Вестник Харьковского национального университета (серия «Ядра, частицы, поля»), 2007, Т. 781.- № 3(35), С. 53-62.

УДК 539.12

НЕЛИНЕЙНАЯ СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

С.А. Дуплий[1], Дж.А. Голдин[2], В.М. Штелень[3]
[1]*Физико-технический факультет, Харьковский национальный университет им. В.Н. Каразина*
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина
steven.a.duplij@univer.kharkov.ua, http://webusers.physics.umn.edu/~duplij
[2]*Departments of Mathematics and Physics, Rutgers University*
Piscataway, NJ 08854, USA
geraldgoldin@dimacs.rutgers.edu, http://www.physics.rutgers.edu/people/pips/Goldin.html
[3]*Department of Mathematics, Rutgers University*
Piscataway, NJ 08854, USA
shtelen@math.rutgers.edu, http://www.math.rutgers.edu/~shtelen

Поступила в редакцию 15 сентября 2007 г.

В работе предложен обобщенный подход к нелинейной классической электродинамике и суперсимметричной электродинамике, который учитывает максимально возможные виды сред (анизотропные, пироэлектрические, киральные и ферромагнитные), возможные нелокальные эффекты и описывает как лагранжевы, так и нелагранжевы теории. Введены в рассмотрение обобщенные материальные уравнения и конститутивные тензоры самого общего вида. Рассматривается электромагнитная дуальность в терминах введенных тензоров. Предложено суперсимметричное обобщение материальных уравнений в суперполевом виде.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: материальные уравнения, нелинейная электродинамика, дуальность, суперсимметрия, суперполе

Хорошо известно, что для описания классических электромагнитных полей в средах одних уравнений Максвелла недостаточно, и вводятся так называемые материальные уравнения [1, 2]. Эти уравнения связи представляют собой дополнительные функциональные (линейные или нелинейные [3]) соотношения между напряженностями электрического и магнитного полей $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$ и соответствующими индукциями $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$. Явный вид материальных уравнений определяется свойствами среды и возможными симметриями [4]. С другой стороны, считалось, что лоренц-инвариантность уравнений Максвелла несовместима с галилеевой симметрией. Однако еще в работе [5] было показано, что это проблема именно материальных уравнений, а сами уравнения Максвелла в среде инвариантны относительно обеих симметрий; в этой работе также исследовался галилеев предел при линейных материальных уравнениях, но с дополнительными связями на электромагнитные поля. Более того, в [6] был сделан вывод о том, что в случае линейных материальных уравнений построение галилеево-инвариантной теории невозможно. Тем не менее, выход был найден в привлечении нелиненых материальных уравнений [7, 8], что позволило построить галилеево-инвариантную электродинамику, в которой возможно распространение волн при конечной скорости, в то время, как в линейной галилеево-инвариантной теории эта скорость бесконечна (см. обсуждение в [5]). Необходимость такой теории диктуется экспериментами по измерению скорости света в средах (например, экспериментальные результаты [9] показали возможность замедления скорости света до 17 м/сек).

Целью данной работы является получение наиболее общего вида нелинейных материальных уравнений, которые приводят к лагранжевой и нелагранжевой классической электродинамике, допускающей нетривиальный галилеев предел. При этом вид самих уравнений Максвелла не меняется. Также в работе предложено суперсимметричное обобщение материальных уравнений для суперсимметричной электродинамики в суперполевом виде.

ЛОРЕНЦЕВЫ И ГАЛИЛЕЕВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА

Вначале запишем уравнения Максвелла [1] для классических электромагнитных полей в системе СИ, то есть в таком виде, чтобы скорость света c не входила в определение фундаментальных полей [2]. Это, в частности, позволяет получить галилееву теорию как нетривиальный предел $c \to \infty$ релятивистской теории [7].

Поскольку хорошо известно [1], что статическое гравитационное поле эффективно действует как гиротропная среда с диэлектрической и магнитной проницаемостями ε_{grav} и μ_{grav}, то мы ограничимся рассмотрением теории в плоском пространстве-времени, которое определяется метрикой Минковского $\eta_{\mu\nu} = (1, -1, -1, -1)$, $x^{\mu} = \left(ct, x^{i}\right)$, $\mu, v... = 0, 1, 2, 3$, $i, j... = 1, 2, 3$ с $\partial_{\mu} = \partial/\partial x^{\mu} = \left[c^{-1}\partial/\partial t, \nabla\right]$ и антисимметричным тезором Леви-Чивита $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$, $\varepsilon^{0123} = 1$. В этих обозначениях уравнения Максвелла запишутся в виде (не содержащем явно скорость света c)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho, \tag{2}$$

где $\mathbf{j}$ и ρ плотности тока и заряда. Уравнения Максвелла (1)–(2) инвариантны относительно преобразований Лоренца $[1,2]$. Например, при преобразованиях

$$x'_{||} = \gamma\left(\mathbf{x} - \mathbf{v}t\right)_{||}, \;\; x'_{\perp} = x_{\perp}, \;\; t' = \gamma\left(t - \frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right), \;\; \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \tag{3}$$

плотности тока и заряда преобразуются как

$$j'_{||} = \gamma\left(\mathbf{j} - \mathbf{v}\rho\right)_{||}, \;\; j'_{\perp} = j_{\perp}, \;\; \rho' = \gamma\left(\rho - \frac{\mathbf{j}\cdot\mathbf{v}}{c^2}\right), \tag{4}$$

а поля преобразуются соответственно как

$$E'_{||} \;=\; E_{||}, \;\; E'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)_{\perp}, \;\; B'_{||} = B_{||}, \;\; B'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{E}\right)_{\perp}, \tag{5}$$

$$D'_{||} \;=\; D_{||}, \;\; D'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{v}\times\mathbf{H}\right)_{\perp}, \;\; H'_{||} = H_{||}, \;\; H'_{\perp} = \gamma\left(\mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}\right)_{\perp}. \tag{6}$$

Отметим, что имеется 6 лоренц-инвариантов

$$C_1 = \mathbf{B}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{E}^2, \; C_2 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E}, \; \mathbf{C}_3 = \mathbf{D}^2 - \frac{1}{c^2}\mathbf{H}^2, \; C_4 = \mathbf{D}\cdot\mathbf{H}, \; C_5 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{H} - \mathbf{E}\cdot\mathbf{D}, \; C_6 = \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} + \frac{1}{c^2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{H}. \tag{7}$$

Можно проверить, что уравнения Максвелла (1)–(2) инвариантны также относительно галилеевых преобразований

