Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 1 , Abgabe: 13.4.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 1: (4 Punkte)
Sei $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ und $f_1(x) = f(Ax+b)$ mit einer invertierbaren (n,n)-Matrix A und $b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\hat{f}_1(\xi) = \frac{1}{|A|} e^{i\xi \cdot A^{-1}b} \hat{f}(A^{-T}\xi) \; .$$

Aufgabe 2: (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ die Funktion der Gestalt

$$f(x) = p(x) e^{-x^2/2}$$

mit einem Polynom p vom Grade n. Zeigen Sie, dass $\hat{f}$ die gleiche Gestalt hat.

Aufgabe 3: (4 Punkte)
Sei G auf $\mathbb{R}^3$ die Distribution

$$G(x) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi |x|}.$$

Zeigen Sie:

$$\lim_{x_3 \to 0} \frac{\partial G}{\partial x_3}(x', x_3) = -\frac{1}{2}\delta(x').$$

Aufgabe 4: (4 Punkte)

Das Ricker–Wavelet $q(t)$, $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, mit betragsmaximaler Kreisfrequenz $\sqrt{2}\omega_0$ ist erklärt durch

$$q(t) = \frac{d^2}{dt^2} e^{-(\omega_0 t)^2/2}.$$

(a) Berechnen Sie q und stellen Sie q graphisch dar.
(b) Zeigen Sie, dass $\hat{q}$ sein Betragsmaximum bei $\pm\sqrt{2}\omega_0$ annimmt.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 2 , Abgabe: 27.4.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 5: (4 Punkte)
Sei

$$a(\eta) = \begin{cases} \sqrt{k^2 - |\eta|^2}, & |\eta| < k, \\ i\sqrt{|\eta|^2 - k^2}, & |\eta| \geq k. \end{cases}$$

Dann gilt nach Vorlesung für die Funktion $G(x)$ aus Aufgabe 3

$$G(x) = \frac{i}{8\pi^2} \int_{I\!R^2} e^{i(|x_3|a(z) - x' \cdot z)} \frac{dz}{a(z)}, \; x = \begin{pmatrix} x' \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie ausgehend von dieser Darstellung die Aussage von Aufgabe 3:

$$\lim_{x_3 \to 0} \frac{\partial G}{\partial x_3}(x', x_3) = -\frac{1}{2}\delta(x').$$

Aufgabe 6: (4 Punkte)
Es sei $c : I\!R^2 \mapsto I\!R$ eine Geschwindigkeitsverteilung,

$$c(x) = \begin{cases} c_0, & x_2 < h_0 \\ c_1, & h_0 \leq x_2 < h_1 \\ c_2, & h_1 \leq x_2. \end{cases}$$

Sei $k(x) = \omega / c(x)$, $\omega > 0$. u erfülle die partielle Differentialgleichung

$$\Delta u + k(x)^2 u = 0$$

für $x_2 > 0$, die Randbedingung $\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1, 0) = 1$ und die Ausstrahlungsbedingung

$$\lim_{x_2 \to \infty} (\frac{\partial u}{\partial x_2} - iku) = 0$$

.

a) Berechnen Sie die analytische Lösung für u.
b) Stellen Sie u graphisch dar für die folgende Wahl der Parameter:

$$\omega = 20,\ c_0 = 1,\ c_1 = 4,\ c_2 = 2,\ h_0 = \pi,\ h_1 = 2\pi.$$

Aufgabe 7: (4 Punkte)
Sei $c > 0$ konstant und $s \in C^1(I\!R^1)$. Sei $s(t) = 0$ für $t \leq 0$.
Zeigen Sie: Die Aufgabe im $I\!R^3$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u,\ t > 0,\ x_3 > 0$$

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial u}{\partial x_3} = -\frac{1}{2} s(t)\delta(x'),\ x' = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ u = 0 \,\text{für}\, t \leq 0$$

hat die Lösung

$$u(x,t) = \frac{s(t - |x|/c)}{4\pi |x|}.$$

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 3 , Abgabe: 5.5.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 8: (4 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L_2(-\pi,\pi)$. Zeigen Sie:

a) $f \in \mathcal{S}'$.
b) Berechnen Sie $\hat{f}$ über die Fourierreihe von f.

