \mathbb{C}^{1,0}$, а греческими - нечетные $\mathbb{C}^{1,0} \to \mathbb{C}^{0,1}$. Множество как обратимых, так и необратимых преобразований $\widehat{\mathcal{S}}$ образую полугруппу относительно композиции (ассоциативность выполняется), которая называется *полугруппой суперэналитических преобразований* $\mathbf{T}$. Все преобразования, рассматриваемые ниже, образуют различные ее подполугруппы, причем множество обратимых преобразований является подгруппой, а множество необратимых - идеалом полугруппы суперэналитических преобразований $\mathbf{T}$. Тогда элемент $\mathbf{s}$ *суперэналитической полугруппы* $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ может быть параметризован четверкой функций из (4.1) $\mathbf{s}\begin{Bmatrix} f & \chi \\ \psi & g \end{Bmatrix} \in \boldsymbol{\mathcal{S}}$, а действие в ней имеет вид

$$\mathbf{s}\begin{Bmatrix} f_1 & \chi_1 \\ \psi_1 & g_1 \end{Bmatrix} * \mathbf{s}\begin{Bmatrix} f_2 & \chi_2 \\ \psi_2 & g_2 \end{Bmatrix} \qquad (4.2)$$

$$=\mathbf{S}\begin{Bmatrix} f_1\circ f_2+\chi_1\circ f_2\cdot\psi_2 & f_1'\circ f_2\cdot\chi_2+\chi_1\circ f_2\cdot\chi_2\cdot\psi_2 \\ \psi_1\circ f_2+g_1\circ f_2\cdot\psi_2 & \psi_1'\circ f_2\cdot\chi_2+g_1\circ f_2\cdot\chi_2\cdot\psi_2 \end{Bmatrix}.$$

Точкой будем обозначать умножение в грассмановой алгебре (при необходимости). Знак " $\circ$ " соответствует суперпозиции функций

$$f\circ g := f\,(g(z)). \tag{4.3}$$

Существенным свойством определенной таким образом супераналитической полугруппы является то, что она не принадлежит ни к классу мультипликативных полугрупп [65], ни к классу полугрупп непрерывных функций [22], хотя ее операция (4.2) содержит в себе как обычное умножение, так и суперпозицию функций (4.3). Наличие двух умножений серьезным образом усложняет анализ абстрактных свойств как супераналитической, так и рассматриваемой ниже суперконформной полугрупп. Отметим, что имеется естественный гомоморфизм введенной супераналитической полугруппы $\mathbf{S}$ на полугруппу $\mathbf{T}$ супераналитических преобразований $\varphi: \mathbf{S}\to\mathbf{T}$, ядро которого определяется формулой $\ker\varphi = \mathbf{S}\begin{Bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1\end{Bmatrix}$, где правая часть совпадает, очевидно, с двухсторонней единицей супераналитической полугруппы, двухсторонним нулем которой является просто нулевая матрица. Здесь существенно сказывается отличие супераналитической полугруппы от полугрупп непрерывных функций [22], для которых левым нулем, как легко видеть из закона умножения (4.3), всегда являются константные отображения $f_0(z): z\to f_0$. Пусть аналитичность по нечетной переменной имеет место, то есть выполняется разложение (4.1), а компонентные функции для некоторого элемента $\mathbf{S}_0\in\mathbf{S}$ - суть константные отображения (образ снабжен нулевым индексом). Тогда из закона умножения

$$\mathbf{S}\begin{Bmatrix} f_0 & \chi_0 \\ \psi_0 & g_0 \end{Bmatrix} * \mathbf{S}\begin{Bmatrix} f & \chi \\ \psi & g \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\begin{Bmatrix} f_0 + \chi_0 \cdot g & \chi_0 \cdot g \\ \psi_0 + g_0 \cdot \psi & g_0 \cdot g \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

следует, что такой элемент не является левым нулем, в отличие от случая полугрупп функций [22]. Из (4.2) видно, также, что множества элементов, имеющих вид верхнетреугольных ($\psi(\mathrm{z}) = 0$) и нижнетреугольных ($\chi(\mathrm{z}) = 0$), а также диагональных матриц, образуют соответствующие подполугруппы супераналитической полугруппы $\mathbf{S}$.

Обратимость преобразований (4.1) определяется, прежде всего, обратимостью четных функций $f(\mathrm{z})$ и $g(\mathrm{z})$, поскольку нечетные функции необратимы по определению. При этом, супераналог якобиана - березиниан [58] - может быть корректно определен только, если $\sigma[\,g(\mathrm{z})\,] \neq 0$,

$$\mathrm{Ber}(\tilde{\mathrm{Z}}/\mathrm{Z}) = \frac{f'(\mathrm{z})}{g(\mathrm{z})} + \frac{\chi(\mathrm{z}) \cdot \psi'(\mathrm{z})}{g^2(\mathrm{z})} + \theta\left(\frac{\chi(\mathrm{z})}{g(\mathrm{z})}\right)', \tag{4.5}$$

где штрих означает дифференцирование по аргументу.

Следовательно, имеется достаточно большой класс необратимых преобразований вида (4.1), для которых березиниан (4.5) может быть все же определен, но представляет собой чисто духовую величину. Естественно ввести "меру необратимости" супераналитического преобразования: чем меньше индекс нильпотентности березиниана тем "необратимее" преобразование. Определим *индекс преобразования* формулой

$$\mathrm{ind}\, J := \left\{ n \in \mathbb{N} \;\middle|\; \mathrm{ind}\, \mathrm{Ber}(\tilde{\mathrm{Z}}/\mathrm{Z}) = n \right\}, \tag{4.7}$$

тогда *мера необратимости* будет определяться величиной $m := 1/\operatorname{ind} J$. По индексу преобразования можно проводить классификацию всех суперaналитиических преобразований, как обратимых, так и необратимых. Если преобразование обратимо, то никакая степень его березиниана не обращается в нуль, поэтому индекс преобразования в обратимом случае равен бесконечности $\operatorname{ind} J = \infty$, а их мера необратимости, очевидно, равна нулю $m = 0$, причем для "самого необратимого" преобразования, из-за того, что минимальный индекс нильпотентности для любой отличной от нуля величины равен двум, имеем $\operatorname{ind} J = 2,\ m = 1/2$. В общем случае $2 \leq \operatorname{ind} J \leq \infty$ и $0 \leq m \leq 1/2$.

5. СУПЕРКОНФОРМНАЯ ПОЛУГРУППА

В несуперсимметричном случае, как хорошо известно [61], свойств аналитичности достаточно, чтобы преобразования $\widetilde{z} = f(z)$ $z \in \mathbb{C}$, аналогичные (4.1), были одновременно и конформными преобразованиями (когда производная $\partial/\partial z$ и дифференциал dz пребразуются в себя с точностью до ковариантного множителя $\partial\widetilde{z}/\partial z = f'(z)$). Тогда они могут быть использованы как функции перехода для римановых поверхностей, на которых задано линейное расслоение [61]. Это позволяет построить квантовую теорию бозонной струны в подходе функционального интеграла, когда вычисление амплитуд сводится к интегрированию по множеству неэквивалентных римановых поверхностей - конечномерному пространству модулей [66]. Интересно, что, если расширить область определения в $\widetilde{z} = f(z)$ до $\widetilde{z}, z \in \mathbb{C}^{1,0}$, где $f(z)$ произвольная аналитическая функция, то соответствующая группа обычных конформных преобразований может быть расширена до полугруппы, являющейся , очевидно, полугруппой функций. Поэтому ее идеальная структура достаточно хорошо исследуется стандартными методами [67], а свойства, связанные с обратимостью, могут быть изучены с применением результатов [68]. Аналогичный подход в суперсимметричном случае [63,64] не позволяет непосредственно использовать супераналитические преобразования (4.1) для подобных целей. Здесь, требование ковариантности преобразования производной накладывает нетривиальные ограничения на сами коэффициентные функции из (4.1) в виде дополнительных уравнений. Это и приводит к необычному идеальному строению суперконформных полугрупп [8].

В каждой точке $\{z,\theta\}$ суперпространства $\mathbb{C}^{1,1}$ структура касательного пространства определяется базисом $\{\partial, D\}$, где для канонической локальной координатной системы [69] оператор суперпроизводной имеет вид $D := \partial_\theta + \theta\partial$ ($\partial_\theta = \partial/\partial\theta$, $\partial = \partial/\partial z$) и удовлетворяет соотношению суперсимметрии $D^2 = \partial$. Дуальное кокасательное пространство имеет базис 1-форм $\{dZ, d\theta\}$, где $dZ := dz + \theta d\theta$ (соглашение о знаках, как в [70]).

Действие полугруппы супераналитических преобразований (4.1) в касательном и кокасательном пространствах имеет вид

$$\begin{pmatrix} \partial \\ D \end{pmatrix} = P \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\partial} \\ \tilde{D} \end{pmatrix}, \qquad (5.1)$$

$$(d\tilde{Z}, d\theta) = (dZ, d\theta) \cdot P ,$$

так, что супераналог внешнего дифференциала $d := dZ\partial + d\theta D$ является инвариантом супераналитических преобразований. Здесь

$$P = \begin{pmatrix} \partial\tilde{z} - \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} & \partial\tilde{\theta} \\ D\tilde{z} - D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta} & D\tilde{\theta} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

– матрица, определяющая структуру многообразия, для которого преобразованиями склейки являются суперааналитические преобразования (4.1). Действительно, если воспользоваться свойством мультипликативности березиниана [58] и формулой

$$\begin{pmatrix} \partial\tilde{z} & \partial\tilde{\theta} \\ \partial_\theta\tilde{z} & \partial_\theta\tilde{\theta} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\theta & 1 \end{pmatrix} \cdot P \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\tilde{\theta} & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.3}$$

то можно получить

$$\mathrm{Ber}\left(\tilde{Z}/Z\right) = \mathrm{Ber}\, P. \tag{5.4}$$

Поэтому обратимость суперанлитического преобразования (4.1) определяется, как и следовало ожидать, обратимостью структурной матрицы P : так, наличие ненулевой числовой части у нечетно-нечетного элемента матрицы позволяет определить сам березиниан, в то время как числовая часть ее четно-четного элемента ответственна за его обратимость. Обычно ограничиваются обратимым вариантом $P \in GL(1,1|\mathbb{C})$ [71]. В общем случае имеется три возможности и, соответственно, три типа преобразований:

(I) – березиниан существует и обратим;

(II) – березиниан существует и необратим;

(III) – березиниан не определим вообще.