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \;\; t' = t, \;\; \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}, \;\; \mathbf{B}' = \mathbf{B}, \;\; \mathbf{D}' = \mathbf{D}, \;\; \mathbf{H}' = \mathbf{H} - \mathbf{v}\times\mathbf{D}, \;\; \mathbf{j}' = \mathbf{j} - \mathbf{v}\rho, \;\; \rho' = \rho, \tag{8}$$

которые, очевидно, есть предел $c \to \infty$ преобразований Лоренца (5)–(6). Преобразования Лоренца и Галилея вместе принадлежат к общей группе линейных преобразовний $GL\left(4, \mathbb{R}\right)$, допускаемые уравнениями Максвелла, что есть следствие неполноты системы (1)–(2): 8 уравнений для 12 неизвестных функций. Таким образом, необходимы дополнительные соотношения между полями $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{H}$, которые и будут нарушать группу $GL\left(4, \mathbb{R}\right)$ до группы Лоренца или Галилея [7]. Другие варианты такого нарушения рассмотрены в [3], где также отмечается, что уравнения Максвелла (1)–(2) в отсутствие материальных уравнений общековариантны, то есть инвариантны относительно бесконечномерной группы Ли дифференцируемых преобразований $x'_{\mu} = f_{\mu}\left(x\right)$, если на многообразии не введена метрика или аффинная связность (см. также [10]).

В четырехмерных обозначениях вводятся антисимметричные тензоры напряженностей

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{c}E_x & \frac{1}{c}E_y & \frac{1}{c}E_z \\ -\frac{1}{c}E_x & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{1}{c}E_y & B_z & 0 & -B_x \\ -\frac{1}{c}E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & cD_x & cD_y & cD_z \\ -cD_x & 0 & -H_z & H_y \\ -cD_y & H_z & 0 & -H_x \\ -cD_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

и Ходж дуальные напряженности $\tilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ и $\tilde{G}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}G_{\rho\sigma}$. В этих обозначениях уравнения Максвелла имеют вид

$$\partial_{\mu}\tilde{F}^{\mu\nu} = 0, \qquad \partial_{\mu}G^{\mu\nu} = j^{\nu}, \tag{10}$$

где $j^{\mu} = \left(c\rho, \mathbf{j}\right)$ — 4-ток. Решением первого уравнения в (10) является $F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu}$, где A_{μ} — абелево калибровочное поле. Отметим, что подобного представления для $G_{\mu\nu}$ не существует.

НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Физически наблюдаемыми величинами считаются поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, поскольку ими определяется сила Лоренца $\mathbf{F} = q\left(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)$ для заряда q, движущегося со скоростью $\mathbf{v}$. В то же время поля $\mathbf{D}$ и $\mathbf{H}$ определяются свойствами среды (поляризуемостью и намагничиванием соответственно) и зависят также от физически наблюдаемых полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$, так что в общем виде можно записать

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}\left(\mathbf{E}, \mathbf{B}\right), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}\left(\mathbf{E}, \mathbf{B}\right). \tag{11}$$

Эти уравнения называются материальными уравнениями (а также уравнениями связи или уравнениями состояния). В простейшем случае теории в вакууме они линейны $\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, где ε_0 и μ_0 — диэлектрическая и магнитная проницаемости, причем $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. В работе [4] показано, что, если материальные уравнения имеют вид

$$\mathbf{D} = \varepsilon\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right) \mathbf{E}, \qquad \mathbf{B} = \mu\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right) \mathbf{H}, \tag{12}$$

где $\varepsilon\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right)$, и $\mu\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right)$ произвольные гладкие функции, удовлетворяющие соотношению $\varepsilon\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right) \mu\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right) = c^{-2}$, то теория (без зарядов и токов) обладает Пуанкаре симметрией. Кроме того, тот же вывод справедлив и для функциональной зависимости более общего вида $\mathbf{D} = \mathbf{D}\left(\mathbf{E}, \mathbf{H}\right)$, $\mathbf{B} = \mathbf{B}\left(\mathbf{H}\right)$ [3, 4]. Если теория лоренц-инвариантна, то самые общие нелинейные материальные уравнения имеют следующий вид [3, 7]

$$\mathbf{D} = M\left(C_1, C_2\right) \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} N\left(C_1, C_2\right) \mathbf{E}, \tag{13}$$

$$\mathbf{H} = N\left(C_1, C_2\right) \mathbf{B} - M\left(C_1, C_2\right) \mathbf{E}, \tag{14}$$

где $M\left(C_1, C_2\right)$ и $N\left(C_1, C_2\right)$ — гладкие функции двух первых лоренц-инвариантов из (7). Поскольку $C_1 = C_1\left(\mathbf{B}, \mathbf{E}\right)$ и $C_2 = C_2\left(\mathbf{B}, \mathbf{E}\right)$, зависимости (13)–(14) существенно нелинейны. Отметим. что при наличии материальных уравнений вида (13)–(14) остальные лоренц-инварианты выражаются через C_1 и C_2 формулами

$$C_3 = \left(M^2\left(C_1, C_2\right) - \frac{1}{c^2} N^2\left(C_1, C_2\right)\right) C_1 + \frac{4}{c^2} M\left(C_1, C_2\right) N\left(C_1, C_2\right) C_2, \tag{15}$$

$$C_4 = M\left(C_1, C_2\right) N\left(C_1, C_2\right) C_1 - \left(M^2\left(C_1, C_2\right) - \frac{1}{c^2} N^2\left(C_1, C_2\right)\right) C_2, \tag{16}$$

$$C_5 = N\left(C_1, C_2\right) C_1 - 2M\left(C_1, C_2\right) C_2, \tag{17}$$

$$C_6 = M\left(C_1, C_2\right) C_1 + \frac{2}{c^2} N\left(C_1, C_2\right). \tag{18}$$

В простейшем случае теории в вакууме имеем

$$M_{vac}\left(C_1, C_2\right) = 0, \qquad N_{vac}\left(C_1, C_2\right) = \frac{1}{\mu_0} \tag{19}$$

с учетом того, что $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$. Если система обладает конформной инвариантностью, то нелинейные функции инвариантов зависят только от их отношения [4]

$$M\left(C_1, C_2\right) = M_{conf}\left(\frac{C_1}{C_2}\right), \qquad N\left(C_1, C_2\right) = N_{conf}\left(\frac{C_1}{C_2}\right). \tag{20}$$

Нетривиальным примером нелинейной электродинамики является теория Борна-Инфельда [11], для которой

$$M\left(C_1, C_2\right) = \frac{C_2}{\mu_0 b^2 \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} C_1 - \frac{c^2}{b^4} C_2^2}}, \tag{21}$$

$$N\left(C_1, C_2\right) = \frac{1}{\mu_0 \sqrt{1 + \frac{c^2}{b^2} C_1 - \frac{c^2}{b^4} C_2^2}}, \tag{22}$$

где b — максимальная напряженность электрического поля в пределе, когда магнитное поле стремится к нулю. Из сравнения (20) и (21)–(22) следует, что электродинамика Борна-Инфельда не является конформной инвариантной теорией.

