Die Abschätzung der Nullstellenverteilung der Riemannschen Zeta-Funktion und ihr Zusammenhang mit den Zufallsmatrizen

Minglai Cai 2008/2009

Die Riemannsche-Zeta-Funktion wurde im 19-ten Jahrhundert von Euler und Riemann eingeführt , sie besitzt Nullstellen in den Punkten von -2 $\mathbb{N}$. Riemann vermutete 1876 , dass es gilt (**Riemannsche Vermutung**):

Alle anderen Nullstellen von $\zeta(s)$, s $\in \mathbb{C}$, liegen bei Re s = $\frac{1}{2}$.

In dieser Arbeit wird die GUE-Hypothese von Rudnick und Sarnak vorgestellt sowie ihre Zusammenhang mit den Zufallsmatrizen erklärt.

1996 haben Rudnick und Sarnak die n-Punkt-Korrelation-Funktion der Nullstellen von ζ-Funktionen studiert, d.h. die Anzahl solcher $y_1, y_2, \cdots y_n$, $n \leq N \in \mathbb{N}$, mit $\frac{1}{2} + y_i$ Nullstellen von ζ-Funktion , und $[(\frac{1}{2\pi}|y_{i+1}|\log y_{i+1}) - ((\frac{1}{2\pi}|y_i|\log y_i)] < q_i$, $q_i \in \mathbb{R}$, und das Verhalten dieser n-Punkt-Korrelation-Funktion für $N \to \infty$ diskutiert.

Zunächst wird die Riemannsche Hypothese nicht vorausgesetzt:

Satz 1 :

Seien $(\frac{1}{2} + y_1, \frac{1}{2} + y, \cdots), y_1, y_2, \cdots \in C$, (nicht notwendigerweise reell), die nichttrivialen Nullstellen der ζ-Funktion ,Sei g$\in C_c^\infty(\mathbb{R})$, h(r) := $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(u)\exp(iru)du$,
$T > 0$ konstant, $L := \log T$, $W_n(x) := \det(K(x_i - x_j)_{i,j=1,\cdots,n})$, $K(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$,
(wobei $\sum'$ für Summe über verschiedene Indizes steht). Dann :

$$\sum'_{y_1 \cdots y_n} h(\tfrac{y_1}{T}) \cdots h(\tfrac{y_n}{T}) f(\tfrac{L}{2\pi}y_1, \cdots, \tfrac{L}{2\pi}y_n)$$
$$\sim \frac{1}{2\pi}TL(\int\limits_{-\infty}^{\infty} h(r)^n dr) \int_{R^n} f(x)W_n(x)\delta(\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n})dx_1 \cdots dx_n$$

für T $\to \infty$
(wobei a(T) $\sim$ b(T) für T $\to \infty$ bedeutet : $\lim_{T\to\infty} \frac{a(T)}{b(T)} = 1$)

Rundnick und Sarnak haben dann den Satz 1 unter der Annahme der Riemannschen Vermutung , diskutiert , d.h. :

Seien $\frac{1}{2}$+y_1, $\frac{1}{2}$+$y_2, \cdots$ die nichttriviale Nullstellen der ζ-Funktion , $y_1, y_2, \cdots \in \mathbb{R}$; N(T) := $\#\{$a+it Nullstelle der ζ-Funktion, $0 \leq a \leq 1$,$0 < t \leq T\}$

GUE-Hypothese ([Ru/Sa]):
(unter Annahme der Riemannschen Vermutung)

Seien $\frac{1}{2}$+y_1, $\frac{1}{2}$+$y_2, \cdots$ die nichttriviale Nullstellen der ζ-Funktion , $y_1, y_2, \cdots \in \mathbb{R}$, $L := \log T$ und $\gamma_j := \frac{L}{2\pi}y_j$ für j$\in \mathbb{N}$, dann :

$$\frac{1}{N(T)} \sum'_{y_1,\cdots,y_n \leq T} f(\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \sim \int_{R^n} f(x)W_n(x)\delta(\frac{\sum_{j=1}^n x_j}{n})dx_1 \cdots dx_n$$

für T $\to \infty$

Man bezeichnet diese Hypothese als die „GUE (Gauss-unitäres-Ensemble) -Hypothese „, da dabei der Factor $W_n(x) := \det(K(x_i - x_j)_{i,j=1,\cdots,n})$, $K(x) := \frac{\sin \pi x}{\pi x}$, auftaucht, der auch den Limes der n-Punkt-Korrelation-Funktion vom Gauss-unitären-Ensemble beschreibt.

Referenzen :

[Ab] S. Albeverio, Random matrices and Riemann zeta function: an introduction, a course given by S. Albeverio at the University of Bonn, Winter Serm. 2005/06, notes by L. Cattaneo, Bonn 2006

[Ar] E. Artin, The gamma function, Rinehart and Winston, New York-Toronto-London 1964

[Ba] H. Bateman, Integral transforms. Vol.1, McGraw. Hill, New York 1954

[Br] J. Brüdern, Einführung in die analytische Zahlentheorie, 2nd ed., de Gruyter, Berlin 1992

[Da] H. Davenport, Multiplicative Number Theory, Springer Verlag, New York, 1980

[Fa] D. W. Farmer, Mean Values of ζ'/ζ and the Gaussian Unitary Ensemble Hypothesis, International Mathematics Reseach Notices (1995), No.2, 71-82

[Gol/Go/Mo] D.A. Goldston, S.M. Gonek, H. L. Montgomery, Mean values of the logarithmic derivative of the Riemann zeta-function with applications to primes in short intervals, J. reine angew. Math. 537(2001), 105-126

[La] E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Teubner, Berlin, 1909

[Me] M. L. Metha, Random Matrices, Academic Press, Boston 1991

[Mo] H. L. Montgomery, The pair correlation of zeros of the zeta function, Analytic Number Theory, Proc. sympos. Pure Math. 24, Amer. Math. Soc., Providence (1973), 181-193

[Mo2] H. L. Montgomery, Topics in multiplicative number theory, Lecture Notes in Math., vol.227, Springer-Verlag, Berlin and New York, (1971), 178 ff.

[Mo/Va] H. L. Montgomery, R.C. Vaughan, Hilbert's inequality, J. London Math. Soc. (2) 8 (1974), 73-82

[Ru/Sa] Z. Rudnick, P. Sarnak, Zeroes of principal L-functions and random matrix teory, Duke Math. J.81(1996), 269-322

[Sp] F. Spitzer,A combinatorial lemma and its applications to probability theory, Trans. Amer. Math. Soc. 82 (1956), 323-339

[Ti] E. C. Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, Oxford, 1985

[van.Li/Wi] J. H. van Lint, R. M. Wilson, A Course in Combinatorics, Cambridge University Press, Cambridge, 1992

[Zy] A. Zygmund, Trigonometric series, 2 volumes, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge 2002