Преобразования типа I использовались в качестве функций перехода между картами при конструировании супермногообразий, для которых структурной группой является $GL(1,1|\mathbb{C})$ [71]. Определенная редукция этой группы приводит к тому, что супермногообразие становилось *суперримановой поверхностью* [72] (другое название –

суперконформное многообразие [73]). Более нетривиальная редукция позволяла сконструировать специальный тип суперримановых поверхностей, пригодный для адекватного описания двумерной топологической супергравитации [74]. Кроме того, при интегрировании по пространству модулей возникали трудности с нечетными модулями [75], которые фактически были обусловлены наличием делителей нуля в грассмановой алгебре, над которой рассматривалась теория, что приводило, например, к необходимости вводить новые поля на суперримановых поверхностях [76]. Поэтому естественным и интересным представляется построение и изучение аналогичных объектов с применением остальных (необратимых) типов преобразований, рассматриваемых ниже.

Как показано в [8], имеется две нетривиальные возможности редукции матрицы P , отвечающих занулению каждого из элементов первого ее столбца соответственно

$$\partial\tilde{z} = \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta}, \qquad (5.5)$$

$$D\tilde{z} = D\tilde{\theta}\cdot\tilde{\theta}. \qquad (5.6)$$

Первый вариант приводит к необратимым преобразованиям, изменяющим четность в касательном пространстве и имеющим некоторые другие необычные свойства - такие преобразования подробно изучены в [8]. Второе условие (5.6) (только оно всегда и рассматривалось) определяет в обратимом случае *суперконформные преобразования* [70,72,73], и считается, что именно они являются суперобобщением обычных конформных преобразований, поскольку, как это следует из (5.2) и (5.6), суперпроизводная преобразуется ковариантно

$$D = \left(D\tilde{\theta}\right)\cdot\tilde{D} \qquad (5.7)$$

Однако, если принять во внимание и возможные необратимые преобзования, то необходимо учитывать оба типа редукций потому, что в первом случае также имеется (хотя и меняющий четность) аналог ковариантности преобразования производной

$$\partial = \left(\partial\tilde{\theta}\right)\cdot\tilde{D} \tag{5.8}$$

и, возможно, соответствующие аналоги линейных расслоений, меняющих четность (подробнее см. [8]).

Рассмотрим преобразования (4.1), подчиняющиеся условию (5.6), и будем называть как обратимые, так и необратимые такие преобразования *суперконформными*. Действуя оператором D на обе части условия (5.6), получаем

$$d\tilde{z} + \tilde{\theta}\, d\tilde{\theta} = \left(D\tilde{\theta}\right)^2 \tag{5.9}$$

Тогда матрица P редуцируется к треугольному (суперконформному) виду

$$P = \begin{pmatrix} \left(D\tilde{\theta}\right)^2 & \partial\tilde{\theta} \\ 0 & D\tilde{\theta} \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

Если $\sigma\left[D\tilde{\theta}\right] \neq 0$, то для березиниана суперконформных преобразований, используя (5.4), получаем

$$J = Ber\left(\tilde{Z}/Z\right) = D\tilde{\theta}. \tag{5.11}$$

То, что суперякобиан (или березиниан) оказался равным конформному множителю в законе преобразования суперпроизводной (5.6), является нетривиальным свойством суперконформных преобразований [70,73]. Из (5.1) и (5.10) следует, что 1-форма dZ также преобразуется ковариантно

$$d\tilde{Z} = \left(D\tilde{\theta}\right)^2 dZ = \left(Ber\left(\tilde{Z}/Z\right)\right)^2 dZ, \tag{5.12}$$

но с помощью квадрата конформного множителя $D\tilde{\theta}$. В то время, как дуальная 1-форме dZ производная преобразуется ковариантно с тем же множителем только для константных в нечетном секторе преобразований, поскольку

$$\partial = (D\tilde{\theta})^2\tilde{\partial} + \partial\tilde{\theta}\cdot\tilde{D}. \qquad (5.13)$$

Поэтому внешний дифференциал $dZ\partial$ - не супекконформный инвариант. Однако, второе равенство в (5.12) можно рассматривать как иное определение суперконформных преобразований $\widetilde{\mathcal{S}}_{SCf}$, которое легко обобщается на $N \neq 2$ следующим образом

$$d\tilde{Z} = \left(\mathrm{Ber}(\tilde{Z}/Z)\right)^{\frac{2}{2-N}} \cdot dZ. \qquad (5.14)$$

(ср. [77]). Обратимые суперконформные преобразования являются преобразованиями склейки при построении суперконформных многообразий [73] или суперримановых поверхностей [70,72]. Для последовательного определения линейных расслоений и линейных интегралов [79] на суперримановых поверхностях вводятся *абелевы супердифференциалы* $d\ell$ [72], преобразующиеся, как и суперпроизводная, с помощью березиниана (5.7), но дуальным образом

$$d\tilde{\ell} = (D\tilde{\theta})\cdot d\ell. \qquad (5.15)$$

Тогда суперконформный внешний дифференциал $d_{scf} := d\ell D$ уже является инвариантом суперконформных преобразований $\widetilde{\mathcal{S}}_{SCf}$, $d\ell$ может рассматриваться, как квадратный корень из dZ в смысле полуформ (дуально соотношению суперсимметрии для суперпроизводных $D^2 = \partial$). Это означает задание в каждой точке суперримановой поверхности инвариантного подпространства касательного пространства, что используется, например, для корректного построения действий в теории фермионных струн [63,64].

Из суперконформного условия (5.6) следует система уравнений на компонентные функции

$$\chi(z) = g(z)\cdot\psi(z), \qquad (5.16)$$

$$f'(z) = g^2(z) - \psi(z)\cdot\psi'(z), \qquad (5.17)$$

которая уменьшает число независимых функций, характеризующих суперконформное преобразование до двух. Из (5.17) следует, что функции $f(z)$ и $g(z)$ имеют или не имеют числовую часть одновременно, то есть их ниль-квазихарактеры (3.2) совпадают $\eta[f(z)]=\eta[g(z)]$. Используя только (5.16), запишем общее суперконформное преобразование в виде

$$\tilde{z}=f(z)+\theta\cdot\psi(z)\cdot g(z), \tag{5.18}$$

$$\tilde{\theta}=\psi(z)+\theta\cdot g(z), \tag{5.19}$$

подразумевая выполнение условия (5.17). Подставляя (5.19) в (5.18), получаем уравнение

$$\tilde{z}=\tilde{\theta}\cdot\psi(z)+f(z), \tag{5.20}$$

которое можно интерпретировать как уравнение "суперконформной прямой" с чисто духовым наклоном $\psi(z)$ на $\tilde{z}\,\tilde{\theta}$ -плоскости, при этом "точки" на "прямой" при $z=const$ находятся во взаимнооднозначном соответствии с координатой $\tilde{\theta}$. Кроме того, мы намеренно не исключаем из (5.17) $g(z)$, как это обычно делается [70,73], еще и потому, что такое исключение возможно только, если $\sigma[g(z)]=0$, когда квадратный корень извлекается, но это - лишь один из частных случаев. Интегрировать же (5.17) можно независимо от нильпотентности $g(z)$, если контур интегрирования выбрать соответствующим образом [42]. Поэтому произвольные как обратимые, так и необратимые суперконформные преобразования $\tilde{\mathcal{J}}_{scf}$ могут быть формально представлены в следующем виде

$$\tilde{z}=h(z)+C+\theta\cdot\psi(z)\cdot g(z), \tag{5.21}$$

$$\tilde{\theta}=\psi(z)+\theta\cdot g(z),$$

$$h(z)=\int_Q dz\left(g^2(z)-\psi(z)\cdot\psi'(z)\right), \tag{5.22}$$

где контур Q выбран так, чтобы $h(0)=0$, тогда $f(z)=h(z)+C$. Этот анзац обусловлен тем фактом, что из уравнения (5.17) функция $f(z)$ восстанавливается по функции $g(z)$ лишь с точностью до четной константы C. Поэтому последнюю будем рассматривать как дополнительный параметр полугруппы, если задавать полугруппу функциями $g(z)$ (а не $f(z)$, как ранее [70,73]). Итак, элемент $\mathbf{s}$ *суперконформной полугруппы* $\mathbf{S}_{scf}$ параметризуем двумя функциями на $\mathbb{C}^{1,0}$ и одной четной константой $\mathbf{s}\{g;\psi;C\}\in\mathbf{S}_{scf}\subset\mathbf{S}$. Закон умножения в $\mathbf{S}_{scf}$ следует из (5.18) и (5.19)

$$\begin{aligned}&\mathbf{s}\{g_1;\psi_1;C_1\}*\mathbf{s}\{g_2;\psi_2;C_2\}\\&=\mathbf{s}\{g_1\circ(h_2+C_2)\cdot g_2+\psi_2\cdot g_2\cdot\psi_1'\circ(h_2+C_2);\\&\psi_1\circ(h_2+C_2)+g_1\circ(h_2+C_2)\cdot\psi_2;\ C_1\\&+h_1(C_2)+\psi_2(0)\cdot\psi_1(C_2)\cdot g_1(C_2)\},\end{aligned}\tag{5.23}$$

где $h(z)$ определено в (5.22).