Важно подчеркнуть, что функция $M\left(C_1, C_2\right)$ не может быть константой, отличной от нуля, а есть существенно нелинейная фунция, что следует из дополнительной симметрии теории, описываемой уравнениями Максвелла совместно с материальными уравнениями вида (13)–(14). Действительно, пусть $M\left(C_1, C_2\right) = m = const$. Тогда уравнения Максвелла для наблюдаемых полей $\mathbf{B}$ и $\mathbf{E}$ будут иметь вид

$$\frac{1}{c^2} \operatorname{div}\left(N\left(C_1, C_2\right) \mathbf{E}\right) = \rho, \tag{23}$$

$$\operatorname{rot}\left(N\left(C_1, C_2\right) \mathbf{B}\right) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial\left(N\left(C_1, C_2\right) \mathbf{E}\right)}{\partial t} + \mathbf{j}, \tag{24}$$

который не содержит m, поэтому всегда можно выбрать “калибровку” $m = 0$.

ГАЛИЛЕЕВА ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Поскольку в выбранных обозначениях скорость света не входит в уравнения Максвелла, галилеева электродинамика, соответствующая нарушению полной линейной группы симметрии уравнений Максвелла $GL\left(4,\mathbb{R}\right)$ до галилеевой группы преобразований (8), может быть получена как формальный предел $c\to\infty$ одних лишь материальных уравнений (13)–(14). Тогда для галилеево-инвариантных материальных уравнений получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= M^{G}\left(G_1,G_2\right)\mathbf{B}, &(25)\\ \mathbf{H} &= N^{G}\left(G_1,G_2\right)\mathbf{B}-M^{G}\left(G_1,G_2\right)\mathbf{E}, &(26)\end{aligned}$$

где G_1,G_2 — первые два галилеевых инварианта из 6, получаемых из (7) $c\to\infty$ пределом, то есть

$$G_1=\mathbf{B}^2,\ G_2=\mathbf{B}\cdot\mathbf{E},\ G_3=\mathbf{D}^2,\ G_4=\mathbf{D}\cdot\mathbf{H},\ G_5=\mathbf{B}\cdot\mathbf{H}-\mathbf{E}\cdot\mathbf{D},\ G_6=\mathbf{B}\cdot\mathbf{D}. \tag{27}$$

Отметим, что остальные галилеевы инварианты выражаются через первые два инварианта формулами

$$\begin{aligned}G_3 &= M^{G2}\left(G_1,G_2\right)G_1, &(28)\\ G_4 &= M^{G}\left(G_1,G_2\right)N^{G}\left(G_1,G_2\right)G_1-M^{G2}\left(G_1,G_2\right)G_2, &(29)\\ G_5 &= N^{G}\left(G_1,G_2\right)G_1-2M^{G}\left(G_1,G_2\right)G_2, &(30)\\ G_6 &= M^{G}\left(G_1,G_2\right)G_1, &(31)\end{aligned}$$

которые являются $c\to\infty$ пределом формул (15)–(18).

В данном подходе галилеева электродинамика является существенно нелинейной теорией, поскольку отличная от нуля плотность заряда несовместима с постоянством функции $M^{G}\left(G_1,G_2\right)$. Так, пусть $M^{G}\left(G_1,G_2\right)=m=const$, тогда из материального уравнения (25) и уравнений Максвелла следует, что $\operatorname{div}\mathbf{D}=m\operatorname{div}\mathbf{B}=0$ всегда, что несовместимо с уравнением $\operatorname{div}\mathbf{D}=\rho$ при $\rho\neq0$.

Частные случаи галилеевой электродинамики при выборе нелинейных функций

$$\begin{aligned}M^{G}\left(G_1,G_2\right) &= 0, \qquad N^{G}\left(G_1,G_2\right)=G_2 \quad (\text{с } \rho=0), &(32)\\ M^{G}\left(G_1,G_2\right) &= G_2, \quad N^{G}\left(G_1,G_2\right)=\mu_0^{-1} \quad (\text{с } \rho\neq0) &(33)\end{aligned}$$

рассматривались в работе [7], где также обсуждались отличия данного подхода от предшествующих (см. [5, 6]).

ОБОБЩЕННЫЕ НЕЛИНЕЙНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Рассмотрим нелинейные материальные уравнения (13)–(14) в 4-инвариантном виде [8]

$$G_{\mu\nu}=N\left(C_1,C_2\right)F_{\mu\nu}+cM\left(C_1,C_2\right)\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{34}$$

где лоренц-инварианты C_1, C_2 из (7) выражаются теперь через напряженности формулами

$$C_1=\frac{1}{2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\equiv2X,\qquad C_2=-\frac{c}{4}F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}\equiv-cY, \tag{35}$$

где лоренц-инвариантные величины X, Y введены для удобства работы в 4D обозначениях.

Если взять от (34) Ходж-сопряжение и представить эту пару уравнений в виде

$$\begin{pmatrix}G_{\mu\nu}\\ \tilde{G}_{\mu\nu}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}N\left(C_1,C_2\right) & cM\left(C_1,C_2\right)\\ -cM\left(C_1,C_2\right) & N\left(C_1,C_2\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_{\mu\nu}\\ \tilde{F}_{\mu\nu}\end{pmatrix}, \tag{36}$$

то в пространстве “спиноров”

$$\Pi^{F}=\begin{pmatrix}F_{\mu\nu}\\ \tilde{F}_{\mu\nu}\end{pmatrix},\quad \Pi^{G}=\begin{pmatrix}G_{\mu\nu}\\ \tilde{G}_{\mu\nu}\end{pmatrix} \tag{37}$$

можно заметить кватернионную структуру (аналогично [12])

$$\Pi^{G}=\mathbb{Q}\cdot\Pi^{F}, \tag{38}$$

где кватернион $\mathbb{Q}$ определяется формулой

$$\mathbb{Q}=N\left(C_1,C_2\right)\sigma_0+icM\left(C_1,C_2\right)\sigma_2 \tag{39}$$

и $\sigma_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ — матрицы Паули в этом пространстве.