Aufgabe 9: (4 Punkte)
Sei $f \in \mathcal{S}'$. Dann ist auch $\widehat{f} \in \mathcal{S}'$.

Aufgabe 10: (4 Punkte)
Seien $J_k(x)$ die Koeffizienten in der Laurent-Reihe

$$e^{x(z-1/z)/2} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} z^k J_k(x) \ .$$

Zeigen Sie:

$$J_k(x) = \frac{i^{-k}}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ix\cos\varphi - ik\varphi} d\varphi$$

Aufgabe 11: (4 Punkte)
Sei für $r > 0$

$$\delta_r(y) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{|\xi|\le r} e^{iy\cdot\xi} d\xi \ .$$

(a) Zeigen Sie (für $n = 2$):

$$\delta_r(y) = (2\pi)^{-n/2} \, r^n \, \frac{J_{n/2}(r|y|)}{(r|y|)^{n/2}} \ .$$

Benutzen Sie $\int\limits_0^z x^\nu J_{\nu-1}(x)dx = z^\nu J_\nu(z)$.

(b) Zeigen Sie: $\delta_r \to \delta$ in $\mathcal{S}'$ für $r \to \infty$.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 4 , Abgabe: 12.5.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 12: (4 Punkte)
Sei u die Lösung der Aufgabe

$$(-\Delta u - k^2 u)(x', x_3) = f(x')\delta(x_3),\ \ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$$

im $\mathbb{R}^3$, welche die Ausstrahlungsbedingung erfüllt. Zeigen Sie:

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial u}{\partial x_3}(x', x_3) = -\frac{1}{2} f(x').$$

Aufgabe 13: (4 Punkte)
Sei $f \in C(\mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie: Für $\theta \in S^{n-1}$, $n \geq 2$ gilt

$$\int\limits_{S^{n-1}} f(\theta \cdot x) d\sigma(x) = |S^{n-2}| \int\limits_{-1}^{+1} f(t)(1-t^2)^{(n-3)/2} dt.$$

Hierbei ist $|S^{n-1}|$ die Oberfläche der Einheitssphäre in $\mathbb{R}^n$, also $|S^{n-1}| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$.

Aufgabe 14: (4 Punkte)
Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$. Zeigen Sie für $s > 0$:

$$\int\limits_{x_n = s} f(x) dx = \int\limits_{S_+^{n-1}} f\left(\frac{sx}{x_n}\right) \frac{s^{n-1}}{x_n^n} d\sigma(x)$$

mit $S_+^{n-1} = \{x \in S^{n-1} : x_n > 0\}$.

Aufgabe 15: (4 Punkte)
Sei $f \in C_0(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$\int_{S^{n-1}} \int_{\theta^\perp} f(y) \mathrm{d}y \mathrm{d}\sigma(\theta) = |S^{n-2}| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(y)}{|y|} \mathrm{d}y.$$

Hier ist $\theta^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \theta = 0\}$.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 5 , Abgabe: 19.5.2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 16: (4 Punkte)
Wir betrachten im $\mathbb{R}^1$ die Aufgabe

$$-u'' - k^2 u = f$$

mit den Ausstrahlungsbedingungen

$$\lim_{x\to\infty}(u' - iku)(x) = 0, \ \lim_{x\to-\infty}(u' + iku)(x) = 0$$

mit $k > 0$ und $f \in C_0(\mathbb{R}^1)$. Zeigen Sie, dass die Aufgabe eindeutig lösbar ist und geben Sie die Lösung an.

Aufgabe 17: (4 Punkte)
Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{\chi}$ der charakteristischen Funktion χ des Quadrats mit den Eckpunkten $(1, \sqrt{3})$, $(\sqrt{3}, -1)$, $(-\sqrt{3}, 1)$, $(-1, -\sqrt{3})$.