Из (5.23) следует, что двухсторонняя единица суперконформной полугруппы, определяемая соотношениями $\forall\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{scf}$, $\mathbf{s}*\mathbf{e}=\mathbf{e}*\mathbf{s}=\mathbf{s}$, имеет следующий вид $\mathbf{e}=\mathbf{s}\{1;0;0\}$, а нулевой элемент, определяемый как $\forall\mathbf{s}\in\mathbf{S}_{scf}$, $\mathbf{z}*\mathbf{s}=\mathbf{s}*\mathbf{z}=\mathbf{z}$, равен $\mathbf{z}=\mathbf{s}\{0;0;0\}$. Взаимнообратные элементы суперконформной полугруппы $\mathbf{S}_{scf}$, определяемые формулой $\mathbf{s}_1*\mathbf{s}_2=\mathbf{e}$, удовлетворяют системе функциональных уравнений

$$\begin{aligned}&g_1\circ(h_2+C_2)\cdot g_2+\psi_2\cdot g_2\cdot\psi_1'\circ(h_2+C_2)=1,\\&\psi_1\circ(h_2+C_2)=-\psi_2\cdot g_1\circ(h_2+C_2),\\&C_1=-h_1(C_2)-g_1(C_2)\cdot\psi_2(0)\cdot\psi_1(C_2).\end{aligned}\tag{5.24}$$

Отсюда, например, следует, что левая единица для обратимого элемента $\mathbf{s}\{g;\psi;C\}$ равна

$$\mathbf{s}\{g;\psi;c\}_L^{-1}=\mathbf{s}\left\{\frac{1}{\bar{g}}+\frac{\bar{\psi}\cdot\bar{\psi}'}{\bar{g}^3};-\frac{\bar{\psi}}{\bar{g}};-c\right\},$$

где $\bar{g}=g\circ(h^{-1}-c), \bar{\psi}=\psi\circ(h^{-1}-c), h'=g^2-\psi\cdot\psi'$. (5.25)

Чтобы исследовать свойства обратимости (связанные с нильпотентностью компонентных функций) в суперконформной полугруппе, расширим область определения соотношения (5.11) и на тот случай, когда правая часть его представляет собой чисто духовую величину, то есть ее ниль-квазихарактер равен нулю $\eta[D\tilde{\theta}]=0$. Тогда, пользуясь (5.11), можно ввести в рассмотрение обобщенный якобиан суперконформного преобразования (березиниан (4.5) в этом случае не определим) по формуле

$$J_{scf}:=D\tilde{\theta}=g(z)+\theta\cdot\psi(z). \tag{5.26}$$

Отсюда видно, что ниль-квазихарактеры обобщенного якобиана и функции $g(z)$ совпадают, поэтому обратимость всего суперконформного преобразования определяется ниль-квазихарактером функции $g(z)$. Так , элементы суперконформной полугруппы с $\eta[g(z)]\neq 0$ являются обратимыми, а элементы с $\eta[g(z)]=0$ - необратимыми. Обратимые элементы $\mathbf{g}\in\mathbf{S}_{scf}$ вместе с единицей составляют подгруппу $\mathbf{G}_{scf}:=\cup\mathbf{g}\cup\mathbf{e}$ суперконформной полугруппы, а необратимые элементы $\mathbf{i}\in\mathbf{S}_{scf}$ с нулем - ее идеал $\mathbf{I}_{scf}:=\cup\mathbf{i}\cup\mathbf{z}$. Из закона умножения (5.23) следует, что , если хотя бы один из сомножителей необратим, то и результирующее преобразование также необратимо, то есть $\mathbf{I}_{scf}*\mathbf{S}\subseteq\mathbf{I}_{scf}, \mathbf{S}_{scf}*\mathbf{I}_{scf}\subseteq\mathbf{I}_{scf}$, поэтому $\mathbf{I}_{scf}$ - изолированный идеал, а подгруппа $\mathbf{G}_{scf}$ - фильтр (см. определения в п. 2). Обратимые суперконформные преобразования, соответствующие элементам $\mathbf{G}_{scf}$, рассматривались в [70-73]. Поэтому подробнее остановимся на необратимых преобразованиях и структуре идеала $\mathbf{I}_{scf}$.

6. ЛОКАЛЬНОЕ СТРОЕНИЕ СУПЕРКОНФОРМНОЙ ПОЛУГРУППЫ

Рассмотрим свойства обратимости суперконформных преобразований, связанные с нильпотентностью компонентных функций $g(z)$. Возведем обе части равенства (5.26) в степень n и воспользуемся тем, что индекс нильпотентности второго слагаемого в нем минимален и равен двум, тогда получим

$$J^n_{scf} = g^n(z) + n \cdot g^{n-1}(z) \cdot \theta \cdot \psi'(z). \tag{6.1}$$

Видно, что имеется две возможности в зависимости от присутствия последнего слагаемого в (6.1). Если оно отлично от нуля, получаем соотношение

$$\operatorname{ind} J_{scf} = \operatorname{ind} g(z) + 1 \tag{6.2}$$

связывающее меру необратимости m (см. (4.7) и далее) общего суперконформного преобразования с нильпотентностью четной компонентной функции $g(z)$.

Среди необратимых суперконформных преобразований с $\operatorname{ind} g(z) = n$ можно выделить множество преобразований, обладающих свойством

$$g^{n-1}(z) \in \operatorname{Ann} \psi'(z) , \tag{6.3}$$

и назовем их Ann-преобразованиями индекса n. Тогда второе слагаемое в (6.1) для Ann-преобразований обращается в нуль, и получаем

$$\operatorname{ind} J^A_{scf} = \operatorname{ind} g(z) \tag{6.4}$$

Соотношения (6.2) и (6.4) справедливы лишь для суперконформных преобразований, то есть они являются условиями суперконформности, записанными через индексы нильпотентности.

Выделим в идеале $\mathbf{I}_{scf}$ следующие подмножества элементов

$$\mathbf{I}_n := \left\{ i \in \mathbf{I}_{scf} \mid g^n(z) = 0 \right\}, \tag{6.5}$$

$$\mathbf{J}_n := \{ \boldsymbol{i} \in \mathbf{I}_n \mid \operatorname{ind} g(z) = n \}, \qquad (6.6)$$

$$\mathbf{J}_n^A := \{ \boldsymbol{i} \in \mathbf{J}_n \mid g^{n-1}(z) \in \operatorname{Ann} \psi'(z) \}, \qquad (6.7)$$

которые связаны очевидными соотношениями $\mathbf{J}_n = \mathbf{I}_n \setminus \mathbf{I}_{n-1}$, причем $\mathbf{I}_0 = \mathbf{J}_0 = \mathbf{Z}$.

Пусть $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1 * \mathbf{S}_2$, тогда из (5.23) получаем

$$g_3^n(z) = g_1^n(h_2(z) + C_2) \cdot g_2^n(z) +$$
$$n \cdot g_1^{n-1}(h_2(z) + C_2) \cdot \psi_2(z) \cdot \psi_1'(h_2(z) + C_2) \cdot g_2^n(z). \qquad (6.8)$$

Отсюда следует, что и здесь условием зануления второго слагаемого по-прежнему является (6.3), это снова выделяет Ann - преобразования, а именно, множество элементов $\mathbf{J}_n^A \subseteq \mathbf{I}_n$

действует на элементы $\mathbf{I}_n$ как правый идеал относительно свойства (6.3). Действительно, пусть $\mathbf{S}_3 = \mathbf{S}_1 * \mathbf{S}_2$, $\mathbf{S}_i \in \mathbf{I}_n$, и для $\mathbf{S}_1$ выполняется (6.3), то есть $g_1^{n-1}(z) \cdot \psi_1'(z) = 0$. Покажем, что $g_3^{n-1}(z) \cdot \psi_3'(z) = 0$. Из (5.23) имеем

$$w_3(z) = w_1(z) \cdot g_2^{n+1}(z) + w_2(z) \cdot g_1^n(h_2(z) + C_2) + n \cdot \psi_2(z) w_1(z) \cdot w_2(z)$$
$$+ g_1^{n-1}(h_2(z) + C_2) \cdot g_1'(h_2(z) + C_2) \cdot g_2^{n-1}(z) \cdot \psi_2(z), \qquad (6.9)$$

где
$$w_1(z) = g_1^{n-1}(h_2(z) + C_2) \cdot \psi_1'(h_2(z) + C_2),$$
$$w_2(z) = g_2^{n-1}(z) \cdot \psi_2'(z),$$
$$w_3(z) = g_3^{n-1}(z) \cdot \psi_3'(z),$$

и в последнем равенстве использована очевидная импликация $g^n(z) = 0 \Rightarrow g'(z) \cdot g^{n-1}(z) = 0$. Поэтому $\mathbf{J}_n^A * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{J}_n^A$, а поскольку отсюда следует, что $\mathbf{J}_n^A * \mathbf{J}_n^A \subseteq \mathbf{J}_n^A$, то множество $\mathbf{J}_n^A$ замкнуто относительно свойства (6.3), поэтому объединение $\bigcup \mathbf{J}_n^A = \mathbf{S}^A$ есть подполугруппа в $\mathbf{S}_{SCf}$, которую будем называть Ann *-полугруппой*. Свойства идеалов (относительно нильпотентности) в Ann -полугруппе несколько отличаются от таковых в оставшейся части суперконформной полугруппы, поэтому мы рассмотрим их отдельно.