Несмотря на достаточную общность, материальные уравнения вида (13)–(14) и (34) не учитывают, например, анизотропные среды [13], пироэлектрические и ферромагнитные материалы, киральные среды [14], нелокальные эффекты. Поэтому самым общим выражением, учитывающим все перечисленные варианты сред, будет

$$G_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} + R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} + Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda_1}} + Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\lambda_2} \frac{\partial F_{\rho\sigma}}{\partial x^{\lambda_1} \partial x^{\lambda_2}} + \ldots, \tag{40}$$

где мы ввели три типа материальных тензоров $S_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$, каждый из которых отвечает своему типу среды. Поскольку теперь формула (40) покрывает все возможные типы материальных уравнений, то рассматриваемые вместе (40) и уравнения Максвелла (10) определяют обобщенную нелинейную классическую электродинамику, которая описывает все типы материальных сред.

Для того, чтобы теория было лоренц-инвариантной все материальные тензоры должны зависеть от лоренц-инвариантов X, Y следующим образом: $S_{\mu\nu}$ — константа,

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}\left(X, Y\right), \qquad Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}\left(X, Y, \ldots\right), \tag{41}$$

где “$\ldots$” означают производные инвариантов вплоть до порядка n.

Очевидно, что $S_{\mu\nu}$ — антисимметричный, $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ — антисимметричный по верхним и по нижним индексам, $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$ — антисимметричный по верхним и по первым двум нижним индексам и симметричный по остальным индексам λ_i лоренцевы тензоры.

Рассмотрим некоторые примеры. Для простейшего случая вакуума имеем[1]

$$S_{\mu\nu} = 0, \quad R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \mu_0^{-1} \delta_{[\mu}^{\rho} \delta_{\nu]}^{\sigma}, \quad Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = 0, \tag{42}$$

так, что единственный материальный тензор $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ "диагонален". Для электродинамики Борна-Инфельда имеем

$$S_{\mu\nu} = 0, \tag{43}$$

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = \frac{\delta_{[\mu}^{\rho} \delta_{\nu]}^{\sigma} - \dfrac{c^2}{b^2} Y \varepsilon_{[\mu\nu]\lambda\delta} \eta^{\lambda\rho} \eta^{\delta\sigma}}{\mu_0 \sqrt{1 + 2\dfrac{c^2}{b^2} X - \dfrac{c^4}{b^4} Y^2}}, \tag{44}$$

$$Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = 0. \tag{45}$$

Рассмотрим анизотропную среду с тензорными проницаемостями ε_{ij} и μ_{ij} $(i, j = x, y, z)$, тогда материальные уравнения (не описываемые формулами вида (13)–(14)) будут иметь вид $\mathbf{D}_i = \varepsilon_{ij} \mathbf{E}_j$, $\mathbf{B}_i = \mu_{ij} \mathbf{H}_j$, для которых материальный тензор $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ легко может быть найден, а остальные $S_{\mu\nu}$ и $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$ зануляются. Случай, когда $S_{\mu\nu} \neq 0$, соответствует пироэлектрическим и ферромагнитным материалам и будет рассмотрен отдельно.

ЛАГРАНЖЕВА НЕЛИНЕЙНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Пусть мы имеем лагранжиан $L\left(X, Y\right)$, зависящий от лоренцевых инвариантов и описывающий нелинейную классическую электродинамику. Тогда из материального уравнения (34) имеем

$$G_{\mu\nu} = -\frac{\partial L\left(X, Y\right)}{\partial X} F_{\mu\nu} - \frac{\partial L\left(X, Y\right)}{\partial Y} \tilde{F}_{\mu\nu}. \tag{46}$$

Сравнивая (40) and (46), получаем материальные тензоры для обобщенной лагранжевой нелинейной электродинамики

$$S_{\mu\nu} = 0, \tag{47}$$

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma} = -\frac{\partial L\left(X, Y\right)}{\partial X} \delta_{[\mu}^{\rho} \delta_{\nu]}^{\sigma} - \frac{\partial L\left(X, Y\right)}{\partial Y} \varepsilon_{[\mu\nu]\lambda\delta} \eta^{\lambda\rho} \eta^{\delta\sigma}, \tag{48}$$

$$Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n} = 0. \tag{49}$$

В этом случае нелинейные функции M and N из (13)–(14) имеют специальный вид

$$N_L\left(X, Y\right) = -\frac{\partial L\left(X, Y\right)}{\partial X}, \qquad M_L\left(X, Y\right) = -\frac{1}{c} \frac{\partial L\left(X, Y\right)}{\partial Y}. \tag{50}$$

---

[1] Квадратными скобками обозначена антисимметризация с учетом множителя, то есть $x_{[\mu\nu]} \equiv \left(x_{\mu\nu} - x_{\nu\mu}\right)/2$.

Таким образом, для того, чтобы материальные уравнения вида (34) совместно с уравнениями Максвелла описывали лагранжеву нелинейную электродинамику, необходимо, чтобы функции $M\left(X,Y\right)$ и $N\left(X,Y\right)$ были связаны условием “лагранжевости” [8]

$$\frac{\partial N_L\left(X,Y\right)}{\partial Y}=c\frac{\partial M_L\left(X,Y\right)}{\partial X}. \tag{51}$$

В качестве примера можно привести лагранжиан электродинамики Борна-Инфельда [11]. Заметим, что предлагаемая схема включает в себя также диссипативные и другие нелагранжевы теории, для которых соотношение “лагранжевости” (51) может не выполняться.

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДУАЛЬНОСТИ

Рассмотрим преобразования дуальности $F_{\mu\nu}\leftrightarrow\tilde{G}_{\mu\nu}$ [15]

$$\delta F_{\mu\nu}=\tilde{G}_{\mu\nu},\qquad \delta G_{\mu\nu}=\tilde{F}_{\mu\nu}, \tag{52}$$

Условие (анти)самодуальности определяется формулой

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \epsilon\tilde{G}_{\mu\nu}, && (53)\\ \epsilon &= \pm 1. && (54)\end{aligned}$$

При этом выполняется основное соотношение дуальной теории

$$F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}=G_{\mu\nu}\tilde{G}^{\mu\nu} \tag{55}$$

или эквивалентно $\mathbf{D}\cdot\mathbf{H}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{E}$.