Aufgabe 18: (4 Punkte)
Sei $f \in L_1(I\!R)$ mit Träger innerhalb des Kreises um 0 mit Radius R. Sei $N \in \mathbb{N}$ fest, $A \in \mathbb{C}^{2N\times 2N}$, $A_{k,l} = f(Rk/N, Rl/N)$ für $k = -N \ldots N-1$ und $l = -N \ldots N-1$. Zeigen Sie:

Sei N_f die numerische Auswertung der Fouriertransformierten von f, bei der das Fourierintegral näherungsweise durch die Trapezregel mit Schrittweite $h = 2R/N$ ausgeführt wird. Zeigen Sie, dass für die diskrete zweidimensionale Fouriertransformierte von A gilt:

$$\widehat{A}_{k,l} = h^2 N_f(\pi k/R, \pi l/R).$$

Aufgabe 19: (4 Punkte)
Im Radar lässt sich nur ein kleiner Teil des Fourier–Spektrums einer Funktion messen. Berechnen Sie das hierdurch erreichbare Bild mit folgendem numerischen Experiment:

Simulieren Sie zunächst eine optimale Messung, indem Sie der Matrix A aus Aufgabe 18 die Werte $A_{k,l} = (4/N)^2\widehat{\chi}(\pi k/2, \pi l/2)$, χ aus Aufgabe 17, zuweisen.

Berechnen Sie die diskrete zweidimensionale inverse Fouriertransformierte von A und zeigen Sie sie an. Das Ergebnis sollte ein fast perfektes gedrehtes Quadrat sein.

<u>Hinweis:</u> Matlab führt die Fouriertransformation mit Indizes ab 0 durch, in unserer Definition laufen die Indizes ab $-N$, deshalb müssen Sie die Matrix umordnen. Sie können hierzu die Funktion fftshift benutzen.

Wiederholen Sie das Experiment nun, aber schränken Sie vor der inversen Fouriertransformation die Anzahl der Messpunkte ein. Nehmen Sie an, dass Sie $\widehat{f}(\omega\theta)$ nur für $\omega_0 < \omega < \omega_1$ und $|\varphi| < \psi$, $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, messen können, und setzen Sie die nicht messbaren Teile der Fouriertransformation auf 0. Typisch für Radar ist $\omega_0 = 200$, $\omega_1 = 300$, $\psi = 0.3$. Dokumentieren Sie das Ergebnis (per Ausdruck oder Mail) für diese und einige andere Werte.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 7 , Abgabe: 2. 6. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Sei R die Radon–Transformation im $\mathbb{R}^n$, also

$$Rf(\theta,s) = \int_{x\cdot\theta=s} f(x)\mathrm{dx}.$$

Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$R(D^\alpha f)(\theta,s) = \theta^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{|\alpha|} (Rf)(\theta,s).$$

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei P die Röntgentransformation im $\mathbb{R}^n$, also

$$(Pf)(\theta,x) = \int_{\mathbb{R}} f(x+t\theta)dt$$

mit $x\theta = 0$. Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$P^*Pf = 2|x|^{1-n} * f.$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei $0 < \beta < \alpha < 2\pi$, $\alpha+\beta = 2\pi$. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\Phi(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq \alpha$, und $\Phi(\xi) > 0$ für $|\xi| \leq \beta$. Zeigen Sie:

$$e^{-ix\xi} = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\Phi(\xi)} \sum_m \widehat{\Phi}(x-m)e^{-im\xi}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $|\xi| \leq \beta$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\widehat{\Phi}(x-y)e^{-iy\xi}$.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Machen Sie sich mit den Funktionen zur Audioausgabe in Matlab vertraut. Benutzen Sie die Funktionen wavwrite und sound.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das eine T Sekunden lange Audiodatei mit dem Kammerton A (440 Hz) bei einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde erstellt.
(b) Schreiben Sie ein Programm, das eine Audiodatei erstellt, die die Funktion $\sin(t^2/A^2)$ (chirp) für $t = 0\ldots T$ (Sekunden) mit einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde repräsentiert.
(c) Testen Sie Ihr Programm für $T = 5$ und $P = 8192$. Wählen Sie A so, daß bei $t = 5$ die Frequenz 1000 Hz beträgt.
(d) Spielen Sie Ihre Datei ab und erklären Sie das Ergebnis. Wie muß P mindestens gewählt werden, damit der Effekt nicht mehr auftritt?