6.1. Ann *-полугруппа*

Очевидно, что из-за (6.3) все элементы из Ann - полугруппы необратимы, следовательно групповая часть в $\mathbf{S}^A$ отсутствует, поскольку

$$g^{n-1}(z)\cdot\psi'(z)=0, \tag{6.10}$$

поэтому $ind\, g(z)$ (считаем, что $\psi'(z)\neq 0$). Чтобы изучить свойства нильпотентности Ann -преобразований, возведем четную часть (5.23) в степень n, тогда получим Ann -аналог соотношения (6.8)

$$g_3^n(z)=g_1^n\left(h_2(z)+C_2\right)\cdot g_2^n(z). \tag{6.11}$$

Отсюда видно, что множества элементов, определенные

$$\mathbf{A}_n:=\left\{\mathbf{s}\in\mathbf{S}^A \mid g^n(z)=0\right\}, \tag{6.12}$$

являются двухсторонними идеалами в $\mathbf{S}^A$, и, кроме того, имеют место строгие включения $\mathbf{A}_{n-1}\subset\mathbf{A}_n$. Следовательно, идеалу Ann - полугруппы $\mathbf{I}^A\equiv\mathbf{S}^A$ можно поставить в соответствие бесконечную двухсторонне-идеальную цепь

$$\mathbf{z}\subset\mathbf{A}_1\subset\mathbf{A}_2\subset\ldots\subset\mathbf{A}_n\subset\ldots\subset\mathbf{I}^A\equiv\mathbf{S}^A \tag{6.13}$$

начинающуюся с тривиального минимального идеала, нуля $\mathbf{z}$ Ann - полугруппы, и заканчивающуюся самой полугруппой $\mathbf{I}^A\equiv\mathbf{S}^A$. Очевидно, что идеал $\mathbf{I}^A$ содержит M *-замкнутые подмножества*, обладающие важным с абстрактной точки зрения [79] свойством

$M^n \subseteq M$, $M \subset I^A$. Кроме того, каждая подполугруппа в S^A является одновременно идеалом, поэтому S^A - *гамильтонова полугруппа* [80]. Поскольку каждый идеал любой подполугруппы полугруппы S^A представляет собой идеал всей полугруппы, то S^A есть *филиальная полугруппа* [81]. Отметим еще раз, что функции $g(z)$ необратимы по определению, поэтому у S^A отсутствует групповая часть. Из закона умножения (5.23) следует, что каждый идеал содержит нильидеал $N_n^A := \{ i \in A_n \mid i^n = z \}$, причем реализуется строгое включение $N_n^A \subset A_n$. Можно показать, что разность $A_n \setminus N_n^A$ содержит только нильэлементы более высокого индекса и, следовательно, принадлежит к соответствующим нильидеалам. Поэтому объединение всех нильидеалов совпадает со всей Ann -полугруппой. Таким образом, Ann -полугруппа является нильполугруппой [14]. Поскольку A_{n-1} есть идеал в A_n, то, как это следует из (6.11), идеальная цепь (6.13) представляет собой идеальный ряд Ann -полугруппы. Факторами этого ряда являются фактор-полугруппы Риса A_n/A_{n-1}, и для них коидеал $A_n \setminus A_{n-1}$ совпадает с J_n^A (6.7). Кроме того, A_{n+1}/A_n - идеал фактор-полугруппы I^A/A_n, и выполняется следующее соотношение: $\left(I^A/A_n\right) / \left(A_{n+1}/A_n\right) \cong I^A/A_{n+1}$. Однако, идеальный ряд (6.13) не является аннуляторным ни справа, ни слева, как этого следовало бы ожидать для нильполугруппы [13,14].

Пользуясь (6.11) и очевидными свойствами нильпотентных элементов, для множеств A_n и J_n^A из Ann -полугруппы находим

$$\begin{aligned} &A_n * A_m \subseteq A_k \\ &J_n^A * J_m^A \subseteq A_k \\ &J_n^A * A_m \subseteq A_k \end{aligned} \qquad (6.14)$$

$$\mathbf{A}_n * \mathbf{J}_m^A \subseteq \mathbf{A}_K ,$$

где $K = \min(n, m)$.

Отсюда видно, что в Ann -полугруппе выполняется коммутаторное условие $\forall \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{S} \Rightarrow \mathbf{s} * \mathbf{t} \in \mathbf{S}^A * \mathbf{s} \cap \mathbf{t} * \mathbf{S}^A$, поэтому она является одновременно *дуополугруппой* [82]. Отметим также важные следствия $(\mathbf{A}_n)^K \subseteq \mathbf{A}_n$, $(\mathbf{J}_n^A)^K \subseteq \mathbf{A}_n$ и то, что каждый идеал $\mathbf{A}_n$ является *первичным* [83], поскольку имеет место импликация $\mathbf{A}_n * \mathbf{A}_m \subseteq \mathbf{A}_K \Rightarrow \mathbf{A}_n \subset \mathbf{A}_K \vee \mathbf{A}_m \subset \mathbf{A}_K$. Следует обратить внимание на то, что множество $\mathbf{I}^A = \mathbf{S}^A$ представляет собой объединение взаимно непересекающихся множеств: $\mathbf{I}^A = \bigcup_n \mathbf{A}_n \quad \mathbf{A}_n \cap \mathbf{A}_m = \varnothing$, однако $\mathbf{J}_n^A$ не является подполугруппой ни для $\mathbf{A}_n$, ни для $\mathbf{I}^A$. Но с $\mathbf{J}_n^A$ можно связать полугруппу $\mathbf{T}_n^A := \{\mathbf{A}_n \cup \mathbf{z}, \,\square\}$, в которой умножение определяется формулой

$$\mathbf{s} \,\square\, \mathbf{t} := \begin{cases} \mathbf{s} * \mathbf{t}, & \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{T}_n^A \quad \mathbf{s} * \mathbf{t} \in \mathbf{J}_n^A \\ \mathbf{z} & \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{T}_n^A \quad \mathbf{s} * \mathbf{t} \notin \mathbf{J}_n^A . \end{cases} \tag{6.15}$$

Отметим, что полугруппа $\mathbf{T}_n^A$ может быть построена также и с помощью характеристической функции

$$\mathbf{c}_n(\mathbf{s}) := \begin{cases} \mathbf{e}, & \mathbf{s} \in \mathbf{J}_n^A \\ \mathbf{z}, & \mathbf{s} \notin \mathbf{J}_n^A \end{cases} \tag{6.16}$$

Тогда умножение в (6.15) можно представить следующим образом $\mathbf{s} \,\square\, \mathbf{t} = \mathbf{c}_n(\mathbf{s} * \mathbf{t}) * \mathbf{s} * \mathbf{t}$. При одинаковых индексах из (6.14) имеем $(\mathbf{A}_n)^2 \subseteq \mathbf{A}_n$. Поэтому представляется естественным выделить в $\mathbf{A}_n$ подмножество $\mathbf{A}_n^{(K)} \subset \mathbf{A}_n$, обладающее свойством

$$\mathbf{A}_n^{(K)} * \mathbf{A}_n^{(K)} \subseteq \mathbf{A}_K , \quad 0 \leq K \leq n, \tag{6.17}$$

что можно трактовать как извлечение квадратного корня из $\mathbf{A}_K$. При $K = n$ получаем $\mathbf{T}_n^A = \mathbf{A}_n^{(n)} \cup \mathbf{z}$. В другом предельном случае, при $K=0$, имеем $A_n^{(0)} = A_n \cap N_2^A$. Но, поскольку умножение (6.16) снова не замыкается, подмножество $A_n^{(K)}$ не является полугруппой.

Из определения главных идеалов (2.5) и соотношений (6.14) получаем

$$R(s) \subseteq A_n ,\quad L(s) \subseteq A_n ,\quad J(s) \subseteq A_n , \tag{6.18}$$

где $s \in J_n^A$.

Поскольку S^A - нильполугруппа, все отношения эквивалентности Грина (2.6) совпадают между собой и с отношением равенства, а Ann -полугруппа является J *-тривиальной* [14]. Например, пусть $s \in R(s) \wedge s \neq z$, тогда найдется элемент $t \neq s$ такой, что $s = s * t$, а, следовательно, и $s = s * t^K$, где K - произвольно. Но S^A по построению содержит только нильэлементы, поэтому $\forall t \in S^A, \exists n, t^n = z$. Выберем $K = n$ и получим $s = s * t^n = s * z = z$, что противоречит условию $s \neq z$. Наоборот, пусть $R(s) = R(t) \wedge z \neq s \neq t$, тогда из определений (2.6) получаем $s = t * x = (s * y) * x = s * (y * x) = s * (y * x)^K$, $x, y \in S^A$. Снова, в силу того, что S^A - нильполугруппа, найдется такая степень n , что $(y * x)^n = z$, поэтому $s = s * z = z$: противоречие. Отсюда получаем требуемую импликацию $R(s) = R(t) \Rightarrow s = t$. Аналогично и для других отношений Грина. Из предыдущих рассуждений следует, что $\mathcal{L}, \mathcal{R}, \mathcal{J}$ -классы Ann -полугруппы содержат ровно по одному элементу.

Квазиидеальный ряд

Переходим теперь к анализу идеального строения суперконформной полугруппы в общем случае. В отличие от (6.3) предполагаем, что $g(z) \notin \mathrm{Ann}\, \psi'(z)$. Такая полугруппа может содержать кроме необратимых также и обратимые элементы, а, следовательно, подгруппу $\mathbf{G}_{scf} \subset \mathbf{S}_{scf}$, которая определяется преобразованиями с ненильпотентными и обратимыми $g(z)$. Если условно положить для обратимых элементов индекс нильпотентности, равный бесконечности, то в терминах величин, введенных в (6.5)-(6.7) имеем $\mathbf{G}_{scf} := \mathbf{J}_{\infty}$, $\mathbf{S}_{scf} := \mathbf{I}_{\infty}$, что позволяет в некоторых случаях формально включить $\mathbf{G}_{scf}$ в закон умножения, аналогичный (6.14). Очевидно, что множество $\mathbf{G}_{scf} \cup \{\mathbf{z}\}$ является фактор-полугруппой Риса $\mathbf{S}_{scf} / \mathbf{I}_{scf}$ [5]. Тогда суперконформную полугруппу $\mathbf{S}_{scf}$ можно трактовать как идеальное расширение [84] суперконформной группы $\mathbf{G}_{scf}$ при помощи идеала $\mathbf{I}_{scf}$. Рассмотрим множества (6.5)-(6.7) в случае полной суперконформной полугруппы $\mathbf{S}_{scf}$. Очевидно, что строгие включения $\mathbf{I}_n \supset \mathbf{I}_{n-1}$ сохраняются. Поэтому, идеалу суперконформной полугруппы $\mathbf{I}_{scf}$ можно поставить в соответствие цепь множеств $\mathbf{I}_n$, аналогичную (6.13) следующим образом

$$\mathbf{z} \subset \mathbf{I}_1 \subset \mathbf{I}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{I}_n \subset \ldots \quad \subset \mathbf{I}_{scf}. \qquad (6.19)$$

Однако, в данном случае вместо (6.14) имеем

$$\begin{gathered} \mathbf{S}_{scf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n , \\ \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{scf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} , \\ \mathbf{S}_{scf} * \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{scf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} , \end{gathered} \qquad (6.20)$$

что непосредственно вытекает из полного закона умножения (5.23). Действительно, если в (5.23) $g_1^n(z)=0$ и $g_2^n(z)\neq 0$, то найдется такое $n=\mathrm{ind}\, g_1(z)$, что $g_1(z)$ может быть отлично от нуля, в то время, как $g_3^{n+1}(z)=0$ за счет зануления уже второго слагаемого в квадратных скобках (5.23).