Используя (40), можно получить условия (анти)самодуальности для материального тензора $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ (при $S_{\mu\nu}=0$, $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}=0$) в следующем виде

$$R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}\varepsilon_{\rho\sigma\lambda\delta}\eta^{\lambda[\mu}\eta^{\delta\nu]}=2\epsilon. \tag{56}$$

Дополнительное соотношение дуальной теории, удовлетворяющее (53), $F_{\mu\nu}=\epsilon\tilde{F}_{\mu\nu}$, приводит к $X=Y$. Конечные преобразования дуальности определяются формулами

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= aF_{\mu\nu}+b\tilde{G}_{\mu\nu}, && (57)\\ G'_{\mu\nu} &= eG_{\mu\nu}+f\tilde{F}_{\mu\nu}, && (58)\end{aligned}$$

где $af-be=1$. Учитывая материальные уравнения вида (34) и их Ходж-сопряженные, можно получить

$$\begin{aligned} F'_{\mu\nu} &= U_{\mu\nu}^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma}, && (59)\\ G'_{\mu\nu} &= V_{\mu\nu}^{\rho\sigma}G_{\rho\sigma}, && (60)\end{aligned}$$

где $U_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ и $V_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$ можно назвать “тензорами дуальности”, которые имеют вид

$$\begin{aligned} U_{\mu\nu}^{\rho\sigma} &= \left(a-bcM\left(C_1,C_2\right)\right)\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma+\frac{1}{2}bN\left(C_1,C_2\right)\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\eta^{\lambda\rho}\eta^{\delta\sigma}, && (61)\\ V_{\mu\nu}^{\rho\sigma} &= \left(e+\frac{fcM\left(C_1,C_2\right)}{N^2\left(C_1,C_2\right)+c^2M^2\left(C_1,C_2\right)}\right)\delta_\mu^\rho\delta_\nu^\sigma+\frac{1}{2}\frac{N\left(C_1,C_2\right)}{N^2\left(C_1,C_2\right)+c^2M^2\left(C_1,C_2\right)}\varepsilon_{\mu\nu\lambda\delta}\eta^{\lambda\rho}\eta^{\delta\sigma}. && (62)\end{aligned}$$

Отметим, что уравнения движения можно получить непосредственно методом, изложенным в [15].

Дальнейшее рассмотрение свойств материальных тензоров $S_{\mu\nu}$, $R_{\mu\nu}^{\rho\sigma}$, $Q_{\mu\nu}^{\rho\sigma\lambda_1\ldots\lambda_n}$ и различные их приложения будут рассмотрены в отдельной работе.

СУПЕРСИММЕТРИЧНАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Рассмотрим суперсимметричную версию классической электродинамики и суперполевое обобщение материальных уравнений в суперпространстве. Выберем обозначения (в основном следуя [16]), в которых $N=1$ четырехмерное суперпространство есть $z^M=\left\{x^\mu,\theta^\alpha,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\right\}$, где мы ввели “объединенный” индекс $M=\{\mu,\alpha,\dot{\alpha}\}$ и $\theta^\alpha,\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ $(\alpha,\dot{\alpha}=1,2)$ — дополнительные грассмановы координаты (двухкомпонентные майорановские спиноры)[2].

---

[2] Спинорные индексы будем обозначать буквами из начала греческого алфавита, которые опускаются и поднимаются с помощью полностью антисимметричного тензора $\varepsilon^{12}=-\varepsilon_{12}=\varepsilon_{\dot{1}\dot{2}}=-\varepsilon^{\dot{1}\dot{2}}=1$..

Преобразования $N=1$ $D=4$ суперсимметрии есть

$$\begin{aligned} \tilde{x}^{\mu} &= x^{\mu} + i\lambda^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}} - i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}, && (63)\\ \tilde{\theta}^{\alpha} &= \theta^{\alpha} + \lambda^{\alpha}, \quad \tilde{\bar{\theta}}^{\dot{\alpha}} = \bar{\theta}^{\dot{\alpha}} + \lambda^{\dot{\alpha}}, && (64) \end{aligned}$$

где $\lambda^{\alpha}, \lambda^{\dot{\alpha}}$ — грассмановы постоянные антикоммутирующие спиноры. Преобразования (63)–(64) генерируются суперзарядами

$$\mathrm{Q}_{\alpha} = -i\frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} + \sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (65)$$

$$\bar{\mathrm{Q}}_{\dot{\alpha}} = i\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + \theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (66)$$

$$\left\{\mathrm{Q}_{\alpha}, \bar{\mathrm{Q}}_{\dot{\alpha}}\right\} = 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} \qquad (67)$$

следующим образом $\tilde{z}^{M} = \exp\left[i\left(\lambda^{\alpha}\mathrm{Q}_{\alpha} + \bar{\mathrm{Q}}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}\right)\right]z^{M}$, где $\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}} = \left(I, \vec{\sigma}\right)_{\alpha\dot{\alpha}}$ — матрицы Паули. Ковариантные суперпроизводные определяются формулами

$$\mathrm{D}_{\mu} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (68)$$

$$\mathrm{D}_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial\theta^{\alpha}} - i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (69)$$

$$\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}} = -\frac{\partial}{\partial\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} + i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (70)$$

$$\left\{\mathrm{D}_{\alpha}, \bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\right\} = 2i\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\frac{\partial}{\partial x^{\mu}}, \qquad (71)$$

так что остальные (анти)коммутаторы, кроме (67) и (71), зануляются.

Общее суперполе $\Phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$ (с произвольными не указанными здесь индексами) как функция нильпотентных грассмановых величин θ^{α}, $\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$ раскладывается в конечный ряд по ним с коэффициентами, которые являются обычными и спинорными функциями (мультиплет полей) и перемешиваются (инфинитезимальными) преобразованиями суперсимметрии

$$\delta\Phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = i\left(\lambda^{\alpha}\mathrm{Q}_{\alpha} + \bar{\mathrm{Q}}_{\dot{\alpha}}\lambda^{\dot{\alpha}}\right)\Phi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right). \qquad (72)$$

Дальнейшие подробности можно найти, например, в [16].

Абелево калибровочное поле $A_{\mu}\left(x\right)$ входит в векторный мультиплет и является компонентой калибровочного суперполя $\mathsf{V}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = \mathsf{V}^{+}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$, где $+$ означает суперэрмитово сопряжение. Суперкалибровочные преобразования имеют вид

$$\tilde{\mathsf{V}}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = \mathsf{V}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) + \frac{i}{2}\left(\Lambda\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) - \Lambda^{+}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)\right), \qquad (73)$$

где $\Lambda\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$ — киральное суперполе, удовлетворяющее соотношениям $\mathrm{D}_{\alpha}\Lambda\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = 0$ и $\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\Lambda^{+}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = 0$, так что в действительности является функцией лишь двух суперкоординат $\Lambda\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = \Upsilon\left(x_{L}, \theta\right)$, $\Lambda^{+}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = \Upsilon^{+}\left(x_{R}, \bar{\theta}\right)$, где $x^{\mu}_{L,R} = x^{\mu} \pm i\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}$. В калибровке Весса-Зумино половина полей можно “откалибровать” (занулить), используя суперкалибровочные преобразования (73), тогда для $\mathsf{V}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$ можно получить

$$\begin{aligned} \mathsf{V}_{WZ}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) &= -\theta^{\alpha}\sigma^{\mu}_{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}A_{\mu}\left(x\right) - i\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\theta^{\alpha}\psi_{\alpha}\left(x\right) \\ &+ i\theta^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\left(x\right) + \frac{1}{2}\theta^{\alpha}\theta_{\alpha}\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}D\left(x\right), \qquad (74) \end{aligned}$$

где $\psi_{\alpha}\left(x\right)$ — майораново фермионное поле (суперпартнер фотона — фотино), $D\left(x\right)$ — нефизическое вспомогательное поле, необходимое лишь для удовлетворения всего выражения преобразованиям суперсимметрии и удовлетворяющее уравнениям движения $D\left(x\right) = 0$.