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 7 , Abgabe: 2. 6. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 24: (4 Punkte)
Sei R die Radon–Transformation im $\mathbb{R}^n$, also

$$Rf(\theta, s) = \int_{x\cdot\theta=s} f(x)\mathrm{dx}.$$

Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ und $\alpha \in \mathbb{N}^n$ gilt

$$R(D^\alpha f)(\theta, s) = \theta^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^{|\alpha|} (Rf)(\theta, s).$$

Aufgabe 25: (4 Punkte)
Sei P die Röntgentransformation im $\mathbb{R}^n$, also

$$(Pf)(\theta, x) = \int_{\mathbb{R}} f(x + t\theta)dt$$

mit $x\theta = 0$. Zeigen Sie: Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt

$$P^*Pf = 2|x|^{1-n} * f.$$

Aufgabe 26: (4 Punkte)
Sei $0 < \beta < \alpha < 2\pi$, $\alpha+\beta = 2\pi$. $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei stetig, $\Phi(\xi) = 0$ für $|\xi| \geq \alpha$, und $\Phi(\xi) > 0$ für $|\xi| \leq \beta$. Zeigen Sie:

$$e^{-ix\xi} = \frac{(2\pi)^{-1/2}}{\Phi(\xi)} \sum_m \widehat{\Phi}(x - m)e^{-im\xi}$$

für $x \in \mathbb{R}$ und $|\xi| \leq \beta$.
Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $\widehat{\Phi}(x - y)e^{-iy\xi}$.

Aufgabe 27: (4 Punkte)
Machen Sie sich mit den Funktionen zur Audioausgabe in Matlab vertraut. Benutzen Sie die Funktionen wavwrite und sound.

(a) Schreiben Sie ein Programm, das eine T Sekunden lange Audiodatei mit dem Kammerton A (440 Hz) bei einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde erstellt.
(b) Schreiben Sie ein Programm, das eine Audiodatei erstellt, die die Funktion $\sin(t^2/A^2)$ (chirp) für $t = 0 \dots T$ (Sekunden) mit einer Abtastrate von P Samples pro Sekunde repräsentiert.
(c) Testen Sie Ihr Programm für $T = 5$ und $P = 8192$. Wählen Sie A so, daß bei $t = 5$ die Frequenz 1000 Hz beträgt.
(d) Spielen Sie Ihre Datei ab und erklären Sie das Ergebnis. Wie muß P mindestens gewählt werden, damit der Effekt nicht mehr auftritt?

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 8 , Abgabe: 9. 6. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 28: (4 Punkte)
Sei $T \in \mathcal{S}'$ der Cauchysche Hauptwert, also

$$T(\varphi) = \oint \frac{\varphi(x)}{x} dx \,.$$

Zeigen Sie:

$$\begin{array}{llll} (a) & T(\varphi) & = & \int \frac{\varphi(x)-\varphi(-x)}{2x} dx \\ (b) & T'(\varphi) & = & -\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \left\{ \int\limits_{|x|\geq\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx + \frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} \right\} \end{array}$$

Aufgabe 29: (4 Punkte)
Seien f, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Zeigen Sie:

$$R(f * g) = (Rf) * (Rg)$$

Die Faltung rechts ist eindimensional und wirkt auf das zweite Argument.

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei A eine nichtsinguläre (n,n)-Matrix und $a \in \mathbb{R}^n$. Sei $f(x) = f_0(Ax + a)$.
Zeigen Sie:

$$(Rf)(\theta, s) = \frac{1}{|\det(A)||A^{-T}\theta|} (Rf_0) \left(\frac{A^{-T}\theta}{|A^{-T}\theta|} \, , \, \frac{a \cdot A^{-T}\theta + s}{|A^{-T}\theta|} \right)$$

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Berechnen Sie Rf für

(a) f die charakteristische Funktion der Ellipse
$x_1^2/a^2 + x_2^2/b^2 = 1 \;\; (n = 2)$,