Из (6.20) следует, что множество $\mathbf{I}_n$ является только левым идеалом суперконформной полугруппы, но не правым и двухсторонним идеалом. Однако, $\mathbf{I}_n$ - *квазиидеал* [85], поскольку $\mathbf{S}_{scf} * \mathbf{I}_n \cap \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{scf} \subseteq \mathbf{I}_n$ и, одновременно, $\mathbf{I}_n$ - *биидеал* [86], так как $\mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{scf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n$. Интересно отметить, что здесь не требуется регулярности для совпадения биидеала и квазиидеала [85]. В последних двух соотношениях (6.20) происходит подъем лишь в соседнее множество $\mathbf{I}_{n+1}$ (в цепи (6.19)), поэтому $\mathbf{I}_n$ можно определить как правый и двухсторонний *повышающий идеал*. Подобная асимметрия возникает также при вычислении мощности правых и левых идеалов конечных полугрупп преобразований [87]. Таким образом, цепь (6.19) представляет собой левоидеальную цепь или цепь правых и двухсторонних повышающих идеалов $\mathbf{I}_n$. Поскольку из (6.20) следует, что $\mathbf{S}_{scf} * \mathbf{I}_n \cup \mathbf{I}_n * \mathbf{S}_{scf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}$, цепь (6.19) естественно назвать *антианнуляторным возрастающим рядом*, длина которого равна бесконечности. Можно предположить, что многие свойства антианнуляторного ряда (6.19) обусловлены нильпотентностью нильидеала $\mathbf{I}_{scf}$, рассматриваемого как самостоятельная полугруппа (для аннуляторных рядов подобные связи установлены в [88]).

Непосредственно из (6.8) следует таблица умножения множеств $\mathbf{I}_n$ и $\mathbf{J}_n$ в общем случае

$$
\begin{array}{ll}
\mathbf{I}_n * \mathbf{I}_{n+k} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{J}_n * \mathbf{I}_{n+k} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} \\
\mathbf{I}_{n+k-1} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n & \mathbf{J}_{n+k-1} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n \\
\mathbf{J}_n * \mathbf{J}_{n+k} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{I}_n * \mathbf{G}_{Scf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} \\
\mathbf{J}_{n+k-1} * \mathbf{J}_n \subseteq \mathbf{I}_n & \mathbf{G}_{Scf} * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n \\
\mathbf{I}_n * \mathbf{J}_{n+k} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} & \mathbf{J}_n * \mathbf{G}_{Scf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1} \\
\mathbf{I}_{n+k-1} * \mathbf{J}_n \subseteq \mathbf{I}_n & \mathbf{G}_{Scf} * \mathbf{J}_n \subseteq \mathbf{I}_n
\end{array}
\qquad (6.21)
$$

где $K \geq 1$. Отсюда видно, что $\mathbf{I}_n$ является подполугруппой, так как $\mathbf{I}_n * \mathbf{I}_n \subseteq \mathbf{I}_n$, а множество $\mathbf{J}_n$ - не является таковой, как и в случае Ann -полугруппы, что есть следствие наличия делителей нуля [89] и нильпотентов [90] в суперконформной полугруппе. Отметим, что из предпоследнего включения в (6.21) следует, что с помощью действия подгруппы $\mathbf{G}_{Scf}$ справа можно попасть в любое из множеств $\mathbf{I}_n$ с большим индексом, начиная с любого ненулевого члена левоидеального ряда (6.19). Из последних двух соотношений (6.21) имеем

$$\mathbf{G}_{Scf} * \mathbf{J}_n * \mathbf{G}_{Scf} \subseteq \mathbf{I}_{n+1}, \qquad (6.22)$$

то есть некоторые из элементов множества $\mathbf{J}_{n+1}$ оказываются сопряженными по подгруппе $\mathbf{G}_{Scf}$ с элементами предыдущего множества. По аналогии с [91] назовем два множества $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ *взаимно-* G *-нормальными*, если $\mathbf{g}^{-1} * \mathbf{A} * \mathbf{g} \subseteq \mathbf{B}$. Тогда из (6.22) следует, что любые два соседние множества $\mathbf{J}_n$ из (6.21) содержат взаимно- G -нормальные элементы, для которых также справедлива часть выводов из [92], где исследовались общие свойства классов сопряженных элементов в произвольных абстрактных полугруппах.

6.3 Обобщенные отношения Грина

Чтобы обойти трудность, связанную с появлением $\mathbf{I}_{n+1}$ в правой части соотношений (6.21), построим при фиксированном $n \neq \infty$ разбиение суперконформной полугруппы на непересекающиеся части

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{S}_{scf} = \mathbf{V}_1^{(n)} \cup \mathbf{V}_2^{(n)} \cup \mathbf{V}_3^{(n)} \cup \mathbf{V}_4 , \\
&\mathbf{V}_1^{(n)} \cap \mathbf{V}_2^{(n)} \cap \mathbf{V}_3^{(n)} \cap \mathbf{V}_4 = \emptyset , \\
&\mathbf{V}_1^{(n)} := \mathbf{I}_{n-1} , \\
&\mathbf{V}_2^{(n)} := \mathbf{J}_n , \\
&\mathbf{V}_3^{(n)} := \mathbf{I}_{scf} \backslash \mathbf{I}_n , \\
&\mathbf{V}_4 := \mathbf{G}_{scf} ,
\end{aligned}
\tag{6.23}
$$

причем $\mathbf{V}_1^{(n)} \cup \mathbf{V}_2^{(n)} = \mathbf{V}_1^{(n+1)} = \mathbf{I}_n$. Тогда для некоторых из введенных множеств будут справедливы стандартные соотношения [5], а для остальных появятся новые. Введем индекс $\mu = 1 \div 4$, тогда разбиение (6.23) запишется в виде $\mathbf{S}_{scf} = \bigcup_\mu \mathbf{V}_\mu^{(n)}$. Используя (6.21), можно построить таблицу умножения компонент "векторов" $\mathbf{V}_\mu^{(n)}$ в виде

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{V}_\mu^{(n)} * \mathbf{V}_1^{(n)} \subseteq \mathbf{V}_1^{(n)} , \\
&\mathbf{V}_\mu^{(n)} * \mathbf{V}_2^{(n)} \subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)} , \\
&\mathbf{V}_1^{(n)} * \mathbf{V}_3^{(n)} \subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)} , \\
&\mathbf{V}_2^{(n)} * \mathbf{V}_3^{(n)} \subseteq \mathbf{V}_1^{(n+2)} , \\
&\mathbf{V}_1^{(n)} * \mathbf{V}_4 \subseteq \mathbf{V}_1^{(n+1)} , \\
&\mathbf{V}_3^{(n)} * \mathbf{V}_3^{(n)} \subseteq \mathbf{I}_{scf} ,
\end{aligned}
\tag{6.24}
$$

$$V_4 * V_3^{(n)} \subseteq I_{scf},$$
$$V_3^{(n)} * V_4 \subseteq I_{scf},$$
$$V_2^{(n)} * V_4 \subseteq V_1^{(n+2)},$$
$$V_4 * V_4 \subseteq V_4 .$$

Отсюда следует, что только два множества $V_1^{(n)}$ и V_4 являются подполугруппами (последнее - подгруппа) полугруппы S_{scf}, а для остальных множеств умножение незамкнуто. Тем не менее, изучение их свойств представляет значительный интерес с абстрактно-алгебраической точки зрения.

Используя определения (6.23), введем в рассмотрение *главные векторные правый и левый идеалы*

$$R_\mu^{(n)}(s) := s * V_\mu^{(n)},$$
$$L_\mu^{(n)}(s) := V_\mu^{(n)} * s \tag{6.25}$$

и *тензорный двухсторонний идеал*

$$J_{\mu\nu}^{(n)} := V_\mu^{(n)} * s * V_\nu^{(n)}, \tag{6.26}$$

где $s \in J_n$.

Из (6.21) и (6.24) следуют включения

$$L_\mu^{(n)}(s) \subseteq V_1^{(n+1)} \qquad R_1^{(n)}(s) \subseteq V_1^{(n)}$$
$$R_2^{(n)}(s) \subseteq V_1^{(n+1)} \qquad R_3^{(n)}(s) \subseteq V_1^{(n+2)} \tag{6.27}$$

$$J_{\mu 1}^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{(n)}, \quad R_4^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{(n+2)}, \quad J_{\mu 2}^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{n+1},$$

$$J_{13}^{n}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{n+1}, \qquad J_{14}^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{n+1},$$

$$J_{\mu 3}^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{(n+2)}, \ \mu > 1 \qquad J_{\mu 4}^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq V_1^{(n+2)}, \ \mu > 1$$

Выясним свойства векторных (6.25) и тензорных (6.26) идеалов по отношению к $V_\mu^{(n)}$. Так, левый векторный идеал является обычным левым идеалом множества $L_\mu^{(n)}(\mathbf{s})$, поскольку

$$V_\mu^{(n)} * L_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) \subseteq L_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) . \tag{6.28}$$

Однако, для правого векторного идеала подобное включение реализуется только при следующих комбинациях индексов

$$\begin{aligned} &R_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) * V_1^{(n)} \subseteq R_\mu^{(n)}(\mathbf{s}), \\ &R_\mu^{(n)}(\mathbf{s}) * V_2^{(n)} \subseteq R_\mu^{(n)}(\mathbf{s}), \quad \mu \neq 1, \\ &R_3^{(n)}(\mathbf{s}) * V_3^{(n)} \subseteq R_3^{(n)}(\mathbf{s}), \end{aligned} \tag{6.29}$$

причем последнее справедливо, если $V_3^{(n)} \cap V_1^{(n+2)} \neq \emptyset$.