Если $\Psi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)$ суперполе материи, то его суперкалибровочные (фазовые) преобразования есть

$$\tilde{\Psi}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) = \exp\left[-\frac{ie}{\hbar c}\left(\Lambda\left(x, \theta, \bar{\theta}\right) + \Lambda^{+}\left(x, \theta, \bar{\theta}\right)\right)\right]\Psi\left(x, \theta, \bar{\theta}\right). \qquad (75)$$

Вместе (73) и (75) представляют полный набор суперкалибровочных преобразований абелевой $N=1$ суперсимметричной калибровочной теории.

Для каждой суперпроизводной D_M введем соответствующий калибровочный суперпотенциал $\mathsf{A}_M\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$, тогда ковариантные относительно суперкалибровочных преобразований (73) и (75) суперпроизводные будут иметь вид

$$\nabla_M = \mathrm{D}_M + \frac{ie}{\hbar c}\mathsf{A}_M\left(x,\theta,\bar{\theta}\right). \tag{76}$$

При этом требование, чтобы ковариантная суперпроизводная от материального суперполя преобразовывалась, как само суперполе (75) приводит к преобразованиям суперпотенциала

$$\tilde{\mathsf{A}}_\mu\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{D}_\mu\left(\Lambda\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) + \Lambda^+\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)\right), \tag{77}$$

$$\tilde{\mathsf{A}}_\alpha\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \mathsf{A}_\alpha\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) + \frac{1}{2}\mathrm{D}_\alpha\Lambda^+\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{78}$$

$$\tilde{\bar{\mathsf{A}}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \bar{\mathsf{A}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) + \frac{1}{2}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\Lambda\left(x,\theta,\bar{\theta}\right). \tag{79}$$

Эти преобразования автоматически выполняются, если выбрать

$$\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \left(i\mathrm{D}_\mu - \frac{1}{2}\mathrm{D}_\alpha\sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\right)\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{80}$$

$$\begin{aligned}\mathsf{A}_\alpha\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= i\mathrm{D}_\alpha\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\\ \bar{\mathsf{A}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) &= i\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\end{aligned} \tag{81}$$

где $\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ — препотенциал абелевой $N = 1$ суперсимметричной калибровочной теории. Из (80)–(81) следует, что имеется соотношение между векторной и спинорными производными

$$\nabla_\mu = \frac{i}{4}\sigma_\mu^{\alpha\dot{\alpha}}\left\{\nabla_\alpha, \bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}\right\}, \tag{82}$$

а также связь между суперпроизводными и ковариантными суперпроизводными

$$\nabla_\alpha = e^{\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)}\mathrm{D}_\alpha e^{-\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)}, \tag{83}$$

$$\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}} = e^{-\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}} e^{\frac{e}{\hbar c}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)}. \tag{84}$$

Теперь, чтобы стандартным образом получить супернапряженность (кривизну) $\mathsf{F}_{MN}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ и кручение$\mathsf{T}_{MN}^{\ \ K}$, необходимо вычислить перестановочные соотношения

$$\left\{\nabla_M, \nabla_N\right] = i\mathsf{T}_{MN}^{\ \ K}\nabla_K + i\mathsf{F}_{MN}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{85}$$

где $\{\ \ ]$ означает смешанный коммутатор (равный антикоммутатору для двух нечетных величин и коммутатору в остальных случаях). Из (82) следует, что кручение имеет лишь такие ненулевые компоненты

$$\mathsf{T}_{\alpha\dot{\alpha}}^{\ \ \mu} = 2\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu. \tag{86}$$

Для супернапряженности из (82) получаем, что все компоненты с обеими фермионными индексами зануляются

$$\mathsf{F}_{\alpha\beta}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \mathsf{F}_{\alpha\dot{\beta}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = \mathsf{F}_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = 0. \tag{87}$$

Такого типа связи называются “сохраняющими представление”, поскольку они позволяют ввести киральные и антикиральные суперполя, которые “выживают” при ненулевой калибровочной константе взаимодействия. Такие смешанные спин-векторные (нечетные) суперполя наинизшей размерности есть

$$\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = -i\left[\nabla_\alpha, \nabla_\mu\right] = \mathrm{D}_\alpha\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) - \mathrm{D}_\mu\mathsf{A}_\alpha\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{88}$$

$$\bar{\mathsf{F}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = -i\left[\bar{\nabla}_{\dot{\alpha}}, \nabla_\mu\right] = \bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\mathsf{A}_\mu\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) - \mathrm{D}_\mu\bar{\mathsf{A}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{89}$$

которые и являются супераналогом напряженностей $F_{\mu\nu}$. Используя разрешение связей типа (80)–(81), можно получить явный вид

$$\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\mathrm{D}_\alpha\mathrm{D}_\beta\sigma_\mu^{\beta\dot{\beta}}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\beta}}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right), \tag{90}$$

$$\bar{\mathsf{F}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right) = -\frac{1}{2}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\beta}}\sigma_\mu^{\dot{\beta}\beta}\mathrm{D}_\beta\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right). \tag{91}$$

Из этого вида следует, что смешанные спин-векторные супернапряженности могут быть выражены через одно киральное спинорное суперполе

$$\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)=-i\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\mu}^{\beta\dot{\beta}}\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right), \tag{92}$$

$$\bar{\mathsf{F}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)=-i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\mu}^{\dot{\beta}\beta}\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right), \tag{93}$$

где

$$\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right)=\frac{1}{2}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathrm{D}}^{\dot{\beta}}\mathrm{D}_{\beta}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\qquad\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right)=0, \tag{94}$$

$$\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)=\frac{1}{2}\mathrm{D}^{\alpha}\mathrm{D}_{\beta}\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\beta}}\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right),\qquad\mathrm{D}_{\alpha}\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)=0. \tag{95}$$