(b) f die charakteristische Funktion des Rechtecks
$|x_1| \leq a, \quad |x_2| \leq b \;\; (n = 2)$,

(c) $f(x) = e^{-|x|^2/2}$.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 9 , Abgabe: 23. 6. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 28: (8 Punkte)
Sei $\hat{\Phi}$ eine Funktion aus $C_0^0(R^1)$ mit $\hat{\Phi}(0) = 1$. Für $\Omega > 0$ sei die Distribution v_Ω in $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ definiert durch

$$\hat{v}_\Omega(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2-n}|\sigma|^{n-1}\hat{\Phi}(|\sigma|/\Omega).$$

Zeigen Sie: Für $\Omega \to \infty$ konvergiert v_Ω im Sinne von $\mathcal{S}'$ gegen eine Distribution v, und zwar gilt für ungerade n

$$v = \frac{1}{2}(2\pi)^{1-n}(-\imath)^{n-1}\delta^{(n-1)}$$

und für gerade n

$$v = (2\pi)^{-n}\imath^{-n}(\frac{1}{s})^{(n-1)}.$$

Dabei ist mit $\frac{1}{s}$ der Hauptwert gemeint.

Aufgabe 29: (8 Punkte)
Erstellen Sie ein Programm zur gefilterten Rückprojektion.

(a) Programmieren Sie eine Funktion `backproj (g)`. g ist eine $p \times (2q + 1)$–Matrix, die Daten der 2D–Radon–Transformation enthält, also $g_{ij} = Rf(\theta_i, s_j)$ für eine Funktion f mit Träger im Kreis um 0 mit Radius 1. Die θ_i sind äquidistant in $[0, \pi]$, die s_j sind äquidistant in $[-1, 1]$.

`backproj` führt die gefilterte Rückprojektion für diese Daten durch und liefert ein Bild der Größe $[2q + 1, 2q + 1]$. Wählen Sie lineare Interpolation und den Shepp–Logan–Filter.

Hinweis: Die Rückprojektion der Datenzeile $g(\theta, \cdot)$ kann man in Matlab einfach schleifenfrei durchführen. Definieren Sie sich hierzu zwei Matrizen X und Y mit den Koordinaten der Pixelmittelpunkte. Dann ist $\cos\theta X + \sin\theta Y$ die Projektion auf den Einheitsvektor mit Richtung θ.

(b) Testen Sie Ihr Programm an einer achsenparallelen Ellipse und einem Rechteck, jeweils mit den Halbachsen 0.4 und 0.8, sowie an der Exponentialfunktion aus Aufgabe 31. Erzeugen Sie die Testdaten mit Ihrem Programm aus Aufgabe 31. Wählen Sie jeweils $p = 128$, $q = 64$. Vergleichen Sie Ihr Ergebnis mit dem Ergebnis der Matlab-Funktion `iradon`.

(c) Wenden Sie Ihr Programm auf das klassische Shepp–Logan–Phantom (Matlab–Funktion `phantom`) an. Erzeugen Sie die Daten mit Hilfe der Matlab–Funktion `radon`, und vergleichen Sie wieder mit den Ergebnissen von `iradon`. Wählen Sie in `iradon` unterschiedliche Filter und Interpolationsmethoden. Dokumentieren Sie das Ergebnis.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 10 , Abgabe: 30. 6. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 30: (4 Punkte)
Sei $h \in C^\infty(I\!R^1)$ homogen vom Grade $1-n$ und sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Sei weiter $a \in \mathbb{R}^n$ fest. Dann gilt:

$$\int_{S^{n-1}} (\mathrm{D}f)(x,\omega)h(\theta\cdot\omega)d\omega = \int_{\mathbb{R}^1} (\mathrm{R}f(\theta,s)h(s-a\cdot\theta)ds.$$

Aufgabe 31: (4 Punkte)
Sei $\widehat{\Phi}$ der Marr–Filter, d.h.