Укажем также на соотношения, в которых $R_\mu^{(n)}(\mathbf{s})$ ведет себя как μ *-повышающий* идеал

$$\begin{aligned} &R_1^{(n)}(\mathbf{s}) * V_\mu^{(n)} \subseteq R_2^{(n)}(\mathbf{s}), \quad \mu > 1, \\ &R_2^{(n)}(\mathbf{s}) * V_\mu^{(n)} \subseteq R_3^{(n)}(\mathbf{s}), \quad \mu > 2 . \end{aligned} \tag{6.30}$$

С помощью векторных и тензорных главных идеалов определим обобщенные отношения Грина следующим образом

$$
\begin{aligned}
s\mathcal{R}^{(nm)}_{\mu\nu}t &\Leftrightarrow \mathbf{R}^{(n)}_{\mu}(s) = \mathbf{R}^{(m)}_{\nu}(t),\\
s\mathcal{L}^{(nm)}_{\mu\nu}t &\Leftrightarrow \mathbf{L}^{(n)}_{\mu}(s) = \mathbf{L}^{(m)}_{\nu}(t),\\
s\mathcal{J}^{(nm)}_{\mu\nu\rho\sigma}t &\Leftrightarrow \mathbf{J}^{(n)}_{\mu\nu}(s) = \mathbf{J}^{(m)}_{\rho\sigma}(t),
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

где $\mathbf{s} \in \mathbf{J}_n$, $\mathbf{t} \in \mathbf{J}_m$.

Классы эквивалентности (аналогичные (2.7)) по векторным и тензорным отношениям Грина имеют вид

$$
\begin{aligned}
\mathbf{L}^{nm}_{s,\mu\nu} &:= \left\{ \mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{L}^{(n)}_{\mu}(s) = \mathbf{L}^{(m)}_{\nu}(t) \right\},\\
\mathbf{R}^{nm}_{s,\mu\nu} &:= \left\{ \mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{R}^{(n)}_{\mu}(s) = \mathbf{R}^{m}_{\nu}(t) \right\},\\
\mathbf{J}^{nm}_{s,\mu\nu\rho\sigma} &:= \left\{ \mathbf{t} \in \mathbf{J}_m \mid \mathbf{J}^{(n)}_{\mu\nu}(s) = \mathbf{J}^{(m)}_{\rho\sigma}(t) \right\}.
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

Задание частичного порядка на множествах классов (6.32), подобного (2.8), превращает фактор-множества $\mathbf{S}_{scf}/\mathcal{R}$, $\mathbf{S}_{scf}/\mathcal{L}$, $\mathbf{S}_{scf}/\mathcal{J}$ в частично-упорядоченные множества: правый , левый и (просто) остов суперконформной полугруппы, причем мощность каждого остова равна бесконечности [15]. Отметим, что суперконформная полугруппа не является *устойчивой* [93] ни справа, ни слева, так как $\forall \mathbf{s},\mathbf{t} \in \mathbf{S}_{scf}, \mathbf{s} \in \mathbf{S}^{*}_{scf}\mathbf{s} * \mathbf{t} \not\Rightarrow \mathbf{L}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{L}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{s} * \mathbf{t})$ и $\mathbf{s} \in \mathbf{t} * \mathbf{s} * \mathbf{S}_{scf} \not\Rightarrow \mathbf{R}^{(n)}_{\mu}(\mathbf{s}) = \mathbf{R}^{(m)}_{\nu}(\mathbf{t} * \mathbf{s})$, что, как указывалось ранее, является следствием наличия делителей нуля и нильпотентов в кольце, над которым заданы суперконформные преобразования.

6.4 Квазихарактеры

Введем индекс элемента суперконформной полугруппы по формуле

$$\mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} := \mathrm{ind}\, g(z), \tag{6.33}$$

причем $\mathrm{ind}\, \mathbf{g} = \infty$. Очевидно, что все элементы конечного индекса нильпотентны в смысле полугруппового умножения, то есть имеют конечный индекс (2.3). Для произведения элементов из (6.33) имеем

$$\max \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} * \mathbf{t} = \begin{cases} \mathrm{ind}_0\, \mathbf{t}, & \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} \geqslant \mathrm{ind}_0\, \mathbf{t} \\ \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} + 1, & \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} < \mathrm{ind}_0\, \mathbf{t} \end{cases} \tag{6.34}$$

В частности

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}_0\, \mathbf{g} * \mathbf{s} &= \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s}, \\ \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} * \mathbf{g} &= \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} + 1. \end{aligned} \tag{6.35}$$

Аналогично определяются индексы соответствующих множеств элементов (6.23). Для них получаем

$$\begin{aligned} \max \mathrm{ind}_0\, \mathbf{V}_1^{(n)} &= n - 1, \\ \mathrm{ind}_0\, \mathbf{V}_2^{(n)} &= n, \\ \min \mathrm{ind}_0\, \mathbf{V}_3^{(n)} &= n + 1. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Из соотношений (6.34) и (6.35) следует, что величина $\left| \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} * \mathbf{t} - \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s} - \mathrm{ind}_0\, \mathbf{t} \right|$ ограничена, поэтому отличие отображения $\mathbf{s} \to \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s}$ от гомоморфизма конечно, что позволяет определить квазихарактер [49] по формуле $\chi(\mathbf{s}) := \mathrm{ind}_0\, \mathbf{s}$, который мы назовем *идеальным квазихарактером*. Элементы с отличным от нуля идеальным квазихарактером имеют равный нулю ниль-квазихарактер, определенный для элементов полугруппы $\mathbf{S}_{scf}$ по формуле, аналогичной (3.2). Отметим некоторые свойства идеального квазихарактера $\chi(\mathbf{s} * \mathbf{s}) = \chi(\mathbf{s}),\ \chi(\mathbf{e}) = \chi(\mathbf{g}) = \infty$ (см. также [94]). Из того факта, что множества $\mathbf{J}_n$, на которых определен идеальный квазихарактер, не пересекаются

($J_n \cap J_{n-1} = \emptyset$), следует вывод о том, что $\mathcal{X}(s)$ действительно разделяет элементы полугруппы, а отношение π, заданное формулой $\mathcal{X}(s) \overset{\pi}{\sim} \mathcal{X}(t)$, $s,t \in S_{scf}$, является отношением эквивалентности в суперконформной полугруппе.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, суперконформные полугруппы в теоретико-множественном отношении представляет собой довольно нетривиальные алгебраические объекты, обладающие новыми, далеко еще не изученными абстрактными свойствами. Их детальное изучение даст возможность анализа существующих суперсимметричных теорий под нестандартным углом зрения, используя несколько иной, чем в настоящее время общепринят физиками, математический аппарат. Это открывает перспективы дальнейшего построения и исследования новых конструкций и объектов будущей объединенной теории, в которой как основополагающий принцип рассматривается суперсимметрия, или ее обобщения, использующие нильпотенты (например, квантовые супергруппы [95]).

Автор выражает благодарность D.Arinkin, A.Comtet, V.G.Drinfeld, J.Kupsch, J.M.Howie, M.V.Lawson, B.V.Novikov, W.Ruhl, S.D.Sinelshchikov, J.Wess, A.S.Wightman за полезные обсуждения, а также J.-P.Ader, J.W.Baker, S.Cho, A.Eremenko, J.-L.Gervais, P.Grillet, C.Grosche, L.Hodgkin, T.Kobayashi, P.R.Jones, I.Levi, K.D.Magill, J.M.Rabin, T.Schmitt, A.Sudbery, G.Szasz за присланные работы.

Литература

[1] D. V. Volkov, V. P. Akulov, *JETP Lett* **16**, 621 (1972); J. Wess, B. Zumino, *Phys. Lett.* **B66**, 361 (1977); *Nucl. Phys.* **B70**, 39 (1974).

[2] J. H. Schwarz, *Phys. Reports* **89**, 223 (1982); M. B. Green, J. H. Schwarz, E. Witten, *Superstring Theory*, Vol. 1,2, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1987; M. Kaku, *Introduction to Superstrings*, Springer-Verlag, Berlin 1988; *Superstring Constructions*, Ed B. Schellekens, North Holland, Amsterdam 1989.

[3] S. J. Gates, M. T. Grisaru, M. Rocek, et al., *Superspace*, Benjamin, Reading 1983; J. Wess, J. Bagger, *Supersymmetry and Supergravity*, Princeton Univ. Press, Princeton 1983; P. van Nieuwenhuizen, P. West, *Principles of Supersymmetry and Supergravity*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1989.

[4] F. A. Berezin, G. I. Kac, *Math. Sbornik* **11**, 311 (1970); A. Rogers, *J. Math. Phys.* **22**, 939 (1981); D. Leites, V. Serganova, *Math. Scandinavica* **68**, 131 (1991); H. Boseck, *Math. Nachr.* **148**, 81 (1990); V. Hussin, L. M. Nieto, *J. Math. Phys.* **34**, 4199 (1993).

[5] E. S. Ljapin, *Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence 1968; A. H. Clifford, G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Vol. 1, Amer. Math. Soc., Providence 1961; Vol. 2, Amer. Math. Soc., Providence 1967; M. Petrich, *Introduction to Semigroups*, Merill, Columbus 1973; J. M. Howie, *An Introduction to Semigroup Theory*, Academic Press, London 1976; P. M. Higgins, *Techniques in Semigroup Theory*, Clarendon Press, Oxford 1992.

[6] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Clarendon Press, New York 1991; G. D'Ambra, M. Gromov, In *Surveys in Differential Geometry*, Lehigh University, Bethlehem 1991, p. 19; T. Petrie, J. D. Randall, *Transformation Groups on Manifolds*, Dekker, New York 1984.

[7] J. M. Howie, *Math. Chronicle* **16**, 1 (1987).

[8] S. Duplij, *J. Math. Phys.* **32**, 2959 (1991); *Sov. J. Nucl. Phys.* **52**, 742 (1990).