Эти суперполя удовлетворяют дополнительному соотношению $\mathrm{D}^{\alpha}\mathsf{W}_{\alpha}\left(x,\theta\right)=\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\alpha}}\bar{\mathsf{W}}^{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)$. Используя разложение препотенциала $\mathsf{V}\left(x,\theta,\bar{\theta}\right)$ по компонентам, в калибровке Весса-Зумино (74) получаем

$$\mathsf{W}_{\alpha}\left(x,\theta\right)=-i\psi_{\alpha}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\alpha\gamma}D\left(x\right)-\frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\dot{\beta}\gamma}^{\nu}F_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\theta^{\gamma}-\theta^{\beta}\theta_{\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{\dot{\alpha}}\left(x\right), \tag{96}$$

$$\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)=i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}D\left(x\right)+\frac{i}{2}\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\mu}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\gamma}}^{\nu}F_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}+\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{\alpha}\left(x\right). \tag{97}$$

Из (92)–(93) следует, что роль калибровочных инвариантов X и Y (35) играют суперполя

$$\mathsf{X}\left(x,\theta\right)=\frac{1}{4}\bar{\mathsf{F}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)\bar{\mathsf{F}}^{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)=\mathsf{W}^{\alpha}\left(x,\theta\right)\mathsf{W}_{\alpha}\left(x,\theta\right), \tag{98}$$

$$\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)=\frac{1}{4}\mathsf{F}^{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)\mathsf{F}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)=\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)\bar{\mathsf{W}}^{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right). \tag{99}$$

Разлагая по компонентам (96)–(97) можно заметить связь

$$\mathsf{X}\left(x,\theta\right)=\ldots+\theta^{\alpha}\theta_{\alpha}\left(X-iY\right), \tag{100}$$

$$\mathsf{Y}\left(x,\bar{\theta}\right)=\ldots+\bar{\theta}_{\dot{\alpha}}\bar{\theta}^{\dot{\alpha}}\left(X+iY\right), \tag{101}$$

что после интегрирования по грассмановым координатам дает правильный вклад в лагранжан теории.

СУПЕРСИММЕТРИЧНЫЕ МАТЕРИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Теперь рассмотрим $N=1$ суперсимметричную теорию в некоторой “суперсреде” и будем искать супераналог материальных уравнений (13). По аналогии введем супернапряженности в “суперсреде” $\mathsf{G}^{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)$ и $\bar{\mathsf{G}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)$, но не будем их выражать через препотенциал как в (90)–(91) (так же, как и $G_{\mu\nu}$ не имеет представления через потенциал). Но мы предположим, что $\mathsf{G}^{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)$ и $\bar{\mathsf{G}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)$ имеют представление через киральное спинорное суперполе, аналогичное (92)–(93)

$$\mathsf{G}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)=-i\varepsilon_{\alpha\beta}\sigma_{\mu}^{\beta\dot{\beta}}\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}^{G}\left(x,\bar{\theta}\right), \tag{102}$$

$$\bar{\mathsf{G}}_{\dot{\alpha}\mu}\left(x,\theta\right)=-i\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\mu}^{\dot{\beta}\beta}\mathsf{W}_{\beta}^{G}\left(x,\theta\right), \tag{103}$$

где киральные суперполя в “суперсреде” $\mathsf{W}_{\beta}^{G}\left(x,\theta\right)$ и $\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}^{G}\left(x,\bar{\theta}\right)$ не выражаются через препотенциал, но имеют разложение по компонентам аналогичное (96)–(97)

$$\mathsf{W}_{\alpha}^{G}\left(x,\theta\right)=-i\psi_{\alpha}^{G}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\alpha\gamma}D^{G}\left(x\right)-\frac{i}{2}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\varepsilon^{\dot{\alpha}\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\dot{\beta}\gamma}^{\nu}G_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\theta^{\gamma}-\theta^{\beta}\theta_{\beta}\sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^{\mu}\partial_{\mu}\bar{\psi}^{G\dot{\alpha}}\left(x\right), \tag{104}$$

$$\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\alpha}}^{G}\left(x,\bar{\theta}\right)=i\bar{\psi}_{\dot{\alpha}}^{G}\left(x\right)+\left(\varepsilon_{\dot{\alpha}\dot{\gamma}}D^{G}\left(x\right)+\frac{i}{2}\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\mu}\varepsilon^{\alpha\beta}\sigma_{\beta\dot{\gamma}}^{\nu}G_{\mu\nu}\left(x\right)\right)\bar{\theta}^{\dot{\gamma}}+\bar{\theta}_{\dot{\beta}}\bar{\theta}^{\dot{\beta}}\bar{\sigma}_{\dot{\alpha}\alpha}^{\mu}\partial_{\mu}\psi^{G\alpha}\left(x\right), \tag{105}$$

где $G_{\mu\nu}\left(x\right)$ дается выражением (10). Очевидно, что гораздо проще работать с величиной, имеющей один спинорный индекс $\mathsf{W}_{\alpha}^{G}\left(x,\theta\right)$, чем с величиной, имеющей спин-векторный индекс $\mathsf{G}_{\alpha\mu}\left(x,\bar{\theta}\right)$, тем более, что они отличаются лишь на постоянную матрицу (см. (92)–(93) и (102)–(103)). Поэтому мы сформулируем супераналог материальных уравнений (40) в терминах киральных спинорных суперполей следующим образом

$$\mathsf{W}_{\alpha}^{G}\left(x,\theta\right)=\mathsf{S}_{\alpha}\left(x,\theta\right)+\mathsf{R}_{\alpha}^{\beta}\left(x,\theta\right)\mathsf{W}_{\beta}\left(x,\theta\right)+\mathsf{Q}_{\alpha}^{\beta\gamma}\left(x,\theta\right)\mathrm{D}_{\beta}\mathsf{W}_{\gamma}\left(x,\theta\right)+\ldots\mathrm{DD}\mathsf{W}\ldots, \tag{106}$$

$$\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\alpha}}^{G}\left(x,\bar{\theta}\right)=\bar{\mathsf{S}}_{\dot{\alpha}}\left(x,\bar{\theta}\right)+\bar{\mathsf{R}}_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\beta}}\left(x,\bar{\theta}\right)+\bar{\mathsf{Q}}_{\alpha}^{\dot{\beta}\dot{\gamma}}\left(x,\bar{\theta}\right)\bar{\mathrm{D}}_{\dot{\beta}}\bar{\mathsf{W}}_{\dot{\gamma}}\left(x,\bar{\theta}\right)+\ldots\bar{\mathrm{D}}\bar{\mathrm{D}}\mathsf{W}\ldots,. \tag{107}$$