$$\widehat{\Phi}(\sigma) = \begin{cases} \operatorname{sinc}(\sigma\pi/2)^2, & |\sigma| \le 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

und sei

$$\widehat{v}_\Omega(\sigma) = \frac{1}{2}(2\pi)^{1/2-n}|\sigma|^{n-2}\widehat{\Phi}\left(\frac{|\sigma|}{\Omega}\right).$$

Zeigen Sie: Für $n=3$ gilt

$$v_\Omega\left(l\frac{\pi}{\Omega}\right) = \frac{\Omega^3}{8\pi^5}\begin{cases} 0, & |l| \ge 2 \\ -1, & |l| = 1 \\ 2, & l = 0 \end{cases}$$

Aufgabe 32: (4 Punkte)
Programmieren Sie den Two–Stage–Algorithmus zur Inversion der Radontransformation im $\mathbb{R}^3$.

Sei f eine Funktion auf $\mathbb{R}^3$ mit Träger in der Kugel um 0 mit Radius 1. Sei $\theta \in S^2$ mit den Kugelkoordinaten ψ und φ, und seien ω und η die zugehörigen Einheitsvektoren aus S^1, also

$$\theta = \begin{pmatrix} \cos\varphi\cos\psi \\ \sin\varphi\cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}, \omega = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \eta = \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix}.$$

Sei bei festem x_3 die Funktion f_{x_3} definiert durch $f_{x_3}(x_1,x_2) = f(x_1,x_2,x_3)$. Weiter sei für festes $\omega \in S^1$ die Funktion g_ω definiert durch $g_\omega(t,x_3) = (Rf_{x_3})(\omega,t)$.

Zeigen Sie: Dann gilt:

$$(Rg_\omega)(\eta,s) = Rf(\theta,s).$$

Die dreidimensionale Radontransformation lässt sich also als Komposition von zwei geeigneten zweidimensionalen Radontransformationen ausführen. Entsprechend ist die inverse 3D–Radontransformation durch zwei inverse 2D–Radontransformationen ausführbar.

Programmieren Sie den Algorithmus. Verwenden Sie wahlweise die Matlab–Funktion `iradon` zur Implementation der gefilterten Rückprojektion oder ihr eigenes Programm vom letzten Blatt. Testen Sie Ihr Programm an der charakteristischen Funktion einer Kugel mit Radius 0.5.

Übungen zur Vorlesung Inverse Probleme partieller Differentialgleichungen

Übungsblatt 11 , Abgabe: 7. 7. 2006 , 15.00 Uhr

Aufgabe 33: (4 Punkte)
Seien $a,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ und sei $g = R_a f$, $h = \frac{1}{2}(I + iH)Ra$. Dann ist mit $\theta = (\cos\varphi, \sin\varphi)^t$

$$\int_{\mathrm{R}} \int_0^{2\pi} s^m e^{il\varphi + h(\theta,s)} g(\theta,s) d\varphi ds = 0,\ l > m \geq 0,\ l, m\,\text{ganz}.$$

Aufgabe 34: (4 Punkte)
Seien $a, f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Dann ist

$$(R_{-a}^* R_a f)(x) = 2 \int_{\mathrm{R}^2} |x-y|^{-1} \cosh\left(\int_x^y a\ ds \right) f(y) dy.$$

Aufgabe 35: (4 Punkte)
Seien $a,\ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Sei $a(x) = a_0$ für $|x| \leq 1$ und $f(x) = 0$ für $|x| > 1$.
Zeigen Sie: Für $|s| \leq 1$ gilt

$$(R_a f)(\theta, s) = e^{-\sqrt{1-s^2}a_0 - \int_{\sqrt{1-s*s}}^\infty a(s\theta + t\theta_\perp)dt} \left(T_{a_0} f\right)(\theta, s)$$

mit

$$(T_{a_0} f)(\theta, s) = \int_{x\cdot\theta = s} e^{a_0 x \cdot \theta_\perp} f(x) dx.$$

Aufgabe 36: (4 Punkte)
Zeigen Sie: Mit den Bezeichnungen aus der vorhergehenden Aufgabe gilt

$$(\widehat{T_{a_0} f})(\theta, \sigma) = (2\pi)^{1/2} \widehat{f}(\sigma\theta + i a_0 \theta_\perp).$$