[9] S. Duplij, *Theor. Math. Phys.* **86**, 138 (1991); *J. Phys.* **A24**, 3167 (1991); *Acta Phys. Pol.* **B21**, 783 (1990).

[10] K. M. Kapp, H. Schneider, *Completely 0-simple Semigroups*, Benjamin, New York 1969.

[11] R. Gilmer, T. Parker, *Michigan Math. J.* **22**, 97 (1975); S. V. Pchelincev, *Math. Notes* **48**, 103 (1990); S. A. Naimpally, C. M. Pareek, *Quest. Answ. Gen. Topol.* **9**, 203 (1991).

[12] K. Sakai, *Sci. Repts Kagoshima Univ.* **36**, 13 (1987); R. Yue Chi Ming, *Demonstr. Math.* **23**, 929 (1990); C. K. Lai, K. P. Shum, *Czech. Math. J.* **39**, 578 (1989).

[13] G. Lallement, *Pacific J. Math.* **42**, 693 (1972); L. N. Shevrin, *Siberian Math. J.* **2**, 936 (1961); *Math. Sbornik* **55**, 473 (1961).

[14] P. A. Grillet, *Commun. Algebra* **19**, 3145 (1991); *Semigroup Forum* **43**, 187 (1991); **50**, 25 (1995); R. P. Sullivan, *J. Algebra* **110**, 324 (1987); *J. Austr. Math. Soc.* **A43**, 127 (1987).

[15] J. Meakin, *J. London Math. Soc.* **21**, 244 (1980); C. J. Ash, *J. Austr. Math. Soc.* **28**, 385 (1979).

[16] T. E. Hall, *Semigroup Forum* **6**, 263 (1973).

[17] K. D. Magill, *Glasgow Math. J.* **20**, 25 (1979); K. D. Magill, S. Subbiah, *Semigroup Forum* **22**, 89 (1981); K. D. Magill, P. R. Misra, *ibid.* **40**, 205 (1990); K. D. Magill, *ibid.* **25**, 383 (1982); I. Levi, *ibid.* **33**, 299 (1986).

[18] K. D. Magill, *Bull. Alld. Math. Soc.* **2**, 1 (1987).

[19] G. Lallement, *Semigroups and Combinatorial Applications*, Willey, New York 1979; N. U. Ahmed, *Semigroup Theory With Application to Systems and Control*, Wiley, New York 1991.

[20] J. M. Howie, In *Ordered Structures and Algebra of Computer Languages*, SEAMS Conference 1991; *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **88A**, 159 (1981); G. P. Szegö, G. Treccani, *Lect. Notes Math.* **101**, 1 (1969); B. M. Schein, *Abstracts Amer. Math. Soc.* **5**, 476 (1980); R. B. Feizullaev, *Soviet Math. Dokl.* **37**, 490 (1988); J. S. V. Symons, *J. Austr. Math. Soc.* **A22**, 385 (1976).

[21] M. Petrich, In *Semigroups and Their Applications*, Eds S. M. Goberstein, P. M. Higgins, D. Reidel, Dordrecht 1987, p. 133.

[22] K. D. Magill, *Semigroup Forum* **11**, 1 (1975); *Russian Math. Surv.* **35**, 91 (1980); L. B. Sneperman, *Soviet Math. Dokl.* **144**, 509 (1962); B. M. Schein,

Semigroup Forum **1**, 1 (1970); L. M. Gluskin, B. M. Schein, L. B. Sneperman, et al., *ibid.* **14**, 95 (1977).

[23] F. A. Cezus, K. D. Magill, S. Subbiah, *Bull. Austr. Math. Soc.* **12**, 211 (1975); V. B. Shteinbuk, A. P. Shostak, *Semigroup Forum* **43**, 135 (1991); M. N. Mukherjee, S.P. Sinha, *Mat. Vest.* **41**, 89 (1989); B. T. Lerner, *J.Math.Anal. Appl.* **134**, 306 (1988).

[24] V. Trnkova, *Topology Appl.* **33**, 147 (1989); J. C. Warndof, *Fund. Math.* **66**, 25 (1970).

[25] M. Petrich, *Lectures in Semigroups*, Academic Press, Berlin 1977; L. N. Shevrin, A. J. Ovsyannikov, *Semigroup Forum* **27**, 1 (1983); L. N. Shevrin, A. Ya. Ovsyannikov, *Semigroups and Their Subsemigroup Lattices. Part 1*, Ural. Gos. Univ., Sverdlovsk 1990; D. E. Rutherford, *Introduction to Lattice Theory*, Oliver and Boyd, Edinburgh 1965.

[26] A. Ja. Aizenstat, *Russian Math. Surv.* **4**, 12 (1963); *Izv. Vuzov. Math.* **1**, 3 (1965); J. Maxon, *Semigroup Forum* **5**, 77 (1972); A. Pultr, V. Trnkova, *Combinatorial, Algemraic and Topological Representations of Groups, Semigroups and Categories*, Prague Univ., Prague 1980.

[27] E. Hille, R. S. Phillips, *Functional Analysis and Semigroups*, Amer. Math. Soc., Providence 1957.

[28] R. J. H. Dawlings, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh* **A91**, 123 (1981); In *Semigroups*, Eds T. E. Hall, P. R. Jones, G. B. Preston, Academic Press, London 1980, p. 133.

[29] A. Eremenko, *Trans. Amer. Math. Soc.* **338**, 123 (1993); A. Hinkkanen, *Complex Variables Theory Appl.* **18**, 149 (1992).

[30] Yu. A. Neretin, *Math. Sbornik* **180**, 635 (1989); *Func. Anal. Appl.* **21**, 82 (1987).

[31] J. H. Carruth, J. A. Hilebrant, R. J. Koch, *The Theory of Topological Semigroups*, Vol. 1, Dekker, New York 1983; Vol. 2, 1986; A. Paalman de Miranda, *Topological Semigroups*, Math. Centrum, Amsterdam 1964; K. H. Hofmann, P. S. Mostert, *Elements of Compact Semigroups*, Merill, Columbus 1966.

[32] F. A. Berezin, D. A. Leites, *Soviet Math. Dokl.* **16**, 1218 (1975); B. Kostant, *Lett. Math. Phys.* **570**, 177 (1977); D. A. Leites, *Russian Math. Surv.* **35**, 1 (1980); D. Leites, *Supermanifold Theory*, Math. Methods Sci. Invest., Petrozavodsk 1983; Yu. I. Manin, *Gauge Field Theory and Complex Geometry*, Springer-Verlag, New York 1988; I. B. Penkov, *Inv. Math.* **71**, 501 (1981); *Seminar on Supermanifolds*, Ed D. Leites, Arterisque, Stockholm 1989.

[33] A. Rogers, *J. Math. Phys.* **21**, 1352 (1980).

[34] B. S. De Witt, *Supermanifolds*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1984.

[35] A. S. Schwarz, *Theor. Math. Phys.* **60**, 37 (1984); A. A. Voronov, *ibid.* **60**, 43 (1984); V. S. Vladimirov, I. V. Volovich, *ibid.* **59**, 3 (1984).

[36] A. Yu. Khrennikov, *Russian Math. Surv.* **43**, 87 (1988); *Theor. Math. Phys.* **72**, 24 (1987).

[37] O. A. Zakharov, *Izv. Vyzov. Phys.* **32**, 65 (1989); U. Bruzzo, *Hadronic J.* **9**, 25 (1986); M. A. Vandyk, *Gen. Rel. Grav.* **22**, 1259 (1990); J. L. Carr, *Class. Q. Grav.* **6**, 125 (1989).

[38] C. Bartocci, U. Bruzzo, D. Hernandez Ruiperez, *The Geometry of Supermanifolds*, Kluwer, Dordrecht 1991; C. Bartocci, U. Bruzzo, V. G. Pestov, et al., *Soviet Math. Dokl.* **321**, 649 (1991).

[39] M. Batchelor, *Trans. Amer. Math. Soc.* **258**, 257 (1980); In *Mathematical Aspects of Superspace*, Eds C. J. S. Clarke, A. Rosenblum, H. J. Seifert, Reidel, Dordrecht 1984, p. 91.

[40] D. Leites, *Duke Math. J.* **54**, 649 (1987).

[41] V. N. Shander, *Func. Anal. Appl.* **14**, 88 (1980); C. Bartocci, U. Bruzzo, *J. Geom. Phys.* **4**, 391 (1987); *Lett. Math. Phys.* **17**, 263 (1989); U. Bruzzo, R. Cianci, *Class. Q. Grav.* **1**, 213 (1984).

[42] R. Coquereaux, A. Jadczyk, D. Kastler, *Rev. Math. Phys.* **3**, 63 (1991); A. M. Levin, *Russian Math. Surv.* **41**, 189 (1986); T. Voronov, *Geometric Integration on Supermanifolds*, Gordon and Breach, New York 1991; J. M. Rabin, San Diego Preprint 1993.

[43] J. M. Rabin, L. Crain, *Commun. Math. Phys.* **102**, 123 (1985).

[44] A. Yu. Khrennikov, *Math. Notes* **48**, 114 (1990).

[45] Yu. A. Yappa, *Lett. Math. Phys.* **14**, 157 (1987).

[46] T. Schmitt, *J. Geom. Phys.* **7**, 141 (1990).

[47] C. P. Boyer, S. Gitler, *Trans. Amer. Math. Soc.* **285**, 241 (1984).

[48] R. Catenacci, C. Reina, P. Teofilatto, *J. Math. Phys.* **26**, 671 (1985).

[49] D. Kazhdan, *Israel J. Math.* **43**, 315 (1982); A. I. Shtern, *Func. Anal. Appl.* **25**, 140 (1991).

[50] J. M. Rabin, L. Crane, *Commun. Math. Phys.* **100**, 141 (1985).

[51] V. G. Pestov, *J. Geom. Phys.* **10**, 295 (1993); A. Inoue, Y. Maeda, *Kodai Math. J.* **14**, 72 (1991); O. G. Smolyanov, E. T. Shavgulidze, *Soviet Math. Dokl.* **37**, 476 (1988); **40**, 135 (1990).