Калибровочная суперинвариантность теории требует, чтобы суперполя $\mathsf{S}_\alpha(x,\theta)$, $\mathsf{R}_\alpha^\beta(x,\theta)$, $\mathsf{Q}_\alpha^{\beta\gamma}(x,\theta)$ зависели только от калибровочного суперинварианта $\mathsf{X}(x,\theta)$ (формула (98)), а суперполя $\bar{\mathsf{S}}_{\dot\alpha}\left(x,\bar\theta\right)$, $\bar{\mathsf{R}}_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\left(x,\bar\theta\right)$, $\bar{\mathsf{Q}}_\alpha^{\dot\beta\dot\gamma}\left(x,\bar\theta\right)$ зависели только от $\mathsf{Y}\left(x,\bar\theta\right)$ (формула (99)). То есть

$$\mathsf{S}_\alpha = \mathsf{S}_\alpha\left(\mathsf{X}(x,\theta)\right), \quad \mathsf{R}_\alpha^\beta = \mathsf{R}_\alpha^\beta\left(\mathsf{X}(x,\theta)\right), \ \mathsf{Q}_\alpha^{\beta\gamma} = \mathsf{Q}_\alpha^{\beta\gamma}\left(\mathsf{X}(x,\theta)\right), \tag{108}$$

$$\bar{\mathsf{S}}_{\dot\alpha} = \bar{\mathsf{S}}_{\dot\alpha}\left(\mathsf{Y}\left(x,\bar\theta\right)\right), \quad \bar{\mathsf{R}}_{\dot\alpha}^{\dot\beta} = \bar{\mathsf{R}}_{\dot\alpha}^{\dot\beta}\left(\mathsf{Y}\left(x,\bar\theta\right)\right), \ \bar{\mathsf{Q}}_\alpha^{\dot\beta\dot\gamma} = \bar{\mathsf{Q}}_\alpha^{\dot\beta\dot\gamma}\left(\mathsf{Y}\left(x,\bar\theta\right)\right). \tag{109}$$

Используя (96)–(97) и (104)–(105) можно получить материальные уравнения (106)–(107) в компонентах.

ВЫВОДЫ

Таким образом, здесь предлагается максимально обобщенный подход к нелинейной классической электродинамике и суперсимметричной электродинамике, который учитывает все возможные виды сред, нелокальные эффекты и описывает как лагранжевы, так и нелагранжевы теории. Вводятся материальные уравнения и конститутивные тензоры самого общего вида, предложено их суперсимметричное обобщение. Рассматривается электромагнитная дуальность в терминах введенных тензоров и показывается связь с предыдущими подходами, намечены направления дальнейшего развития теории.

Один из авторов, С.А. Дуплий, благодарен Ю.А. Кирочкину за полезные обсуждения, а также университету Ратгерс (США), где данная работа была начата, за гостеприимство. Дж. Голдин выражает признательность организаторам конференции “Квантовая теория и симметрии” (Валладолид, Испания, июль 2007) за возможность представить эту работу, а также Дж. Гейтсу за интересные обсуждения предложенной идеи суперсимметричного обобщения нелинейных материальных уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Landau L. D., Lifshitz E. M. Classical theory of fields. - Oxford: Pergamon Press, 1988.
2. Jackson J. D. Classical Electrodynamics. - New York: Wiley, 1999.
3. Fushchich W. I., Shtelen V. M., Serov N. I. Symmetry Analysis and Exact Solutions of Equations of Nonlinear Mathematical Physics. - Dordrecht: Kluwer, 1993.
4. Fushchich W. I., Tsifra I. On symmetries of nonlinear equations of electrodynamics // Theor. Math. Phys. - 1985. - V. 64. - № 1. - P. 41–50.
5. Le Bellac M., Lévy-Leblond J.-M. Galilean electromagnetism // Nuovo Cimento. - 1973. - V. B14. - P. 217–233.
6. Brown H. R., Holland P. R. The Galilean covariance of quantum mechanics in the case of external fields // American J. Phys. - 1999. - V. 67. - P. 204–214.
7. Goldin G. A., Shtelen V. M. On Galilean invariance and nonlinearity in electrodynamics and quantum mechanics // Phys. Lett. - 2001. - V. A279. - P. 321–326.
8. Goldin G. A., Shtelen V. M. Generalization of Yang-Mills theory with nonlinear constitutive equations // J. Phys. A: Math. Gen. - 2004. - V. 37. - P. 10711–10718.
9. Marangos J. Slow light in cool atoms // Nature. - 1999. - V. 397. - P. 559–560.
10. Schrödinger E. Space-Time Structure. - Cambridge: Cambridge University Press, 1985. - 135 p.
11. Born M., Infeld L. Foundations of the new field theory // Proc. Roy. Soc. London. - 1934. - V. A144. - P. 425–454.
12. Cirilo-Lombardo D. J. On the mathematical structure and hidden symmetries of the born-infeld field equations // J. Math. Phys. - 2007. - V. 48. - P. 032301.
13. Dmitriev V. A. Group theoretical approach to determine structure of complex and composite media constitutive tensors // Electronics Lett. - 1998. - V. 34. - № 8. - P. 743–745.
14. Vinogradov A. P. On the form of constitutive equations in electrodynamics // Physics-Uspekhi. - 2002. - V. 45. - № 3. - P. 331–338.
15. Gibbons G. W., Hashimoto K. Non-linear electrodynamics in curved backgrounds // JHEP. - 2000. - V. 09. - P. 013–021.
16. Wess J., Bagger J. Supersymmetry and Supergravity. - Princeton: Princeton Univ. Press, 1983. - 216 p.

NONLINEAR SUPERSYMMETRIC CLASSICAL ELECTRODYNAMICS

S.A. Duplij[1], G.A. Goldin[2], V.M. Shtelen[3]

[1]*Department of Physics and Technology, V.N. Karazin Kharkov National University, Svoboda Sq. 4, Kharkov 61077, Ukraine*
[2]*Departments of Mathematics and Physics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854, USA*
[3]*Department of Mathematics, Rutgers University, Piscataway, NJ 08854, USA*

In this paper we propose a general approach to nonlinear classical electrodynamics, allowing its description in the largest possible class of media (anisotropic, piroelectric, chiral, and ferromagnetic), and including both Lagrangian and non-Lagrangian (e.g., dissipative) theories. We introduce generalized constitutive equations via constitutive tensors of a very general form. We formulate electromagnetic duality in terms of these constitutive tensors. We also propose a supersymmetric generalization of the constitutive equations in a superfield approach.

KEY WORDS: constitutive equations, nonlinear electrodynamics, duality, supersymmetry, superfield