[52] A. Rogers, *Commun. Math. Phys.* **105**, 374 (1986); S. Matsumoto, K. Kakazu, *J. Math. Phys.* **27**, 2690 (1986); T. Schmitt, In *Seminar Analysis of the Karl-Weierstrass-Institute*, Teubner, Leipzig 1988, p. 256; R. Cianci, In *Symmetries in Science*, Plenum Press, New York 1989, p. 147.

[53] V. D. Ivashchuk, *Theor. Math. Phys.* **79**, 30 (1989); **84**, 13 (1990).

[54] V. Pestov, *J. Math. Phys.* **33**, 3263 (1992).

[55] V. G. Pestov, *Soviet Math. Dokl.* **317**, 565 (1991); V. Pestov, *Rev. Math. Phys.* **29**, 275 (1991).

[56] F. A. Berezin, M. S. Marinov, *Ann. Phys.* **104**, 336 (1977); F. Ravndal, *Phys. Rev.* **D21**, 2828 (1980); N. Mankoc-Borstnik, *J. Math. Phys.* **34**, 3731 (1993).

[57] Yu. I. Manin, *Russian Math. Surv.* **39**, 51 (1984).

[58] F. A. Berezin, *Introduction to Superanalysis*, Reidel, Dordrecht 1987.

[59] A. S. Schwarz, UC Davis preprint-94-06-01, HEP-TH-9406120 1994.

[60] V. V. Minachin, *Func. Anal. Appl.* **22**, 90 (1988).

[61] B. A. Dubrovin, A. T. Fomenko, S. P. Novikov, *Modern Geometry. Methods and Applications. Part 1. The Geometry of Surfaces, Transformation Groups and Fields*, Springer-Verlag, Berlin 1984; Part 2. The Geometry and Topology of Manifolds, Springer-Verlag, Berlin 1985.

[62] V. N. Shander, *Func. Anal. Appl.* **22**, 91 (1988).

[63] A. M. Baranov, Yu. I. Manin, I. V. Frolov, et al., *Commun. Math. Phys.* **111**, 373 (1987); M. A. Baranov, I. V. Frolov, A. S. Schwarz, *Theor. Math. Phys.* **79**, 241 (1989).

[64] E. D'Hoker, D. H. Phong, *Rev. Mod. Phys.* **60**, 917 (1988); Univ. California preprint UCLA/89/TEP/32, Los Angeles 1989; C. Grosche, *Commun. Math. Phys.* **133**, 433 (1990).

[65] R. Gilmer, *Multiplicative Ideal Theory*, Dekker, New York 1972; M. D. Larsen, P. J. McCarthy, *Multiplicative Theory of Ideals*, Academic Press, New York 1971; A. Császár, E. Thümmel, *Acta Math. Hung.* **56**, 189 (1990).

[66] A. M. Baranov, A. S. Schwarz, *Int. J. Mod. Phys.* **A2**, 1773 (1987); A. M. Polyakov, *Gauge Fields and Strings*, Harwood Academic, London 1987.

[67] J. W. Baker, J. S. Pym, *Glasgow Math. J.* **34**, 27 (1992); R. D. Hofer, *Proc. London Math. Soc.* **25**, 358 (1972); E. M. Vechtomov, *Russian Math. Surv.* **45**, 143 (1990).

[68] W. H. Hsiang, *An. Inst. Math. Univ. Nac. Aut. Mexico* **28**, 27 (1988); W. Dick, J. Levin, *Commun. Algebra* **10**, 1285 (1982).

[69] C. LeBrun, M. Rothstein, *Commun. Math. Phys.* **117**, 159 (1988).

[70] J. M. Rabin, P. Topiwala, San Diego preprint 1988; L. Crane, J. M. Rabin, *Commun. Math. Phys.* **113**, 601 (1988); J. M. Rabin, In *Physics and Geometry*, Eds L.-L. Chau, W. Nahm, Plenum Press, New York 1991, p. 653.

[71] S. B. Giddings, P. Nelson, *Commun. Math. Phys.* **116**, 607 (1988); S.B. Giddings, P. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2619 (1987).

[72] D. Friedan, In *Unified String Theories*, Eds M. Green, D. Gross, World Sci., Singapore 1986, p. 118.

[73] M. A. Baranov, I. V. Frolov, A. S. Schwarz, *Theor. Math. Phys.* **70**, 92 (1987); A. A. Rosly, A. S. Schwarz, A. A. Voronov, *Commun. Math. Phys.* **119**, 129 (1988).

[74] J. Distler, P. Nelson, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 1955 (1991); S. Govindarajan, P. Nelson, S.-J. Rey, *Nucl. Phys.* **B365**, 633 (1991); S. Govindarajan, P. Nelson, E. Wong, *Commun. Math. Phys.* **147**, 253 (1992).

[75] S. B. Giddings, P. Nelson, *Commun. Math. Phys.* **118**, 289 (1988); L. Hodgkin, *J. Geom. Phys.* **6**, 333 (1989); A. Rogers, In *The Interface of Mathematics and Particle Physics*, Eds D. G. Quillen, G. B. Segal, S. T. Tson, Clarendon Press, New York 1990, p. 87.

[76] A. Rogers, King's College Preprint, London, KCL-TH-94-07, HEP-TH-9405177 1994.

[77] J. D. Cohn, *Nucl. Phys.* **B306**, 239 (1988); K. Schoutens, *ibid.* **B295**, 634 (1988); S. N. Dolgikh, A. A. Rosly, A. S. Schwarz, *Commun. Math. Phys.* **135**, 91 (1990).

[78] A. M. Levin, *Func. Anal. Appl.* **21**, 83 (1987); P. Teofilatto, *Lett. Math. Phys.* **14**, 271 (1987); H. Kanno, Y. Myung, *Phys. Rev.* **40**, 1974 (1989); G. Konisi, T. Saito, W. Takahasi, *Progr. Theor. Phys.* **92**, 889 (1994).

[79] I. L. Mel'nichuk, *Semigroup Forum* **39**, 105 (1989).

[80] S. Z. Li, *Pure Appl.Math.* **9**, 105 (1993).

[81] W. B. Vasantha Kandasamy, *Libertas Math.* **12**, 35 (1992).

[82] P.Y. Zhu, *South Asian Bull. Math.* **1515**, 99 (1991); A. Cherubini, A. Varisco, *Semigroup Forum* **28**, 155 (1984); A. Anjaneyulu, *ibid.* **22**, 257 (1981).

[83] J. Ahsan, *Kobe J. Math.* **7**, 25 (1990); R. D. Giri, A. K. Wazalwar, *Kyungpook Math. J.* **33**, 37 (1993); Y. S. Park, J. P. Kim, M. G. Sohn, *Math. Japon.* **33**, 269 (1988); H. Kim, *J. Korean Math. Soc.* **24**, 207 (1987).

[84] P. A. Grillet, M. Petrich, *Pacific J. Math.* **26**, 493 (1968); S. Bogdanović, M. Ćirić, *Proc. Japan Acad.* **A68**, 115 (1992); **A68**, 126 (1992); L. M. Wang, *Semigroup Forum* **47**, 353 (1993).

[85] O. Steinfeld, Tran Thanh Thang, *Beiträge Alg. Geom.* **26**, 127 (1988); A. H. Clifford, *Semigroup Forum* **16**, 183 (1978); O. Steinfeld, *Quasi-ideals in Rings and Semigroups*, Akadémiai Kiado, Budapest 1978.

[86] M. M. Miccoli, *Note Mat.* 7, 83 (1987); F. Catino, *Riv. Mat. Pure Appl.* **4**, 89 (1989); S. Lajos, *Acta Sci. Math. Seged* **22**, 217 (1961); *Pure Math. Appl.* **A2**, 215 (1992).

[87] J. M. Howie, R. B. McFadden, *Semigroup Forum* **40**, 247 (1990).

[88] I. L. Hmelnitsky, *Semigroup Forum* **32**, 135 (1985); L.N. Shevrin, A. S. Prosvirov, *Trans. Moscow Math. Soc.* **29**, 235 (1973); D. Y. Long, *Chinese Ann. Math.* **A13**, 360 (1992).

[89] J. A. Huckaba, *Commutative Rings with Zero Divizors*, Dekker, New York 1988; S. Visweswaran, *Bull. Austr. Math. Soc.* **43**, 233 (1991).

[90] G. M. S. Gomes, J. M. Howie, *Proc. Edinburgh Math. Soc.* **30**, 383 (1987); G. U. Garba, *Semigroup Forum* **48**, 37 (1994); M. Yamada, *Proc. Japan Acad.* **40**, 94 (1964).

[91] I. Levi, W. Williams, *Semigroup Forum* **43**, 344 (1991); I. Levi, *Glasgow Math. J.* **29**, 149 (1987); I. Levi, S. Seif, *Semigroup Forum* **43**, 93 (1991); I. Levi, Louisville preprint 1992.

[92] B. M. Schein, In *Semigroups with applications*, Eds J. M. Howie, W.D. Munn, H. J. Weinert, World Sci., River Edge 1992, p. 205.

[93] L. Anderson, R. Hunter, R. Koch, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117**, 521 (1965).

[94] P. Harpe, M. Karoubi, *Manuscr. Math.* **22**, 293 (1977); M. Satyanarayana, *Beiträge Alg. Geom.* **27**, 121 (1988); D. R. Brown, M. Friedberg, *Trans. Amer. Math. Soc.* **141**, 387 (1969).

[95] Yu. Manin, *Commun. Math. Phys.* **123**, 123 (1989); Yu. I. Manin, *Topics in Noncommutative Differential Geometry*, Princeton University Press, Princeton 1991; S. M. Khoroshkin, V. N. Tolstoy, *Commun. Math. Phys.* **141**, 599 (1991); R. Chakrabarti, R. Jagannathan, *J. Phys.* **A24**, 5863 (1991); M. Scheunert, *J. Math. Phys.* **34**, 3780 (1993); R. B. Zhang, *ibid.* **32**, 2605 (1991); J.R. Links, M. Scheunert, M. D. Gould, *Lett. Math. Phys.* **32**, 231 (1994).